



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

Jorge Rodrigues

Identificação Modal Estocástica

Métodos de análise e aplicações em estruturas de engenharia civil

Dissertação elaborada no Laboratório Nacional de Engenharia Civil para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Civil pela Universidade do Porto no âmbito do protocolo de cooperação entre a FEUP e o LNEC

Porto, 2004

Ao meu sobrinho

José Maria

Identificação Modal Estocástica

Métodos de Análise e Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil

RESUMO

A avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil tem um interesse evidente para a validação de modelos utilizados na análise dos efeitos de acções como os sismos, vento, tráfego ferroviário, rodoviário ou pedonal. O interesse nessa avaliação estende-se também à própria caracterização global do estado das estruturas, uma vez que as propriedades dinâmicas estão directamente relacionadas com esse estado. Assim, para o domínio da observação e monitorização estrutural, a avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas é também muito importante, em especial, os métodos que permitem efectuá-la ao longo do tempo, sem introdução de restrições à utilização corrente das estruturas.

Para a caracterização dinâmica de estruturas de engenharia civil, tem havido ultimamente um especial interesse nas técnicas de identificação modal com base na análise da resposta das estruturas às acções a que normalmente estão sujeitas (como por exemplo o vento ou o tráfego de veículos). Tal deve-se aos progressos que se têm verificado nas tecnologias dos transdutores de medição da resposta dinâmica de estruturas, dos sistemas de aquisição de dados, dos meios informáticos e também ao desenvolvimento de métodos de identificação modal apropriados para essa situação.

Neste trabalho abordam-se precisamente os métodos de identificação modal com base na análise da resposta das estruturas às acções a que normalmente estão sujeitas, os quais são designados por *métodos de identificação modal estocástica*. São apresentados os fundamentos desses métodos e explicados os procedimentos seguidos em cada um. São também introduzidos alguns aspectos relacionados com a comparação das características dinâmicas identificadas com as calculadas com modelos analíticos e com a correcção destes de modo a ajustá-los às características identificadas.

Uma parte importante deste trabalho consiste na aplicação prática da identificação modal estocástica à avaliação das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil. A maioria das aplicações desenvolvidas integraram-se em estudos solicitados ao LNEC, no âmbito de ensaios de recepção de estruturas antes da sua entrada em serviço, ou incluídos em trabalhos de inspecção de estruturas já existentes.

Finalmente, apresentam-se algumas considerações sobre o trabalho elaborado e sugerem-se vários aspectos que poderão ser desenvolvidos no futuro.

Stochastic Modal Identification

Analysis Methods and Applications in Civil Engineering Structures

ABSTRACT

The experimental evaluation of the dynamic properties of civil engineering structures has an obvious interest for the validation of models used in the analysis of the effects of loads like earthquakes, wind and railway, roadway or pedestrian traffic. The interest in that evaluation extends also to the global characterization of the structural condition, or structural health, given that the dynamic properties are directly related to that condition. Therefore, in the field of structural monitoring there is also a great interest in the experimental evaluation of the dynamic properties of civil engineering structures, especially in methods for performing it without the need to introduce any kind of restrictions to the normal use of the structures.

For the dynamic characterization of civil engineering structures, there has been, lately, a special interest in the modal identification techniques based on the analysis of the structural responses to the loads to which the structures are usually subjected (like the wind or the traffic of vehicles). This is mainly due to the recent progresses in the technologies of the transducers for measuring structural dynamic responses, data acquisition systems, computers and also to the development of modal identification methods, which are appropriate for that situation.

This work is precisely about the modal identification methods based on the analysis of the structural responses to the loads to which they are usually subjected to, which are named as *stochastic modal identification methods*. The theoretical foundations of those methods are presented and their procedures are explained. Some aspects related with analytical model correlation and updating, based on the identified dynamic properties, are also introduced.

An important part of this work consisted in the practical application of the stochastic modal identification methods, to the evaluation of the dynamic properties of civil engineering structures. Most of those applications were developed within studies requested to LNEC during reception load tests of recently constructed structures or as part of inspection works of structures with already some years of service.

Finally, some comments are made concerning the work that was developed, and possible future developments are proposed.

Identification Modale Stochastique

Méthodes de Analyse et Applications dans les Structures de Génie Civil

RÉSUMÉ

L'évaluation expérimentale des caractéristiques dynamiques des structures de génie civil a un intérêt évident pour la validation des modèles utilisés dans l'analyse des effets des actions comme les séismes, le vent, le trafic ferroviaire, routier ou des péons. L'intérêt de cette évaluation s'étend à la caractérisation globale de l'état des structures, parce que les propriétés dynamiques sont directement rapportées avec cet état. De cette façon, pour l'observation structurelle, l'évaluation expérimentale des caractéristiques dynamiques des structures est aussi très importante, spécialement, les méthodes qui permettent, de la faire au long du temps, sans introduire restrictions à l'utilisation usuelle des structures.

Pour la caractérisation dynamique des structures de génie civil, il y a eu récemment un intérêt spécial dans les techniques d'identification modale basée sur l'analyse de la réponse des structures vis-à-vis les actions sur lesquelles elles sont normalement sujettes (par exemple le vent ou le trafic routier). Ça c'est le résultat du progrès dans la technologie des équipements de mesure de la réponse dynamique de structures, des systèmes d'acquisition de données, des moyens informatiques et aussi bien au développement de méthodes de identification modale appropriées pour cette situation.

Dans ce travail, on aborde les méthodes d'identification modale basées sur l'analyse de réponse des structures aux actions dont elles sont normalement sujettes, désignées par *méthodes d'identification modale stochastique*. On présente les fondations de cette méthode et la explication des procédures suivies par chacune. On introduit aussi quelques matières rapportées avec la comparaison des caractéristiques dynamiques identifiées avec celles calculées par les modèles analytiques et avec leur correction.

Une partie importante de ce travail est l'application pratique de l'identification modale stochastique pour l'évaluation des caractéristiques dynamiques des structures de génie civil. La plupart des applications ont été développées pour des études demandées au LNEC, dans les essais de réception de structures avant de leur utilisation publique, ou en travaux d'inspection sur des structures existantes.

Finalement, on présente quelques conclusions sur le travail élaborées et on fait des suggestions pour quelques matières qui pourront être étudiées dans le futur.

Índice do texto

	Pág.
1 Introdução	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Identificação das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil	6
1.3 Objectivos do trabalho	11
1.4 Organização do trabalho	12
2 Fundamentos Analíticos da Identificação Modal Estocástica	15
2.1 Considerações gerais	15
2.2 Equação do movimento de sistemas discretizados	17
2.3 Representação de estado de sistemas no tempo contínuo	26
2.4 Funções de caracterização da resposta de sistemas no tempo contínuo	34
2.5 Representação de sistemas no tempo discreto	47
2.6 Representação de sistemas através de modelos ARMAV	56
2.7 Considerações finais	60
3 Ensaios <i>in situ</i> de Caracterização Dinâmica de Estruturas	63
3.1 Considerações gerais	63
3.2 Transdutores e sistemas de aquisição de dados	63
3.2.1 Transdutores de medição da resposta	65
3.2.1.1 Acelerómetros	66
3.2.1.2 Transdutores de velocidade	72
3.2.1.3 Transdutores laser de velocidade	73
3.2.1.4 Transdutores de deslocamento de indutância variável	75
3.2.1.5 Transdutores laser de deslocamento	76
3.2.1.6 Transdutores baseados em sistemas de satélites de navegação global	78
3.2.1.7 Transdutores baseados em interferometria de micro-ondas	80
3.2.1.8 Extensómetros	80
3.2.2 Sistemas de aquisição de dados	84
3.2.3 Macro-sismógrafos	88
3.3 Técnicas de ensaio <i>in situ</i> para a caracterização dinâmica de estruturas	90
3.3.1 Ensaios de vibração forçada	90
3.3.2 Ensaios de medição da resposta em regime livre	93

	Pág.
3.3.3 Ensaios de medição da resposta às acções ambiente	95
3.4 Considerações finais	107
4 Métodos de Identificação Modal Estocástica	109
4.1 Considerações gerais	109
4.2 Métodos no domínio da frequência	113
4.2.1 Estimativa das funções de densidade espectral da resposta	113
4.2.2 Método básico no domínio da frequência	119
4.2.3 Método de decomposição no domínio da frequência	137
4.3 Métodos no domínio do tempo	150
4.3.1 Organização das séries de resposta no tempo	151
4.3.2 Estimativa das funções de correlação da resposta	154
4.3.2.1 Método directo	154
4.3.2.2 Método baseado na utilização da FFT	157
4.3.2.3 Método do decremento aleatório	160
4.3.2.4 Comparação entre as funções de correlação estimadas por diversos métodos ..	178
4.3.3 Métodos de ajuste às funções de correlação da resposta	179
4.3.3.1 Métodos ITD e MRITD	182
4.3.3.2 Métodos LSCE e PTD	199
4.3.3.3 Método de identificação estocástica em subespaços SSI-COV	209
4.3.4 Métodos de ajuste às séries de resposta no tempo	219
4.3.4.1 Método de identificação estocástica em subespaços SSI-DATA	220
4.3.4.2 Modelos ARMAV	237
4.3.4.3 Modelos ARV	237
4.4 Comparação dos resultados obtidos com os diversos métodos exemplificados	238
4.5 Implementação dos métodos de identificação modal estocástica	241
4.6 Outros métodos de identificação modal estocástica	245
4.7 Considerações finais	246
5 Comparação com Modelos Analíticos e sua Modificação	251
5.1 Considerações gerais	251
5.2 Compatibilização entre resultados experimentais e analíticos	252
5.2.1 Técnicas de redução de modelos	254
5.2.2 Técnicas de expansão de modelos	257

	Pág.
5.3 Comparação entre resultados experimentais e analíticos	259
5.4 Normalização das componentes modais na identificação modal estocástica	265
5.5 Modificação directa das matrizes de massa e rigidez	272
5.6 Considerações finais	276
6 Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil	277
6.1 Considerações gerais	277
6.2 Estruturas de pontes e viadutos	279
6.2.1 Ponte da Arrábida sobre o rio Douro no Porto	279
6.2.2 Ponte da Figueira da Foz	286
6.2.3 Ponte Miguel Torga sobre o rio Douro na Régua	293
6.2.4 Ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa	305
6.2.5 Estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira	316
6.2.6 Ponte Salgueiro Maia sobre o rio Tejo em Santarém	338
6.2.7 Ponte ferroviária de Canelas	353
6.2.8 Passagem superior PS17 da auto-estrada A-14	363
6.2.9 Viaduto V1 da auto-estrada A-14	374
6.2.10 Viaduto V2 da auto-estrada A-14	387
6.2.11 Ponte ferroviária de Sacavém	397
6.2.12 Viaduto da Rua Ramalho Ortigão em Lisboa	410
6.2.13 Características dinâmicas de estruturas de pontes avaliadas <i>in situ</i> pelo LNEC	420
6.3 Estruturas de edifícios	424
6.3.1 Edifício HCT	424
6.3.2 Modelo de um edifício com 4 pisos	433
6.4 Estruturas de barragens – Barragem do Cabril	438
6.5 Avaliação das forças instaladas em tirantes de pontes atirantadas	445
6.6 Considerações finais	450
7 Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	451
7.1 Conclusões	451
7.2 Desenvolvimentos futuros	456
Referências Bibliográficas	459
Anexo	A.1

Índice das figuras

Pág.

2 Fundamentos Analíticos da Identificação Modal Estocástica

Figura 2.1 –	Características do modelo considerado para exemplo (dimensões em mm).	16
Figura 2.2 –	Matrizes de massa e de rigidez do sistema estrutural considerado para exemplo.	18
Figura 2.3 –	Configurações dos modos de vibração do sistema estrutural considerado para exemplo.	20
Figura 2.4 –	Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema no tempo contínuo.	28
Figura 2.5 –	Situações consideradas para exemplificar a formulação de estado.	28
Figura 2.6 –	Amplitude da função de transferência em aceleração $H_c[1,1]$ do sistema considerado para exemplo.	37
Figura 2.7 –	Amplitude e fase das FRF em aceleração do sistema considerado para exemplo.	39
Figura 2.8 –	Amplitude e fase da FRF em aceleração $H_c[1,1]$ do sistema considerado para exemplo.	40
Figura 2.9 –	Funções de densidade espectral da resposta em aceleração do sistema de exemplo.	43
Figura 2.10 –	Função de densidade espectral da resposta em aceleração $S_y[1,1]$ do sistema de exemplo.	44
Figura 2.11 –	Funções de resposta impulsiva em aceleração do sistema considerado para exemplo.	46
Figura 2.12 –	Função de resposta impulsiva em aceleração $h_c[1,1]$ do sistema considerado para exemplo.	47
Figura 2.13 –	Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema no tempo discreto.	48
Figura 2.14 –	Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema determinístico-estocástico.	51
Figura 2.15 –	Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema estocástico.	52
Figura 2.16 –	Esquema de síntese dos temas abordados no capítulo 2.	60

3 Ensaios *in situ* de Caracterização Dinâmica de Estruturas

Figura 3.1 –	Modos de funcionamento dos acelerómetros piezoeléctricos (http://www.imi-sensors.com).	66
Figura 3.2 –	Esquemas de um acelerómetro piezoresistivo e de um acelerómetro capacitivo.	68
Figura 3.3 –	Esquema do sistema desenvolvido para os acelerómetros ES-U.	71
Figura 3.4 –	Alguns aspectos dos acelerómetros ES-U e das unidades de alimentação e condicionamento.	72
Figura 3.5 –	Esquema do funcionamento de um LVDT (http://www.natinst.com).	75
Figura 3.6 –	Antenas GPS instaladas em pontes suspensas (http://www.leica-geosystems.com).	79
Figura 3.7 –	Exemplos de extensómetros eléctricos de resistência (http://www.vishay.com).	82
Figura 3.8 –	Efeito de aliasing dum sinal devido a amostragem com uma frequência muito baixa.	85
Figura 3.9 –	Sinal sinusoidal discretizado com uma resolução de 3 bits ($2^3 = 8$ níveis).	86
Figura 3.10 –	Configuração actual do sistema de instrumentação desenvolvido para os acelerómetros ES-U.	87
Figura 3.11 –	Alguns aspectos da utilização dos macro-sismógrafos GSR-16.	90

	Pág.
Figura 3.12 – Excitador servo-hidráulico utilizado no EMPA (Cantieni, 2001).	91
Figura 3.13 – Excitador de massas excêntricas utilizado no Departamento de Barragens de Betão do LNEC.	92
Figura 3.14 – Ensaios de vibração forçada da ponte de <i>Yeongjong</i> (http://www.yeongjongbridge.com).	92
Figura 3.15 – Ensaios de vibração forçada da ponte de <i>Tatara</i> (http://www.hsba.go.jp).	92
Figura 3.16 – Dispositivo de aplicação de impulsos da Universidade Católica de <i>Leuven</i> (http://www.kuleuven.ac.be).	93
Figura 3.17 – Peso de 608 kN utilizado nos ensaios da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.	94
Figura 3.18 – Técnica de ensaio com pontos de referência fixos.	98
Figura 3.19 – Técnica de ensaio com avanço dos pontos de referência.	98

4 Métodos de Identificação Modal Estocástica

Figura 4.1 – Esquema do conceito de base dos métodos de identificação modal estocástica.	109
Figura 4.2 – Amostras dos registos de aceleração longitudinal nos 4 pisos do modelo.	117
Figura 4.3 – Estimativas das funções de densidade espectral da resposta em aceleração do sistema de exemplo.	118
Figura 4.4 – Espectro normalizado médio dos registos de acelerações longitudinais.	123
Figura 4.5 – Funções de coerência avaliadas com os registos de acelerações longitudinais.	125
Figura 4.6 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método BFD.	130
Figura 4.7 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método BFD.	130
Figura 4.8 – Aplicação de dois métodos para estimar os coeficientes de amortecimento.	134
Figura 4.9 – Espectros de valores singulares correspondentes aos registos de acelerações longitudinais.	141
Figura 4.10 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método FDD.	142
Figura 4.11 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método FDD.	142
Figura 4.12 – Funções de densidade espectral de cada modo de vibração e coeficientes MAC.	146
Figura 4.13 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 1º modo.	147
Figura 4.14 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 2º modo.	147
Figura 4.15 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 3º modo.	148
Figura 4.16 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 4º modo.	148
Figura 4.17 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método EFDD.	149
Figura 4.18 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método EFDD.	149
Figura 4.19 – Funções de correlação estimadas através do método directo.	157
Figura 4.20 – Avaliação de estimativas não enviesadas das funções de correlação utilizando o algoritmo da FFT.	158

	Pág.
Figura 4.21 – Funções de correlação estimadas através do método baseado na utilização da FFT.	159
Figura 4.22 – Exemplificação do método de avaliação das funções RD.	161
Figura 4.23 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de passagem por um nível.	164
Figura 4.24 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de máximos locais.	166
Figura 4.25 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de pontos positivos.	167
Figura 4.26 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva.	169
Figura 4.27 – Efeito da amostragem numa série na definição dos pontos iniciais.	171
Figura 4.28 – Funções de correlação estimadas através do método do decremento aleatório.	172
Figura 4.29 – Funções RD estimadas através do método do decremento aleatório.	174
Figura 4.30 – Funções de densidade espectral médias das funções RD.	175
Figura 4.31 – Espectro normalizado médio das funções RD.	176
Figura 4.32 – Espectros de valores singulares das funções de densidade espectral das funções RD.	177
Figura 4.33 – Diagramas de estabilização resultantes da aplicação do método ITD.	191
Figura 4.34 – Funções de correlação experimentais e calculadas com o modelo identificado com o método ITD.	193
Figura 4.35 – Espectros médios experimentais e calculados com o modelo identificado com o método ITD.	193
Figura 4.36 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método ITD.	194
Figura 4.37 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método ITD.	194
Figura 4.38 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método MRITD.	195
Figura 4.39 – Função de correlação experimental e calculada com o modelo identificado com o método MRITD.	196
Figura 4.40 – Espectro médio experimental e calculado com o modelo identificado com o método MRITD.	196
Figura 4.41 – Espectros cruzados experimentais e calculados com o modelo identificado com o método MRITD.	196
Figura 4.42 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método MRITD.	197
Figura 4.43 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método MRITD.	197
Figura 4.44 – Contribuição de cada modo para o espectro médio do modelo identificado com o método MRITD.	198
Figura 4.45 – Diagramas de estabilização resultantes da aplicação do método LSCE.	204
Figura 4.46 – Funções de correlação experimentais e calculadas com o modelo identificado com o método LSCE.	205
Figura 4.47 – Espectros médios experimentais e calculados com o modelo identificado com o método LSCE.	206
Figura 4.48 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método LSCE.	206

	Pág.
Figura 4.49 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método LSCE.	206
Figura 4.50 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método PTD.	207
Figura 4.51 – Função de correlação experimental e calculada com o modelo identificado com o método PTD.	208
Figura 4.52 – Espectro médio experimental e calculado com o modelo identificado com o método PTD.	208
Figura 4.53 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método PTD.	208
Figura 4.54 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método PTD.	209
Figura 4.55 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-COV(PC).	215
Figura 4.56 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-COV(UPC).	215
Figura 4.57 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-COV(CVA).	216
Figura 4.58 – Funções de correlação experimentais e calculadas com os modelos identificados com as três variantes do método SSI-COV.	217
Figura 4.59 – Espectros médios experimentais e calculados com os modelos identificados com as três variantes do método SSI-COV.	218
Figura 4.60 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método SSI-COV(PC).	219
Figura 4.61 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método SSI-COV(PC).	219
Figura 4.62 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-DATA(UPC).	230
Figura 4.63 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-DATA(PC).	230
Figura 4.64 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-DATA(CVA).	231
Figura 4.65 – Espectros médios experimentais e calculados com os modelos identificados com as três variantes do método SSI-DATA.	232
Figura 4.66 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método SSI-DATA(UPC).	233
Figura 4.67 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método SSI-DATA(UPC).	233
Figura 4.68 – Amostras das séries de resposta nos 4 pisos do modelo.	235
Figura 4.69 – Amostras das séries de resposta no 1º modo nos 4 pisos do modelo.	235
Figura 4.70 – Amostras das séries de resposta no 2º modo nos 4 pisos do modelo.	235
Figura 4.71 – Amostras das séries de resposta no 3º modo nos 4 pisos do modelo.	236
Figura 4.72 – Amostras das séries de resposta no 4º modo nos 4 pisos do modelo.	236
Figura 4.73 – Amostras das séries do erro de predição nos 4 pisos do modelo.	236
Figura 4.74 – Painel frontal e código em <i>LabView</i> do programa principal modal ID	243
Figura 4.75 – Painel frontal e código em <i>LabView</i> do módulo check time data	243
Figura 4.76 – Painel frontal e código em <i>LabView</i> do módulo check spectra	243

	Pág.
Figura 4.77 – Painel frontal e código em <i>LabView</i> do módulo select modes .	243
Figura 4.78 – Sistematização geral dos principais métodos de identificação modal estocástica.	246
5 Comparação com Modelos Analíticos e sua Modificação	
Figura 5.1 – Comparação entre as frequências calculadas com o modelo e as identificadas experimentalmente.	260
Figura 5.2 – Comparação entre componentes modais calculadas e identificadas com o método EFDD.	261
Figura 5.3 – Comparação entre componentes modais calculadas e identificadas com o método EFDD.	262
Figura 5.4 – Gráficos de 45° comparando as componentes modais calculadas com as identificadas.	262
Figura 5.5 – Matriz dos coeficientes MAC.	263
Figura 5.6 – Coeficientes COMAC.	264
Figura 5.7 – Esquemas do modelo nas diferentes situações de massas adicionais.	269
Figura 5.8 – Vistas do modelo nos quatro ensaios com diferentes situações de massas adicionais.	269
Figura 5.9 – ANPSD para cada um dos ensaios com diferentes situações de massas adicionais.	270
Figura 5.10 – Verificação do ajuste do modelo modificado às características dinâmicas identificadas.	275
6 Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil	
Figura 6.1 – Alçado longitudinal da ponte da Arrábida.	280
Figura 6.2 – Vista geral da ponte da Arrábida.	280
Figura 6.3 – Pontos instrumentados no ensaio da ponte da Arrábida.	281
Figura 6.4 – Auto-espectros médios das acelerações registadas nos pontos de referência.	282
Figura 6.5 – Configurações modais identificadas experimentalmente para a ponte da Arrábida.	284
Figura 6.6 – Esquema em alçado longitudinal da ponte da Figueira da Foz.	287
Figura 6.7 – Vistas gerais da ponte da Figueira da Foz.	287
Figura 6.8 – Pontos instrumentados no ensaio da ponte da Figueira da Foz.	288
Figura 6.9 – Espectro normalizado médio dos registos verticais obtidos nos pontos do tabuleiro.	289
Figura 6.10 – Auto-espectro médio dos registos transversais obtidos no topo das torres.	290
Figura 6.11 – Auto-espectro médio dos registos longitudinais obtidos no topo das torres.	290
Figura 6.12 – Configurações dos modos verticais identificados para a ponte da Figueira da Foz.	291
Figura 6.13 – Configurações dos modos transversais identificados para a ponte da Figueira da Foz.	291
Figura 6.14 – Configurações dos modos de torção identificados para a ponte da Figueira da Foz.	291
Figura 6.15 – Alçado da ponte Miguel Torga.	293
Figura 6.16 – Planta da ponte Miguel Torga.	294
Figura 6.17 – Vistas gerais da ponte Miguel Torga.	294
Figura 6.18 – Secções transversais do tabuleiro da ponte Miguel Torga.	295
Figura 6.19 – Secções instrumentadas nos ensaios efectuados na ponte Miguel Torga.	296
Figura 6.20 – Sequência dos ensaios 1 a 7 efectuados na ponte Miguel Torga.	297

	Pág.
Figura 6.21 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no tabuleiro.	298
Figura 6.22 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no tabuleiro.	298
Figura 6.23 – Espectro normalizado médio dos registos verticais no tabuleiro.	299
Figura 6.24 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no pilar P9.	299
Figura 6.25 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no pilar P9.	299
Figura 6.26 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais no tabuleiro.	300
Figura 6.27 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais no tabuleiro.	300
Figura 6.28 – Configurações dos modos verticais identificados para a ponte Miguel Torga.	301
Figura 6.29 – Configurações dos modos transversais identificados para a ponte Miguel Torga (1º e 2º modos).	301
Figura 6.29 – Configurações dos modos transversais identificados para a ponte Miguel Torga (3º a 10º modos).	302
Figura 6.30 – Corte longitudinal da ponte suspensa sobre o rio Tejo.	306
Figura 6.31 – Alterações introduzidas na secção transversal da ponte suspensa sobre o rio Tejo.	307
Figura 6.32 – Vista geral da ponte suspensa sobre o rio Tejo.	307
Figura 6.33 – Secções instrumentadas nos ensaios da ponte suspensa sobre o rio Tejo.	308
Figura 6.34 – Pontos de colocação dos macro-sismógrafos em cada secção.	308
Figura 6.35 – Sequência dos ensaios efectuados na ponte suspensa sobre o rio Tejo.	309
Figura 6.36 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.	311
Figura 6.37 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.	311
Figura 6.38 – Espectro normalizado médio dos registos transversais.	311
Figura 6.39 – Espectro cruzado e função de coerência entre os registos verticais na secção 0.	311
Figura 6.40 – Configurações identificadas para os três primeiros modos transversais.	312
Figura 6.41 – Configurações identificadas para os três primeiros modos verticais.	313
Figura 6.42 – Configurações identificadas para os três primeiros modos de torção.	313
Figura 6.43 – Avaliação do coeficiente de amortecimento do 1º modo vertical.	314
Figura 6.44 – Cortes longitudinais da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira.	317
Figura 6.45 – Cortes transversais da estrutura em dois pórticos.	318
Figura 6.46 – Vistas gerais da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira (http://www.anam.pt).	318
Figura 6.47 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 1ª fase.	320
Figura 6.48 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 2ª fase.	320
Figura 6.49 – Instrumentação no 1º ensaio de libertação dum peso efectuado na estrutura da 1ª fase.	322
Figura 6.50 – Instrumentação no 2º ensaio de libertação dum peso efectuado na estrutura da 1ª fase.	322
Figura 6.51 – Instrumentação no ensaio de libertação dum peso efectuado na estrutura da 2ª fase.	323
Figura 6.52 – ANPSD dos registos verticais na estrutura da 1ª fase (ensaio com camiões).	324
Figura 6.53 – ANPSD dos registos transversais na estrutura da 1ª fase (ensaio com camiões).	324

	Pág.
Figura 6.54 – ANPSD dos registos longitudinais na estrutura da 1ª fase (ensaios com camiões).	324
Figura 6.55 – ANPSD dos registos verticais na estrutura da 2ª fase (ensaios com camiões).	325
Figura 6.56 – ANPSD dos registos transversais na estrutura da 2ª fase (ensaios com camiões).	325
Figura 6.57 – ANPSD dos registos longitudinais na estrutura da 2ª fase (ensaios com camiões).	325
Figura 6.58 – Configuração identificada para a frequência de 2,22 Hz (modo vertical).	326
Figura 6.59 – Configuração identificada para a frequência de 2,34 Hz (modo vertical).	327
Figura 6.60 – Configuração identificada para a frequência de 2,73 Hz (modo vertical).	327
Figura 6.61 – Configuração identificada para a frequência de 3,04 Hz (modo vertical).	327
Figura 6.62 – Acelerações verticais no ensaio de libertação dum peso efectuado na estrutura da 2ª fase.	329
Figura 6.63 – Espectro médio dos registos verticais na estrutura da 1ª fase (1º ensaio de libertação dum peso).	329
Figura 6.64 – Espectro médio dos registos verticais na estrutura da 1ª fase (2º ensaio de libertação dum peso).	329
Figura 6.65 – Espectro médio dos registos verticais na estrutura da 2ª fase (ensaio de libertação dum peso).	330
Figura 6.66 – Avaliação do coeficiente de amortecimento do modo vertical com frequência de 2,34 Hz.	330
Figura 6.67 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.	331
Figura 6.68 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 0,68 Hz.	332
Figura 6.69 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 1,24 Hz.	332
Figura 6.70 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 1,70 Hz.	332
Figura 6.71 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 1,07 Hz.	332
Figura 6.72 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,12 Hz.	332
Figura 6.73 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,23 Hz.	333
Figura 6.74 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,31 Hz.	333
Figura 6.75 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,35 Hz.	333
Figura 6.76 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,44 Hz.	333
Figura 6.77 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,49 Hz.	334
Figura 6.78 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,65 Hz.	334
Figura 6.79 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,67 Hz.	334
Figura 6.80 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,80 Hz.	334
Figura 6.81 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 3,05 Hz.	335
Figura 6.82 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.	335
Figura 6.83 – Componentes modais a ½ vão entre os pórticos P14 e P15 para o modo vertical com 2,22 Hz.	336
Figura 6.84 – Componentes modais a ½ vão entre os pórticos P24 e P25 para o modo vertical com 2,34 Hz.	336

	Pág.
Figura 6.85 – Corte longitudinal da ponte Salgueiro Maia.	338
Figura 6.86 – Vistas gerais da ponte Salgueiro Maia.	339
Figura 6.87 – Secções instrumentadas nos ensaios da ponte Salgueiro Maia.	341
Figura 6.88 – Colocação dos acelerómetros ES-U em cada secção.	342
Figura 6.88 – Espectro normalizado médio da semi-soma de registos verticais.	344
Figura 6.89 – Espectro normalizado médio da semi-diferença de registos verticais.	344
Figura 6.90 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no tabuleiro.	344
Figura 6.91 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no tabuleiro.	344
Figura 6.92 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no topo dos mastros.	345
Figura 6.93 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no topo dos mastros.	345
Figura 6.94 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da ponte Salgueiro Maia.	346
Figura 6.95 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.	347
Figura 6.96 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais da ponte Salgueiro Maia.	348
Figura 6.97 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção da ponte Salgueiro Maia.	349
Figura 6.98 – Configurações experimentais e calculadas de modos transversais da ponte Salgueiro Maia.	350
Figura 6.99 – Configurações calculadas dos modos transversais com 0,52 Hz e 0,53 Hz.	351
Figura 6.100 – Configurações experimentais e calculadas de modos longitudinais da ponte Salgueiro Maia.	351
Figura 6.101 – Alçado da ponte de Canelas.	354
Figura 6.102 – Alçado dum pilar e secção transversal do tabuleiro da ponte de Canelas.	355
Figura 6.103 – Vistas gerais da ponte de Canelas.	355
Figura 6.104 – Pontos instrumentados nos ensaios da ponte de Canelas.	357
Figura 6.105 – Colocação dos acelerómetros e extensómetros.	357
Figura 6.106 – Tráfego ferroviário sobre a ponte de Canelas durante os ensaios.	358
Figura 6.107 – Espectro médio e funções de coerência dos registos verticais no tramo E1-P1 da via D.	360
Figura 6.108 – Configurações identificadas para o tramo E1-P1 da via D, nas frequências de 8,8 Hz e 14,3 Hz.	360
Figura 6.109 – Funções de resposta em regime livre nos dois tabuleiros do tramo E1-P1.	361
Figura 6.110 – Corte longitudinal da PS17.	364
Figura 6.111 – Secções transversais do tabuleiro da PS17.	364
Figura 6.112 – Secções instrumentadas nos ensaios da PS17.	365
Figura 6.113 – Pontos de colocação dos acelerómetros em cada secção.	365
Figura 6.114 – Ensaios efectuados na PS17.	366
Figura 6.115 – Fases dos ensaios realizados na PS17.	366
Figura 6.115 – Amostras dos registos na secção 6.	367
Figura 6.117 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.	367

	Pág.
Figura 6.118 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.	368
Figura 6.119 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da PS17.	370
Figura 6.120 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.	371
Figura 6.121 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais da PS17.	371
Figura 6.122 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção da PS17.	372
Figura 6.123 – Coeficientes MAC.	373
Figura 6.124 – Corte longitudinal do viaduto V1.	374
Figura 6.125 – Secções transversais do viaduto V1.	375
Figura 6.126 – Secções instrumentadas nos ensaios do viaduto V1.	376
Figura 6.127 – Pontos de colocação dos acelerómetros em cada secção.	376
Figura 6.128 – Pontos instrumentados e sequência dos três ensaios efectuados no viaduto V1.	377
Figura 6.129 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.	378
Figura 6.130 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.	378
Figura 6.131 – Espectro normalizado médio dos registos transversais.	379
Figura 6.132 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais.	379
Figura 6.133 – Perspectiva do modelo de elementos finitos do viaduto V1.	381
Figura 6.134 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.	382
Figura 6.135 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais do viaduto V1.	382
Figura 6.136 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais do viaduto V1.	383
Figura 6.137 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção do viaduto V1.	384
Figura 6.138 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção do viaduto V1.	385
Figura 6.139 – Configurações experimentais e calculadas de modos transversais do viaduto V1.	385
Figura 6.140 – Configurações experimentais e calculadas de modos longitudinais do viaduto V1.	385
Figura 6.141 – Configurações experimentais e calculadas de modos longitudinais do viaduto V1.	386
Figura 6.142 – Corte longitudinal do viaduto V2.	388
Figura 6.143 – Secções transversais do viaduto V2.	388
Figura 6.144 – Alguns aspectos do viaduto V2.	388
Figura 6.145 – Secções instrumentadas nos ensaios do viaduto V2.	389
Figura 6.146 – Alguns aspectos dos ensaios realizados no viaduto V2.	389
Figura 6.147 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.	390
Figura 6.148 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.	391
Figura 6.149 – Espectro normalizado médio dos registos transversais.	391
Figura 6.150 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais.	391
Figura 6.151 – Perspectiva do modelo de elementos finitos do viaduto V2.	392
Figura 6.152 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.	393
Figura 6.153 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais do viaduto V2.	394

	Pág.
Figura 6.154 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção do viaduto V2.	395
Figura 6.155 – Configurações experimentais e calculadas de modos transversais do viaduto V2.	396
Figura 6.156 – Configuração experimental e calculada do modo longitudinal do viaduto V2.	396
Figura 6.157 – Coeficientes MAC.	396
Figura 6.158 – Alçado, planta e secções transversais da ponte de Sacavém.	398
Figura 6.159 – Alguns aspectos da ponte de Sacavém.	399
Figura 6.160 – Alguns aspectos dos acelerómetros ES-U colocados nos banzos das cordas superiores.	400
Figura 6.161 – Sequência dos três ensaios efectuados nas duas estruturas da ponte de Sacavém.	401
Figura 6.162 – Passagem de comboios pendulares sobre a ponte de Sacavém durante os ensaios.	402
Figura 6.163 – Espectros normalizados médios das acelerações transversais.	403
Figura 6.164 – Espectros normalizados médios da semi-soma das acelerações verticais.	403
Figura 6.165 – Espectros normalizados médios da semi-diferença das acelerações verticais.	403
Figura 6.166 – Configuração do 1º modo identificado com o método BFD (1º modo transversal).	404
Figura 6.167 – Configuração do 2º modo identificado com o método BFD (1º modo vertical).	404
Figura 6.168 – Configuração do 3º modo identificado com o método BFD (2º modo transversal).	404
Figura 6.169 – Configuração do 4º modo identificado com o método BFD (1º modo de torção).	404
Figura 6.170 – Configuração do 5º modo identificado com o método BFD (3º modo transversal).	405
Figura 6.171 – Configuração do 6º modo identificado com o método BFD (2º modo vertical).	405
Figura 6.172 – Configuração do 7º modo identificado com o método BFD (2º modo de torção).	405
Figura 6.173 – Respostas em regime livre em 3 dos sinais de referência.	406
Figura 6.174 – Configuração do 1º modo identificado com o método ITD (1º modo transversal).	407
Figura 6.175 – Configuração do 2º modo identificado com o método ITD (1º modo vertical).	407
Figura 6.176 – Configuração do 3º modo identificado com o método ITD (1º modo de torção).	408
Figura 6.177 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da ponte de Sacavém.	409
Figura 6.178 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.	409
Figura 6.179 – Corte longitudinal do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa.	411
Figura 6.180 – Secção transversal a ½ vão do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa.	412
Figura 6.181 – Alguns aspectos do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa.	412
Figura 6.182 – Secções instrumentadas nos ensaios do viaduto da rua Ramalho Ortigão.	413
Figura 6.183 – Pontos de colocação dos acelerómetros em cada secção.	413
Figura 6.184 – Pontos instrumentados e sequência dos ensaios efectuados no viaduto da rua Ramalho Ortigão.	414
Figura 6.185 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.	415
Figura 6.186 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.	415
Figura 6.187 – Espectro normalizado médio dos registos transversais.	415
Figura 6.188 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 2,04$ Hz (1º modo vertical).	416

	Pág.
Figura 6.189 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 2,48$ Hz (2º modo vertical).	416
Figura 6.190 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 2,61$ Hz (1º modo de torção).	416
Figura 6.191 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 3,61$ Hz (2º modo de torção).	417
Figura 6.192 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 4,32$ Hz (3º modo de torção).	417
Figura 6.193 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 5,69$ Hz (3º modo vertical).	417
Figura 6.194 – Espectros dos quatro primeiros valores singulares.	417
Figura 6.195 – Coeficientes MAC entre vectores modais identificados com os métodos BFD, FDD e EFDD.	418
Figura 6.196 – Assimetria na configuração do 1º modo vertical ($f = 2,04$ Hz).	419
Figura 6.197 – Aspectos dos ensaios dinâmicos da ponte sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954).	420
Figura 6.198 – Extensões registadas nos ensaios dinâmicos da ponte sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954).	420
Figura 6.199 – Frequência do 1º modo vertical de pontes rodoviárias em função do seu maior vão.	423
Figura 6.200 – Frequência do 1º modo vertical de pontes ferroviárias em função do seu maior vão.	423
Figura 6.201 – Algumas vistas do edifício HCT (Dyck e Ventura, 1998).	425
Figura 6.202 – Ensaios efectuados no edifício HCT.	426
Figura 6.203 – Espectro normalizado médio dos registos na direcção Norte-Sul.	427
Figura 6.204 – Espectro normalizado médio dos registos na direcção Este-Oeste.	427
Figura 6.205 – Representação das componentes identificadas para o 1º modo – $f = 1,3$ Hz.	428
Figura 6.206 – Representação das componentes identificadas para o 2º modo – $f = 1,5$ Hz.	428
Figura 6.207 – Representação das componentes identificadas para o 3º modo – $f = 3,9$ Hz.	428
Figura 6.208 – Representação das componentes identificadas para o 4º modo – $f = 4,3$ Hz.	429
Figura 6.209 – Representação das componentes identificadas para o 5º modo – $f = 5,4$ Hz.	429
Figura 6.210 – Configurações modais calculadas com o modelo sem paredes de enchimento exteriores.	431
Figura 6.211 – Configurações modais calculadas com o modelo com paredes de enchimento exteriores.	431
Figura 6.212 – Algumas vistas do modelo ensaiado com os acelerómetros colocados.	433
Figura 6.213 – Pormenores dos acelerómetros colocados no modelo e do equipamento de aquisição de dados.	434
Figura 6.214 – Espectros dos três primeiros valores singulares.	435
Figura 6.215 – Diagrama de estabilização correspondente à aplicação do método SSI-DATA(UPC).	435
Figura 6.216 – Configurações dos 6 primeiros modos identificados com o método FDD.	436
Figura 6.217 – Configurações dos 6 primeiros modos identificados com o método SSI-DATA(UPC).	437
Figura 6.218 – Vista geral da barragem do Cabril (http://www-ext.lnec.pt/IGb).	438
Figura 6.219 – Vistas do lado de montante da barragem do Cabril na data de realização do ensaio.	438
Figura 6.220 – Alçado e corte pela coluna central da barragem do Cabril.	440
Figura 6.221 – Planta da barragem do Cabril.	440
Figura 6.222 – Espectros dos dois primeiros valores singulares (com os grupos em funcionamento).	441

	Pág.
Figura 6.223 – Espectros dos dois primeiros valores singulares (com os grupos desligados).	442
Figura 6.224 – Configurações identificadas para a situação com os grupos geradores em funcionamento.	442
Figura 6.225 – Configurações identificadas para a situação com os grupos geradores desligados.	442
Figura 6.226 – Modelo de elementos finitos do conjunto barragem-fundação-albufeira (Oliveira et al., 2003).	443
Figura 6.227 – Frequências e configurações modais calculadas com o modelo de elementos finitos.	443
Figura 6.228 – Configurações do 4º modo de vibração.	444
Figura 6.229 – Efeito do nível da água nas frequências dos modos de vibração da barragem do Cabril.	444
Figura 6.230 – Avaliação das forças instaladas em tirantes de pontes atirantadas.	446
Figura 6.231 – Exemplo de um auto-espectro das acelerações registadas num tirante.	448
Figura 6.232 – Relação entre a frequência e a ordem do correspondente modo.	448
Figura 6.233 – Painel frontal do programa em LabView para avaliação das forças instaladas em tirantes.	449
Figura 6.234 – Código em <i>LabView</i> do programa para avaliação das forças instaladas em tirantes.	449

Índice dos quadros

Pág.

3 Ensaios *in situ* de Caracterização Dinâmica de Estruturas

Quadro 3.1 – Características gerais de alguns acelerómetros piezoelétricos com boa sensibilidade.	67
Quadro 3.2 – Características gerais de alguns acelerómetros capacitivos com boa sensibilidade.	69
Quadro 3.3 – Características gerais de alguns acelerómetros de tipo <i>force balance</i>	70
Quadro 3.4 – Características gerais de alguns transdutores de velocidade.	73
Quadro 3.5 – Características gerais de alguns transdutores laser de velocidade.	74
Quadro 3.6 – Características gerais de alguns transdutores LVDT.	76
Quadro 3.7 – Características gerais de alguns transdutores laser de deslocamento.	77
Quadro 3.8 – Características gerais de alguns macro-sismógrafos.	88

4 Métodos de Identificação Modal Estocástica

Quadro 4.1 – Valores máximos e rms das acelerações longitudinais.	117
Quadro 4.2 – Componentes modais avaliadas com o método BFD.	129
Quadro 4.3 – Estimativas dos coeficientes de amortecimento.	135
Quadro 4.4 – Componentes modais avaliadas com o método FDD.	141
Quadro 4.5 – Frequências e coeficientes de amortecimento avaliados com o método EFDD.	149
Quadro 4.6 – Componentes modais avaliadas com o método EFDD.	149
Quadro 4.7 – Características dinâmicas identificadas com o método RD-BFD.	176
Quadro 4.8 – Características dinâmicas identificadas com o método RD-FDD.	177
Quadro 4.9 – Características dinâmicas identificadas com o método RD-EFDD.	178
Quadro 4.10 – Significado dos símbolos utilizados nos diagramas de estabilização.	191
Quadro 4.11 – Características dinâmicas identificadas com o método ITD.	192
Quadro 4.12 – Características dinâmicas identificadas com o método MRITD.	195
Quadro 4.13 – Características dinâmicas para várias durações das funções de correlação.	198
Quadro 4.14 – Características dinâmicas identificadas com o método LSCE.	205
Quadro 4.15 – Características dinâmicas identificadas com o método PTD.	207
Quadro 4.16 – Características dinâmicas identificadas com as três variantes do método SSI-COV.	216
Quadro 4.17 – Características dinâmicas identificadas com as três variantes do método SSI-DATA.	231
Quadro 4.18 – Características identificadas para o 1º modo de vibração.	239
Quadro 4.19 – Características identificadas para o 2º modo de vibração.	239
Quadro 4.20 – Características identificadas para o 3º modo de vibração.	239
Quadro 4.21 – Características identificadas para o 4º modo de vibração.	240

5 Comparação com Modelos Analíticos e sua Modificação

Quadro 5.1 – Frequências calculadas com o modelo e identificadas experimentalmente.	260
--	-----

6 Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil

Quadro 6.1 – Pontos instrumentados em cada ensaio.	281
Quadro 6.2 – Frequências naturais de vibração identificadas para a ponte da Arrábida.	283
Quadro 6.3 – Coeficientes de amortecimento modal avaliados para a ponte da Arrábida.	284
Quadro 6.4 – Pontos instrumentados em cada ensaio.	289
Quadro 6.5 – Coeficientes de amortecimento modal avaliados para a ponte da Figueira da Foz.	292
Quadro 6.6 – Pontos instrumentados em cada ensaio.	296
Quadro 6.7 – Frequências naturais de vibração identificadas para a ponte Miguel Torga.	300
Quadro 6.8 – Coeficientes de amortecimento modal avaliados para a ponte Miguel Torga.	303
Quadro 6.9 – Secções instrumentadas em cada ensaio.	309
Quadro 6.10 – Frequências naturais de vibração identificadas para a ponte suspensa sobre o rio Tejo.	312
Quadro 6.11 – Resumo das características dinâmicas identificadas para a ponte suspensa sobre o rio Tejo.	314
Quadro 6.12 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 1ª fase.	320
Quadro 6.13 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 2ª fase.	321
Quadro 6.14 – Pontos instrumentados no 1º ensaio de libertação dum peso na estrutura da 1ª fase.	321
Quadro 6.15 – Pontos instrumentados no 2º ensaio de libertação dum peso na estrutura da 1ª fase.	322
Quadro 6.16 – Pontos instrumentados no ensaio de libertação dum peso na estrutura da 2ª fase.	322
Quadro 6.17 – Características dinâmicas identificadas para a estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.	330
Quadro 6.18 – Frequências experimentais e calculadas com o modelo.	335
Quadro 6.19 – Secções instrumentadas em cada ensaio.	341
Quadro 6.20 – Duração total dos registos obtidos nos ensaios da ponte Salgueiro Maia.	342
Quadro 6.21 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.	347
Quadro 6.22 – Pontos instrumentados com os acelerómetros ES-U em cada ensaio.	357
Quadro 6.23 – Características dinâmicas identificadas para a ponte de Canelas.	362
Quadro 6.24 – Pontos instrumentados em cada ensaio.	366
Quadro 6.25 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.	370
Quadro 6.26 – Pontos instrumentados em cada ensaio do viaduto V1.	376
Quadro 6.27 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.	381
Quadro 6.28 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.	393
Quadro 6.29 – Pontos instrumentados com os acelerómetros ES-U em cada ensaio.	401
Quadro 6.30 – Frequências e coeficientes de amortecimento avaliados com o método ITD.	407

	Pág.
Quadro 6.31 – Características dinâmicas identificadas para a ponte de Sacavém.	408
Quadro 6.32 – Pontos instrumentados em cada ensaio do viaduto da rua Ramalho Ortigão.	413
Quadro 6.33 – Características dinâmicas identificadas para o viaduto da rua Ramalho Ortigão.	418
Quadro 6.34 – Características dinâmicas identificadas para o edifício HCT.	429
Quadro 6.35 – Frequências calculadas com os modelos de elementos finitos.	431
Quadro 6.36 – Características dinâmicas identificadas para o modelo de um edifício com 4 pisos.	436

Agradecimentos

O presente trabalho resultou da actividade desenvolvida pelo seu autor no Departamento de Estruturas do LNEC, no domínio da caracterização dinâmica experimental de estruturas de engenharia civil. Para essa actividade contribuíram diversas pessoas, com o seu apoio, orientação, colaboração e disponibilização de meios. O autor deseja deixar-lhes aqui expressos os seus agradecimentos:

- Ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil, instituição onde o trabalho foi elaborado, e a quem o autor agradece, na pessoa dos elementos da actual Direcção e também dos antigos Directores Eng.º Rui Correia e Prof. Arantes e Oliveira, os meios concedidos para a sua realização.
- Aos Chefes do Departamento de Estruturas, durante o período de tempo em que este trabalho foi elaborado, Eng.º Vítor Monteiro e Eng.º Mário Castanheta.
- Ao Eng.º Alfredo Campos Costa, orientador deste trabalho no LNEC, por ter motivado o autor a desenvolvê-lo no domínio da dinâmica de estruturas experimental.
- Ao Prof. Álvaro Cunha, orientador deste trabalho na FEUP, pelo seu apoio e orientação, nomeadamente em termos de elementos bibliográficos actualizados e também por ter incentivado o autor a participar nas conferências IMAC que foram um meio importante para o aprofundamento dos seus conhecimentos no domínio em que o trabalho é desenvolvido.
- Ao Prof. Carlos Ventura da *University of British Columbia* no Canadá, ao Prof. Rune Brincker da *University of Aalborg* na Dinamarca e ao Dr. Reto Cantieni antigo chefe da secção de estruturas de betão do *EMPA - Swiss Federal Laboratory for Materials Testing and Research*, pelos seus ensinamentos, comentários, sugestões e ideias que muito contribuíram para a formação do autor e para o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Eng.º Almeida Fernandes do Departamento de Estruturas do LNEC, pelo seu apoio e pela disponibilização de meios utilizados em muitos dos ensaios que foram efectuados.
- Ao Eng.º Almeida Garrett do Centro de Instrumentação Científica do LNEC, pelo desenvolvimento de equipamentos utilizados em vários dos ensaios realizados.
- Ao Eng.º Luís Oliveira Santos do LNEC pelo seu apoio e amizade.
- Aos colegas da FEUP, Prof. Rui Calçada e Prof.a Elsa Caetano, pelo seu apoio, troca de ideias e comentários.
- Aos colegas Palle Andersen da *SVS* na Dinamarca, Bart Peeters da *LMS* na Bélgica e Brad Pridham da *McMaster University* no Canadá, pelo seu apoio, nomeadamente no que se refere a alguns aspectos da implementação dos métodos de identificação modal estocástica no domínio do tempo.
- Aos experimentadores do LNEC Armindo António e Anabela Martins pela sua colaboração na realização dos ensaios, apoio ao desenvolvimento deste trabalho e pela sua amizade. Agradece-se também aos experimentadores do LNEC José Maria Fidalgo, Asdrúbal Cardoso Taveira, Amândio da Costa Marecos e João Paulo Santos pela sua colaboração em vários ensaios.
- Aos Eng.ºs Júlio Appleton, Armando Rito, Segadães Tavares, Cândio Martins, Dias Barata e António Reis, que na qualidade de projectistas ou responsáveis por trabalhos de inspecção de várias das estruturas cujos ensaios são apresentados neste trabalho, apoiaram e contribuíram também para o seu desenvolvimento.
- À Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento (FLAD), o autor agradece o apoio concedido à sua participação em três conferências IMAC.

Simbologia

Latinas maiúsculas

A	Matriz de estado ou do sistema (sistemas no tempo discreto)
A_c	Matriz de estado ou do sistema (sistemas no tempo contínuo)
B	Matriz de entrada (sistemas no tempo discreto)
B_c	Matriz de entrada (sistemas no tempo contínuo)
B_2	Matriz de localização das forças externas
C	Matriz de resposta (sistemas no tempo discreto)
C_a	Matriz de localização das respostas em aceleração
C_c	Matriz de resposta (sistemas no tempo contínuo)
C_d	Matriz de localização das respostas em deslocamento
C_v	Matriz de localização das respostas em velocidade
C_2	Matriz de amortecimento viscoso
D	Matriz de transmissão directa (sistemas no tempo discreto)
D_c	Matriz de transmissão directa (sistemas no tempo contínuo)
H	Matriz de Hankel
$H_c(s)$	Matriz de funções de transferência
$H_c(\omega)$	Matriz de funções de resposta em frequência
I	Matriz identidade
K	Matriz de rigidez
K_a	Matriz de ganho dum filtro de Kalman
K_r	Matriz de rigidez reduzida
K^m	Matriz de rigidez modificada
L_c^T	Matriz de entrada modal (sistemas no tempo contínuo)
L^T	Matriz de entrada modal (sistemas no tempo discreto)
M	Matriz de massa
M_r	Matriz de massa reduzida
M^m	Matriz de massa modificada
O_p	Matriz de observabilidade dum sistema
P	Matriz de covariância do estado dum sistema
R	Matriz das funções de correlação da resposta
$S_y(\omega)$	Matriz de funções de densidade espectral da resposta
T	Matriz de transformação de coordenadas
V_c	Matriz de resposta modal (sistemas no tempo contínuo)

V	Matriz de resposta modal (sistemas no tempo discreto)
W_1	Matriz de ponderação no método de identificação estocástica em subespaços
W_2	Matriz de ponderação no método de identificação estocástica em subespaços

Latinas minúsculas

f	Frequência circular (Hz)
f_i	Frequência do i -ésimo modo natural de vibração dum sistema estrutural (Hz)
f_s	Frequência de amostragem (Hz)
$h_c(t)$	Matriz das funções de resposta impulsiva
n	N.º de graus de liberdade dum sistema estrutural
n_e	N.º de graus de liberdade observados
n_d	N.º de amostras independentes consideradas para estimar as funções de densidade espectral
p	Vector de forças externas
s	Variável de Laplace
u	Vector de entrada
y	Vector de resposta
w	Janela de processamento de sinal
z	Vector de deslocamentos
z_m	Vector de coordenadas modais

Gregas maiúsculas

Δf	Resolução em frequência
Δt	Intervalo de tempo entre valores num sinal discreto por amostragem
Φ	Matriz das componentes modais
Φ_m	Matriz das componentes modais normalizadas relativamente à matriz de massa
Λ	Matriz diagonal com os n valores próprios complexos dum sistema
Λ_c	Matriz diagonal com os $2n$ valores próprios complexos dum sistema
Γ	Matriz diagonal $\left[\begin{smallmatrix} \sqrt{2} \xi_i & \omega_i \end{smallmatrix} \right]$
Γ_q	Matriz de controlabilidade estocástica dum sistema
Γ_k^{rev}	Matriz de controlabilidade estocástica revertida dum sistema
Π_u	Matriz das funções de covariância do processo estocástico de entrada
Θ	Matriz com os n vectores próprios complexos dum sistema
Ω	Matriz diagonal com as frequências angulares na diagonal principal
Ψ	Matriz com os $2n$ vectores próprios complexos dum sistema

Gregas minúsculas

α	Constante (constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i>)
β	Constante (constante de amortecimento de <i>Rayleigh</i>)
δ	Decremento logarítmico
ε_r	Erro aleatório normalizado
γ^2	Função de coerência
φ	Vectores próprios de um sistema (vectores das componentes modais)
λ	Valores próprios de um sistema (sistemas no tempo contínuo)
μ	Valores próprios de um sistema (sistemas no tempo discreto)
ω	Frequência angular (rad/s)
ξ	Coefficiente de amortecimento

Abreviaturas

ADC	Conversão analógica/digital
ANPSD	Espectro normalizado médio
AR	Modelo auto-regressivo
ARMA	Modelo auto-regressivo com média móvel
ARMAV	Modelo vectorial auto-regressivo com média móvel
ARV	Modelo vectorial auto-regressivo
BFD	Método básico no domínio da frequência
EFDD	Método aperfeiçoado de decomposição no domínio da frequência
FDD	Método de decomposição no domínio da frequência
FFT	Transformada rápida de Fourier
FOH	Retentor de amostras de ordem um
FRF	Função de resposta em frequência
IRF	Função de resposta impulsiva
ITD	Método de Ibrahim no domínio do tempo
IV	Método das variáveis instrumentais
NPSD	Espectro normalizado
PEM	Método do erro de predição
RD	Decremento aleatório (método do decremento aleatório)
SNR	Relação sinal-ruído
SVD	Decomposição em valores singulares
SSI	Método de identificação estocástica em subespaços
ZOH	Retentor de amostras de ordem zero

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

A avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil tem um interesse evidente para a validação de modelos utilizados na análise do seu comportamento às acções que lhes induzem uma resposta dinâmica, como é o caso, por exemplo, dos sismos, vento, tráfego ferroviário, rodoviário ou pedonal. O interesse nessa avaliação não se limita ao estudo dos efeitos desse tipo de acções, mas estende-se também à própria caracterização global do estado das estruturas, uma vez que as propriedades dinâmicas estão directamente relacionadas com esse estado, constituindo uma boa forma de o caracterizar. Assim, no domínio da observação e monitorização estrutural, há também um grande interesse na avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas e, em especial, em métodos que permitam efectuarla ao longo do tempo, sem introdução de restrições à utilização corrente das estruturas.

O procedimento através do qual é efectuada a avaliação das características dinâmicas de estruturas a partir de dados obtidos experimentalmente é um processo de *identificação*, uma vez que consiste em estimar os parâmetros dum modelo que melhor o ajustam a esses dados. Genericamente, a dedução de modelos a partir de dados obtidos por via experimental (e que por isso poderão ser designados por *modelos experimentais*) é denominada *identificação de sistemas*, sendo um domínio com origem na engenharia electrotécnica (Van Overschee e De Moor, 1996; Ljung, 1999) mas que tem actualmente aplicações em áreas muito diversas.

Na dinâmica de estruturas, a aplicação da identificação de sistemas deu origem à *identificação modal* ou *análise modal experimental*, domínio que se desenvolveu inicialmente na engenharia mecânica, mas que, dado o seu interesse, se estendeu também à engenharia civil, onde tem as suas especificidades próprias, decorrentes das características das estruturas de engenharia civil.

Conforme a própria designação indica, na identificação modal, os modelos que são identificados a partir da informação obtida por via experimental são *modelos modais*, que consistem na descrição dos sistemas estruturais através de um conjunto de modos naturais de vibração, traduzidos em termos das suas frequências, coeficientes de amortecimento e configurações.

A maioria das técnicas de identificação modal desenvolvidas no domínio da engenharia mecânica envolvem a realização de ensaios com aplicação de forças controladas, com as quais é induzida nas estruturas uma resposta dinâmica adequada. Nesses ensaios, tanto as forças de excitação aplicadas, como as respostas da estrutura, são medidas com transdutores apropriados. Este domínio da análise modal experimental tem actualmente um desenvolvimento apreciável que é patente no elevado número de livros (Heylen *et al.*, 1997; Maia *et al.*, 1998; Allemang, 1999; Ewins, 2000) e de trabalhos de investigação publicados, no desenvolvimento dos equipamentos de ensaio, tanto de aplicação das forças de excitação, como de medição da resposta das estruturas, e dos programas de análise para a identificação modal e modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas experimentais. Tanto os equipamentos de ensaio como os programas de análise, estão hoje em dia disponíveis comercialmente, muitas vezes fazendo parte de sistemas integrados.

Dado o desenvolvimento que tem actualmente, e devido ao facto do domínio da identificação modal se ter iniciado por essa via, a análise modal experimental com controlo e medição das forças de excitação é por vezes designada por *identificação modal clássica*, denominação que também será adoptada neste trabalho.

Na maioria dos casos, as estruturas de engenharia mecânica têm dimensões relativamente pequenas, o que possibilita que a sua análise modal experimental seja efectuada com base em ensaios realizados em laboratório, sob condições bem controladas. Nesses ensaios, as forças de excitação são aplicadas por intermédio de equipamentos apropriados, tais como martelos de impulsos ou vibradores electrodinâmicos. Em estruturas de maiores dimensões, como por exemplo aeronaves, esses ensaios podem envolver a aplicação simultânea de forças de excitação em diversos pontos das estruturas.

As técnicas de ensaio e análise desenvolvidas no âmbito da identificação modal clássica também podem ser aplicadas em estruturas de engenharia civil, e nalguns casos têm-no sido, utilizando-se para tal vibradores servo-hidráulicos, de massas excêntricas ou sistemas de aplicação de impulsos. No entanto, dadas as dimensões da maioria das estruturas de engenharia civil, as suas características dinâmicas e o tipo de utilização que têm, na maioria das situações não é possível utilizar essas técnicas duma forma económica. De facto, as estruturas de engenharia civil têm em geral grandes dimensões e as frequências dos seus modos naturais de vibração podem ter valores bastante baixos (o que acontece por exemplo nas pontes de grande vão), pelo que os equipamentos de excitação que é necessário utilizar são de grandes dimensões, sendo caros e tendo uma utilização também dispendiosa. No caso de estruturas já em serviço, a realização de ensaios de identificação modal com controlo e medição das forças de excitação exige uma interrupção, pelo menos parcial, do seu funcionamento normal (por exemplo, o encerramento do tráfego em estruturas de pontes) o que pode representar um incómodo considerável, que na maioria dos casos não pode ser suportado.

Para que a identificação modal de estruturas de engenharia civil seja feita duma forma económica, é conveniente que seja efectuada através de métodos de ensaio e análise que não apresentem as desvantagens referidas no parágrafo anterior. Assim, a alternativa à utilização de equipamentos para aplicação das forças de excitação é a realização de ensaios em que apenas se mede a resposta das estruturas às acções decorrentes da sua própria utilização (como é o caso do vento e do tráfego de veículos). Neste tipo de ensaios de identificação modal, que podem ser designados por *ensaaios de medição de vibrações ambiente* ou *ensaaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente*, as forças de excitação correspondentes às acções ambiente não são controladas nem medidas. Este facto leva a que os métodos de identificação modal que devem ser utilizados nessa situação sejam diferentes dos utilizados na identificação modal clássica.

Nos métodos de identificação modal com base na resposta dos sistemas estruturais às acções ambiente, o facto de que as forças de excitação não são medidas experimentalmente, e portanto, não são conhecidas sob um ponto de vista determinístico, leva a que seja necessário assumir determinadas hipóteses quanto às suas características. Nesses métodos, assume-se assim a hipótese de que as forças de excitação são idealizáveis através de um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco (com densidade espectral constante) com média nula. Esta hipótese levou a adoptar para esses métodos a designação *identificação modal estocástica*, que foi também escolhida para título deste trabalho.

A designação *identificação estocástica* é utilizada no contexto genérico da identificação de sistemas por Van Overschee e De Moor (1996), onde é feita distinção entre *identificação determinística*, com análise da entrada e da resposta, *identificação estocástica*, com análise apenas da resposta, e *identificação determinística-estocástica*, com análise da entrada e da resposta e modelação de entradas não controladas e de ruído na resposta. Já no contexto da identificação modal de estruturas de engenharia civil, Peeters (2000) utiliza também a designação *identificação de sistemas estocástica*.

Uma vez assumida a hipótese referida, relativa às características das acções ambiente, é possível efectuar a identificação modal de sistemas estruturais só com base na análise da sua resposta. O facto de que, nos ensaios em que apenas é feita a medição dessa resposta, não há controlo sobre as forças de excitação, leva a que em muitos casos, nomeadamente em estruturas mais rígidas, as respostas às acções ambiente sejam de nível muito baixo. Assim, os equipamentos de medição utilizados nos ensaios de identificação modal estocástica, têm que ter, em geral, uma sensibilidade bastante maior do que os que são utilizados nos ensaios de identificação modal clássica.

Felizmente, os desenvolvimentos verificados nos últimos anos, no domínio dos transdutores de medição da resposta dinâmica de estruturas e dos sistemas de aquisição de dados com conversão analógica/digital, permitem que actualmente seja possível medir e registar com uma discretização adequada, movimentos dos sistemas estruturais, com amplitudes extremamente pequenas.

Para a identificação modal estocástica é também necessário utilizar técnicas de ensaio apropriadas, que sendo diferentes das utilizadas na identificação modal clássica, têm com elas, necessariamente, alguns aspectos em comum, como por exemplo a escolha dos pontos dos sistemas estruturais onde a sua resposta deve ser observada (medida).

Os ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente envolvem, em geral, a obtenção de grandes quantidades de informação experimental que é necessário processar com métodos de análise adequados, exigindo portanto meios de cálculo automático com capacidade para efectuar esse processamento. É reconhecido o progresso que tem havido na capacidade desses meios, pelo que este é também um aspecto que tem possibilitado o desenvolvimento e a aplicação prática de métodos de identificação modal estocástica, que muito dificilmente poderiam ser utilizados há uma década.

Os aspectos acima referidos, relacionados com as capacidades actuais dos equipamentos de medição da resposta das estruturas e dos meios de cálculo, bem como o desenvolvimento de métodos de identificação adequados, fazem com que as metodologias de identificação modal estocástica, sejam hoje aplicáveis a diversos tipos de estruturas de engenharia civil, tais como pontes, edifícios e mesmo barragens ou monumentos.

Salientou-se já o interesse da identificação modal estocástica no domínio da avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil. Na engenharia mecânica, verificam-se também situações em que há interesse em conhecer as características dinâmicas dos sistemas estruturais em condições de serviço, para o que é necessário efectuar ensaios onde apenas é medida a sua resposta. Nesse domínio, é comum utilizar a designação *análise modal operacional* (Hermans e Van der Auweraer, 1998), uma vez que se trata da avaliação das características dinâmicas de estruturas em operação. Note-se que neste caso, a identificação modal é efectuada com os sistemas estruturais em condições reais de funcionamento, para as quais eles devem estar concebidos, e que, nomeadamente em termos de condições de fronteira, podem ser bastante diferentes das condições laboratoriais em que normalmente são efectuados os ensaios de análise modal clássica.

Destacaram-se também as vantagens da identificação modal estocástica no caso das estruturas de grandes dimensões. Para os sistemas estruturais muito pequenos (o que não é de facto o caso das estruturas de engenharia civil) é igualmente muito difícil aplicar os métodos usuais da identificação modal clássica, pois os próprios transdutores podem alterar consideravelmente a massa dos sistemas e é também difícil aplicar as forças de excitação. Para esses sistemas, uma boa alternativa é medir apenas a sua resposta, utilizando transdutores laser que não exigem um contacto directo com o sistema, e aplicar métodos de identificação modal estocástica (Brincker *et al.*, 2003).

Foram até agora acentuadas várias das vantagens da identificação modal estocástica, mas é também importante referir que há algumas desvantagens que lhe têm sido apontadas relativamente à identificação modal clássica:

- pelo facto de não se controlarem as forças de excitação, a resposta estrutural medida, pode ter um nível muito baixo, conduzindo a relações sinal-ruído nos registos obtidos, que, em geral, são inferiores às que é possível obter em ensaios com controle das forças de excitação;
- em virtude do facto anterior, pode também verificar-se que alguns modos do sistema estrutural em análise não são excitados até a um nível mensurável com o equipamento utilizado, não sendo portanto possível identificá-los;
- embora seja possível identificar as frequências, coeficientes de amortecimento e componentes modais, pelo facto de não se medirem as forças de excitação, não é possível identificar as componentes modais normalizadas relativamente à massa dos sistemas, sendo este um aspecto que é importante para a modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente;
- como as forças de excitação não são controladas, as características dinâmicas são avaliadas para níveis de resposta que podem ser muito baixos; tal deve ser tido em conta, principalmente no que se refere à consideração dos coeficientes de amortecimento, estimados para essas amplitudes de resposta, na avaliação dos efeitos de acções de grande intensidade.

Em relação às duas primeiras desvantagens acima enunciadas, uma maneira de, pelo menos em grande parte, conseguir ultrapassá-las, é através da utilização de equipamentos com grande sensibilidade, devidamente configurados. Conforme já se referiu, hoje em dia existem de facto equipamentos que permitem efectuar o registo de respostas estruturais com amplitudes extremamente pequenas, sendo de prever que no futuro se venham a verificar ainda mais desenvolvimentos nesse domínio. Nalgumas situações, também é possível procurar aumentar o nível das acções ambiente (por exemplo, numa ponte, fazendo circular veículos sobre o seu tabuleiro); neste caso deve-se procurar que as acções introduzidas sejam tão aleatórias quanto possível (veículos diferentes, velocidades diferentes, diversas zonas de circulação sobre o tabuleiro) e que tenham um carácter de multi-entrada, excitando as estruturas em diferentes pontos.

No que se refere à terceira desvantagem acima indicada, é de facto uma das questões que têm sido levantadas relativamente à identificação modal estocástica. No entanto, recentemente têm sido propostas formas de a ultrapassar, as quais serão apresentadas neste trabalho.

Quanto à última desvantagem acima enunciada, é um aspecto que é necessário ter em conta, devendo-se ter alguma precaução, em especial na consideração dos coeficientes de amortecimento estimados para níveis de resposta muito baixos, na avaliação dos efeitos, por exemplo, da acção de sismos intensos ou do vento de grande intensidade.

Pelo que foi exposto anteriormente, julga-se ter transparecido que o presente trabalho é desenvolvido numa área que pode ser considerada como num domínio de fronteira, uma vez que envolve temas com origem em diversos domínios científicos desde a engenharia electrotécnica, passando pela engenharia de sistemas de controlo, engenharia mecânica e engenharia civil. Um dos efeitos dessa multidisciplinaridade é o de que, em muitos casos, serão utilizadas designações e apresentadas formulações que não são as mais usuais na engenharia civil. Por exemplo, têm sido utilizados e continuarão a sê-lo ao longo do trabalho, os termos *sistema*, *sistema estrutural* e *estrutura* para designar o que na engenharia civil normalmente é referido com o último desses termos.

Note-se, no entanto que a identificação modal estocástica e as potencialidades das suas aplicações nas estruturas de engenharia civil têm grande interesse, justificando plenamente o desenvolvimento deste trabalho e a sua continuação no futuro, com outros trabalhos dentro de temas directamente relacionados com os que aqui são tratados. A modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente, que aqui será abordada de forma breve, a quantificação e detecção de danos a partir de alterações nas características dinâmicas e a aplicação da identificação modal estocástica na observação e monitorização de estruturas ao longo do tempo, são algumas das aplicações que poderão ser aprofundadas futuramente.

1.2 Identificação das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil

Sendo este trabalho dedicado à avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil, utilizando os métodos de identificação modal estocástica, importa também, nesta introdução, referir outros trabalhos que têm sido desenvolvidos nesse domínio, quer a nível internacional, quer no LNEC e também noutras instituições em Portugal.

É praticamente impossível efectuar uma apresentação exaustiva de todo o trabalho que tem sido feito no domínio da caracterização dinâmica experimental de estruturas de engenharia civil, no entanto, referem-se em seguida alguns trabalhos, que ilustram o interesse e a importância desse tema.

Actividade a nível internacional:

Os primeiros trabalhos que foi possível consultar relacionados com a avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil são devidos a Carder (1936) e foram

desenvolvidos no âmbito de actividades do *United States Coast and Geodetic Survey*, estando relacionados com estruturas de depósitos metálicos elevados e estruturas de edifícios. Posteriormente, o mesmo autor (Carder, 1937) publicou também resultados interessantes, decorrentes da observação de vibrações induzidas pelas acções ambiente, efectuada durante a construção da *San Francisco-Oakland Bay Bridge* e da *Golden Gate Bridge*. O sismógrafo utilizado nesse estudo permitia efectuar o registo de acelerações em filme fotográfico, tendo esse trabalho sido efectuado com o objectivo de avaliar a probabilidade de se verificarem danos em resultado de fenómenos de ressonância durante a ocorrência de sismos.

Vincent (1958) efectuou também estudos na *Golden Gate Bridge* relacionados com a avaliação experimental dos efeitos da acção do vento, tendo para tal desenvolvido e aplicado acelerómetros mecânicos.

Crawford e Ward (1964) realizaram ensaios de medição de vibrações ambiente num edifício de 19 pisos, avaliando as suas frequências naturais de vibração a partir da análise dos auto-espectros dos registos de velocidade obtidos nesses ensaios, e estimando também a configuração do 1º modo de translação numa das direcções.

Mason e Carder (1967), num trabalho motivado pelas questões relacionadas com a acção do vento em pontes suspensas, efectuaram medições das acelerações verticais a meio vão da *Cheasapeake Bay Bridge*, uma ponte suspensa com um vão central de 488 m.

Mc Lamore *et al.* (1971) efectuaram ensaios de medição de vibrações induzidas pelos efeitos do tráfego e vento em duas pontes suspensas, a *Newport Bridge* em *Rhode Island* e a *William Preston Lane Memorial Bridge* em *Maryland*. Utilizando técnicas de análise espectral, os autores desse trabalho avaliam as frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração dessas pontes.

Jennings *et al.* (1972) realizaram ensaios de vibração forçada num edifício de 22 pisos para identificar as suas características dinâmicas. Os resultados que obtiveram são comparados com os de outro estudo (Trifunac, 1972), baseado em ensaios de medição de vibrações ambiente, verificando-se em geral, uma boa concordância entre as frequências e configurações modais avaliadas com os dois tipos de ensaio. A mesma comparação é também efectuada por Trifunac (1972) relativamente a um edifício de 9 pisos, chegando-se a uma conclusão semelhante.

Muitos outros trabalhos de caracterização dinâmica de estruturas de engenharia civil têm sido efectuados, especialmente em estruturas de pontes. Indicam-se em seguida alguns deles: Rainer e Van Selst (1977) efectuaram ensaios de medição de vibrações ambiente e ensaios de vibração forçada na

Lion's Gate Bridge, uma ponte suspensa em *Vancouver*, no Canadá; Abdel-Ghaffar (1978) realizou ensaios de medição de velocidades e deslocamentos sob o efeito do vento e tráfego rodoviário numa ponte suspensa, a *Vicent Thomas Bridge* em *Los Angeles*; Gates e Smith (1984) apresentam a análise de ensaios de medição de vibrações ambiente, efectuados em 57 pontes na Califórnia; Abdel-Ghaffar e Scanlan (1985) realizaram ensaios na *Golden Gate Bridge*; Brownjohn *et al.* (1986) efectuaram ensaios na ponte do *Humber*; Stierner *et al.* realizaram ensaios na *Annacis Bridge*, uma ponte atirantada no Canadá; Brownjohn *et al.* (1989) na primeira ponte do Bósforo em Istambul na Turquia; Murià-Vila *et al.* (1991) efectuaram ensaios de medição de vibrações ambiente numa ponte de tirantes, a *Tampico Bridge* no México; Wilson e Liu (1991) na *Quincy Bayview Bridge*, uma ponte atirantada nos Estados Unidos da América; Brownjohn *et al.* (1992) na segunda ponte do Bósforo na Turquia; Ventura *et al.* (1996) analisam a informação obtida em ensaios de medição de vibrações ambiente efectuados em três passagens superiores na Califórnia; Felber e Cantieni (1996) efectuaram ensaios de medição de vibrações ambiente na *Ganter Bridge* na Suíça; Ventura *et al.* (1996) realizaram ensaios dinâmicos na ponte sobre o rio *Colquitz* no Canadá; Harik *et al.* (1997) efectuaram ensaios na *Brent-Spence Bridge* em *Cincinnati*; Yamaguchi *et al.* (1999) realizaram ensaios dinâmicos *in situ* na ponte de Tatara no Japão.

Em relação especificamente à identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil, são ainda de referir alguns trabalhos que se podem considerar como *marcos* importantes na compreensão e desenvolvimento dos métodos de análise utilizados actualmente. Note-se que são trabalhos da última década, embora a utilização dos ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente tivesse sido já adoptada nos primeiros trabalhos acima referidos. É no entanto compreensível que só mais recentemente tenha havido um maior progresso e uma maior sensibilização para as potencialidades da identificação modal estocástica, em virtude dos recentes desenvolvimentos tecnológicos, no domínio dos transdutores, sistemas de aquisição de dados e dos meios informáticos. Indicam-se em seguida esses trabalhos:

- A tese de doutoramento de Felber (1993) desenvolvida na *University of British Columbia (UBC)*, sob a orientação do Prof. Carlos Ventura. Nessa tese, é feita a automatização de um método de identificação modal estocástica, que neste trabalho é designado por *método básico no domínio da frequência*. Note-se que as bases desse método já tinham sido aplicadas anteriormente, mas ainda não na forma sistematizada que é adoptada por Felber (1993). Em consequência desse trabalho, houve um grande incremento na utilização dos ensaios de medição de vibrações ambiente em estruturas de engenharia civil, quer na *UBC* (Ventura *et al.*, 1996; Black *et al.*, 1997; Dyck e Ventura, 1998) quer no *EMPA - Swiss Federal Laboratory for Materials Testing and Research* (Felber e Cantieni, 1995, 1996);

- A tese de doutoramento de Asmussen (1997), elaborada na Universidade de *Aalborg* na Dinamarca, sob a orientação do Prof. Rune Brincker. Esse trabalho é dedicado ao *método do decremento aleatório* e à sua aplicação na identificação modal de estruturas de engenharia civil;
- A tese de doutoramento de Andersen (1997), desenvolvida também na Universidade de *Aalborg* na Dinamarca, sob a orientação do Prof. Rune Brincker. Essa tese aborda a utilização de *modelos ARMAV* na identificação modal de estruturas de engenharia civil;
- A tese de doutoramento de Peeters (2000), desenvolvida na Universidade Católica de *Leuven* na Bélgica, sob a orientação do Prof. Guido De Roeck. Nesse trabalho, é feita uma sistematização e aplicação do *método de identificação estocástica em subespaços*, na identificação modal e detecção de danos em estruturas de engenharia civil;
- Os trabalhos de Brincker *et al.* (2000, 2001) na sistematização e implementação do *método de decomposição no domínio da frequência*.

É ainda de salientar o trabalho de James *et al.* (1995), no qual é apresentada uma metodologia designada por NEXT (*Natural EXcitation Technique*), que consiste na aplicação de um método de identificação modal a partir das funções de correlação da resposta dos sistemas. No entanto, esse trabalho, não se dedicou especificamente a aplicações no domínio da engenharia civil, tendo dado sim um contributo importante para a aceitação da ideia de que é possível identificar as características modais dos sistemas, exclusivamente a partir da análise da sua resposta, no meio da comunidade mais ligada à engenharia mecânica e portanto mais habituada aos métodos de identificação modal clássica (Peeters, 2000).

Actividade no LNEC:

A avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas é um domínio em que no LNEC tem também havido uma grande actividade, desenvolvida tanto no Departamento de Estruturas, como no Departamento de Barragens de Betão, nos respectivos Núcleos relacionados com observação e monitorização de estruturas, e com dinâmica de estruturas e engenharia sísmica.

Ao elaborar este trabalho, efectuou-se uma pesquisa de relatórios / notas técnicas, feitos no LNEC em que, nos estudos a que se referem, houve, ou como objectivo principal ou como resultado complementar, uma preocupação em avaliar experimentalmente as características dinâmicas de estruturas. No total, são 111 relatórios / notas técnicas, a maioria dos quais relacionados com estruturas de pontes, mas também com barragens, edifícios e monumentos. Nas referências bibliográficas, esses trabalhos são indicados por ordem cronológica.

O primeiro estudo efectuado no LNEC, em que houve o objectivo de avaliar as características dinâmicas duma estrutura por meios experimentais, correspondeu aos ensaios dinâmicos efectuados na ponte em arco sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954). No que se refere às estruturas de pontes, ao longo de 50 anos de actividade neste domínio, foi possível reunir os resultados obtidos num total de 112 estruturas, que no capítulo 6 serão apresentados. De todos esses estudos, há alguns que merecem um destaque especial, quer pela importância das obras a que se referem, quer pela forma como foram efectuados. Realçam-se assim: os ensaios realizados na ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa (LNEC - Marecos *et al.*, 1967) e também o sistema de monitorização dinâmica que esteve instalado nessa mesma estrutura (LNEC - Marecos e Castanheta, 1970); os ensaios efectuados nas pontes atirantadas sobre o rio Guadiana e sobre o rio Arade (Corrêa e Campos Costa, 1992); e ainda diversos estudos efectuados já no âmbito deste trabalho, os quais serão apresentados no capítulo 6.

Os primeiros trabalhos elaborados no LNEC em que houve o objectivo de efectuar a caracterização dinâmica experimental de estruturas de edifícios, foram desenvolvidos por Priestley em 1969. Esses estudos estão descritos num relatório (LNEC – Priestley, 1969), tendo envolvido a realização de ensaios em 7 edifícios na região de Lisboa. Note-se que nesses trabalhos, para além da avaliação das frequências naturais de vibração, é já estimada a configuração dos primeiros modos de translação em duas direcções ortogonais dos edifícios. Uma metodologia análoga à utilizada nesses estudos, foi também aplicada nos trabalhos desenvolvidos nos corpos do edifício do actual Palácio da Justiça em Lisboa (LNEC - Ravara e Pereira, 1970) e nas chaminés da central térmica do Carregado (LNEC – Pereira e Carvalho, 1973).

No que se refere a estruturas de monumentos, salientam-se os estudos efectuados no Aqueduto das Águas Livres em Lisboa (LNEC – Oliveira *et al.*, 1991), na Igreja do Colégio dos Jesuítas nos Açores (LNEC – Oliveira *et al.*, 1993) e no Mosteiro de S. Vicente de Fora (LNEC – Campos Costa *et al.*, 1997).

Em (LNEC – Campos Costa, 1992), apresenta-se um trabalho de caracterização dinâmica da estrutura de uma escultura, com base em ensaios em que lhe foram aplicadas acções impulsivas, deixando-a a vibrar em regime livre.

No que diz respeito às estruturas de barragens, há várias décadas que se desenvolvem no LNEC ensaios com vista à avaliação das suas características dinâmicas. Os primeiros trabalhos foram efectuados nas barragens de Bouça e do Cabril (LNEC – Pereira, 1962). A maioria dos ensaios dinâmicos efectuados pelo LNEC em barragens consistiram em ensaios de vibração forçada, utilizando um vibrador de massas excêntricas, embora nalguns estudos, por exemplo (LNEC – Pinto *et al.*, 1989), já se tenham feito medições de vibrações ambiente para obter uma primeira estimativa das frequências naturais de vibração.

Actividade noutras instituições em Portugal:

No domínio da caracterização dinâmica de estruturas de engenharia civil, é também de referir a actividade desenvolvida noutras instituições em Portugal, nomeadamente na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) e no Instituto Superior Técnico (IST) da Universidade Técnica de Lisboa.

Na FEUP, são de destacar os trabalhos de mestrado e doutoramento de Caetano (1992, 2000), os estudos de caracterização dinâmica com base em ensaios de medição de vibrações ambiente, efectuados na ponte Vasco da Gama (Cunha *et al.*, 1998), na ponte Luiz I (Cunha e Calçada, 1999) e na nova ponte Hintze Ribeiro (Caetano e Cunha, 2003), e ainda o trabalho de doutoramento de Calçada (2003).

No IST, referem-se os trabalhos de mestrado de Proença (1989) e de Ferreira (2001), para além de outros estudos que envolvem a caracterização dinâmica experimental de estruturas de engenharia civil (Oliveira, 1997; Oliveira e Lucas, 1997; Guerreiro e Azevedo, 1998; Drei e Oliveira, 1999).

1.3 Objectivos do trabalho

Tendo em conta a experiência anterior do LNEC na avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil, e os actuais desenvolvimentos tecnológicos no domínio dos transdutores, sistemas de aquisição de dados e meios informáticos, optou-se por dedicar este trabalho ao tema que nele é abordado, em resultado de ter havido uma clara percepção das potencialidades e vantagens das técnicas de identificação modal estocástica. De facto, com essas metodologias, a caracterização dinâmica experimental de estruturas de engenharia civil é realizada de forma bastante mais económica do que com outros métodos baseados em ensaios de vibração forçada. Pode ainda ser efectuada com as estruturas em condições usuais de serviço, o que constitui também uma importante vantagem, que faz com que os métodos de identificação modal estocástica, sejam uma ferramenta com um grande potencial de aplicação na monitorização de estruturas ao longo do tempo.

Os principais objectivos deste trabalho foram assim:

- Sistematizar os diferentes métodos de identificação modal estocástica, compreendendo os seus fundamentos e algoritmos. Para tal, tiveram-se em conta os desenvolvimentos mais recentes neste domínio, verificados a nível internacional, e também a experiência de trabalhos anteriores efectuados no LNEC;

- Implementar e aplicar métodos de identificação modal estocástica a estruturas reais de engenharia civil. No âmbito deste objectivo, houve de facto a oportunidade de efectuar ensaios e aplicar alguns dos métodos de identificação modal estocástica em várias estruturas importantes existentes em Portugal;
- Analisar e aplicar técnicas de comparação das características dinâmicas identificadas com as calculadas com modelos analíticos e iniciar uma análise dos métodos de modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente.

Note-se que a prossecução do segundo objectivo exigiu um importante trabalho no que diz respeito ao desenvolvimento de procedimentos de ensaio, programas de aquisição, análise e processamento de sinais e ao conhecimento das capacidades dos equipamentos utilizados e à melhor forma de as explorar.

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em sete capítulos, o primeiro dos quais é a presente introdução, onde se efectua uma apresentação geral dos temas abordados e se procura salientar a sua importância e o seu interesse no domínio da engenharia civil.

No capítulo 2, apresentam-se os aspectos de índole analítica que se consideram importantes para uma melhor compreensão dos fundamentos dos métodos de identificação modal estocástica. Nomeadamente, estabelece-se uma ligação entre a formulação analítica do comportamento dinâmico de estruturas e a informação que pode ser obtida experimentalmente sob a forma de séries temporais da resposta das estruturas ou, por aplicação de técnicas de processamento de sinal a essas séries, através de funções de correlação ou de funções de densidade espectral. Apresentam-se também diversas formas de representação do comportamento dinâmico de estruturas, algumas das quais não são as mais usuais no domínio da engenharia civil, mas são apresentadas porque servem de base a alguns métodos de identificação modal estocástica.

O capítulo 3 é dedicado aos aspectos relacionados com a realização de ensaios *in situ* de caracterização dinâmica de estruturas, ou seja, com a medição experimental da resposta dos sistemas estruturais, com o objectivo de aplicar métodos de identificação modal estocástica. São referidos os equipamentos, transdutores e sistemas de aquisição de dados, que podem ser utilizados nesse tipo de ensaios, pormenorizando-se as características dos que foram utilizados nas aplicações desenvolvidas durante a realização deste trabalho. Descrevem-se diversas técnicas de ensaio dinâmico de estruturas, especialmente as que devem ser adoptadas em ensaios em que apenas é feita a medição da resposta dos sistemas estruturais. Focam-se também algumas questões relacionadas com o planeamento dos

ensaios e com os procedimentos de pré-processamento que normalmente é necessário aplicar aos registos de resposta obtidos experimentalmente.

No capítulo 4, descrevem-se e aplicam-se diversos métodos de identificação modal estocástica, apropriados para a análise da informação obtida em ensaios de medição da resposta dinâmica das estruturas às acções a que normalmente estão sujeitas. Os diversos métodos apresentados são ilustrados através da sua aplicação num exemplo simples.

No capítulo 5 abordam-se alguns aspectos dum domínio directamente relacionado com a identificação modal, que é o da comparação das características dinâmicas identificadas com as calculadas com modelos analíticos e da modificação destes de modo a aproximar as características dinâmicas calculadas das identificadas experimentalmente. A apresentação que é feita destes temas não é de forma alguma exaustiva. No entanto, não se quis deixar de abordar alguns aspectos com eles relacionados. Um ponto que é focado neste capítulo é o da normalização, relativamente à massa dos sistemas, das componentes modais avaliadas com métodos de identificação modal estocástica, um aspecto que é importante para a modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente.

O capítulo 6 é dedicado à apresentação de diversos casos de aplicação que foram desenvolvidos durante a elaboração deste trabalho. Praticamente todas essas aplicações integraram-se em estudos solicitados ao LNEC no âmbito de ensaios de recepção de estruturas, ou integrados em trabalhos de inspecção de obras já com alguns anos de serviço. As aplicações apresentadas referem-se, na sua maioria, a estruturas de pontes, mas envolvem também edifícios e ainda uma barragem.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho efectuado, sugerindo-se também diversos aspectos que, vindo na sequência do trabalho realizado, poderão ser desenvolvidos no futuro.

Optou-se por organizar as referências bibliográficas dividindo-as em dois grupos. No primeiro grupo, apresentam-se as referências gerais, ordenadas por ordem alfabética, enquanto que no segundo grupo, indicam-se os relatórios / notas técnicas elaborados no LNEC no domínio da caracterização dinâmica experimental de estruturas de engenharia civil. As referências deste segundo grupo são apresentadas por ordem cronológica, dando uma perspectiva histórica da actividade desenvolvida no LNEC nesse domínio.

Capítulo 2

Fundamentos Analíticos da Identificação Modal Estocástica

2.1 Considerações gerais

Como se referiu no capítulo 1, o presente trabalho é dedicado à avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas, a partir das suas respostas às acções que normalmente sobre elas actuam. Antes de apresentar os diversos métodos de identificação modal aplicáveis a essa situação, importa abordar os fundamentos analíticos que lhes servem de base. Procura-se assim, estabelecer uma ligação, partindo da formulação analítica do comportamento dinâmico de estruturas, baseada em princípios físicos, com a informação que pode ser obtida experimentalmente sob a forma de séries temporais da resposta das estruturas ou, por aplicação de técnicas de processamento de sinal a essas séries, através de funções de correlação ou de funções de densidade espectral.

Neste capítulo, apresentam-se diversas formas de representação do comportamento dinâmico de estruturas, estabelecendo-se uma ligação entre elas. Pretende-se assim, por um lado, tornar mais clara a interligação entre essas formas de representação e, por outro, apresentar a fundamentação dos métodos de identificação modal que serão apresentados e aplicados nos capítulos seguintes.

Um dos objectivos deste capítulo é a apresentação dos modelos de dinâmica de estruturas numa representação de estado, que não é a mais usual na abordagem de problemas de dinâmica de estruturas no domínio da engenharia civil, embora seja apresentada por exemplo por Duarte (1980) e por Cunha (1990), mas serve de base a vários dos métodos de identificação modal que serão apresentados. Tal deve-se ao facto de estes métodos terem origem na engenharia de sistemas de controlo, domínio científico em que é comum a utilização da representação de estado para a análise de sistemas dinâmicos (Carvalho, 1989; Ljung, 1999; Ribeiro, 2002).

Com os actuais sistemas de aquisição de dados com conversão analógica/digital, as respostas estruturais medidas experimentalmente são sempre obtidas na forma de séries numéricas discretas no tempo. Assim, um outro aspecto importante deste capítulo prende-se com o estabelecimento duma ligação entre os modelos expressos no tempo contínuo e os modelos discretos por amostragem.

A abordagem que é apresentada limita-se à situação do comportamento dinâmico de estruturas em regime linear, ou seja, na terminologia utilizada em engenharia de sistemas de controlo, aos

sistemas lineares invariantes no tempo, abreviadamente SLITS (Ribeiro, 2002). A suposição de linearidade implica que, se uma força induz uma resposta com uma determinada amplitude, então a uma força a ela proporcional, corresponde uma resposta com uma amplitude de idêntica proporcionalidade. Tal traduz-se no facto de que a resposta dos sistemas estruturais a qualquer combinação de forças aplicadas simultaneamente é igual à soma das respostas a cada uma dessas forças aplicadas isoladamente. A hipótese de invariância no tempo implica que os parâmetros característicos dos sistemas são constantes no tempo.

Normalmente, na abordagem clássica da dinâmica de estruturas, são apresentados inicialmente os aspectos relativos a sistemas de um grau de liberdade, dada a sua importância para a compreensão geral do tema. Tal não será efectuado neste trabalho, uma vez que são aspectos suficientemente abordados em vários trabalhos sobre dinâmica de estruturas (Ravara, 1969; Duarte, 1983; Clough e Penzien, 1993; Chopra, 1995) e sobre análise modal experimental (Heylen *et al.*, 1997; Maia *et al.*, 1998; Allemang, 1999; Ewins, 2000). Assim, na apresentação que será efectuada em seguida, começa-se, desde logo, pela abordagem relativa aos sistemas discretizados em vários graus de liberdade. Há alguns pontos tratados inicialmente que também já se encontram claramente explicados nos trabalhos referidos, no entanto servem de ponto de partida e de elo de ligação com os aspectos seguintes, de maior interesse para uma melhor compreensão da identificação modal estocástica.

Exemplo: Ao longo deste capítulo, as diferentes formas de representação do comportamento dinâmico de estruturas, serão ilustradas com um exemplo simples, de modo a concretizar os conceitos que serão apresentados. Para este efeito, considerou-se a estrutura dum modelo físico de um edifício de 4 pisos, construído à escala $\frac{1}{4}$, que foi utilizado num estudo experimental desenvolvido na mesa sísmica triaxial do LNEC (Coelho *et al.*, 2000). Na figura 2.1, representa-se o modelo e indicam-se as suas características geométricas e do betão que o constitui.

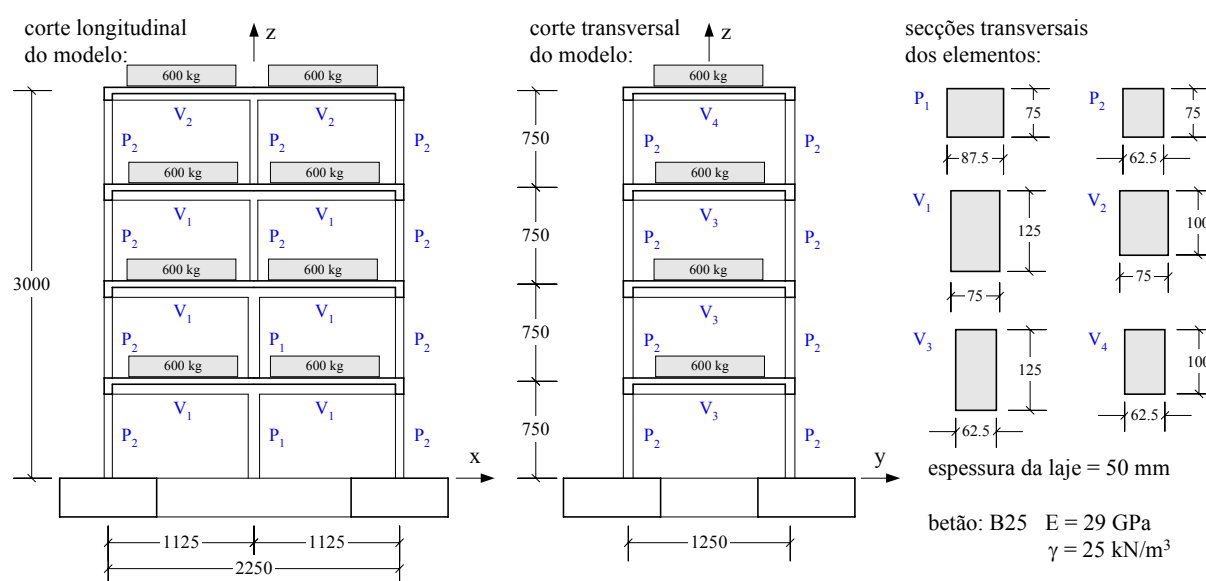


Figura 2.1 – Características do modelo considerado para exemplo (dimensões em mm).

De modo a evitar que o espaço dedicado a este exemplo seja excessivo, serão considerados como graus de liberdade a analisar, apenas os deslocamentos horizontais dos pisos segundo a direcção longitudinal (direcção x), resultando portanto num sistema com 4 graus de liberdade. Conforme é indicado na figura 2.1, para além da massa dos elementos estruturais do modelo, foi ainda considerada uma massa adicional de 1200 kg em cada piso.

Tendo havido oportunidade de efectuar ensaios de medição de vibrações ambiente num dos modelos construídos para o referido estudo experimental, este mesmo exemplo servirá também no capítulo 4, para ilustrar a aplicação dos diferentes métodos de identificação modal estocástica que serão apresentados.

2.2 Equação do movimento de sistemas discretizados

O comportamento dinâmico de sistemas estruturais, discretizados em n graus de liberdade sujeitos à acção de forças externas $\mathbf{p}(t)$, pode ser expresso através da seguinte equação matricial, que representa um sistema de n equações diferenciais de 2ª ordem:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (2.1)$$

em que: \mathbf{M} , \mathbf{C}_2 e \mathbf{K} ($n \times n$) são matrizes designadas por matriz de massa, de amortecimento viscoso e de rigidez, respectivamente;

$\mathbf{z}(t)$ ($n \times 1$) é o vector com os deslocamentos segundo os n graus de liberdade;

$\dot{\mathbf{z}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{z}}(t)$ ($n \times 1$) são os vectores de velocidades e acelerações;

$\mathbf{p}(t)$ ($n \times 1$) é o vector de forças externas.

A equação matricial (2.1) exprime o equilíbrio no tempo contínuo, entre as forças de inércia $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}}(t)$, de dissipação de energia $\mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{z}}(t)$ e de restituição elástica $\mathbf{K} \mathbf{z}(t)$ com as forças externas $\mathbf{p}(t)$ aplicadas aos sistemas. É pois uma relação de equilíbrio dinâmico, tendo em conta o princípio de d'Alembert, segundo o qual numa massa sujeita a uma aceleração desenvolve-se uma força de inércia de sentido contrário à aceleração e de valor igual ao produto da massa pela aceleração. A equação (2.1) tem portanto uma fundamentação física, podendo também ser considerada como uma expressão da segunda lei de Newton, ser estabelecida a partir do princípio dos trabalhos virtuais ou ainda do princípio de Hamilton, situação em que (2.1) corresponde às equações de Lagrange dos sistemas (Clough e Penzien, 1993; Chopra, 1995; Maia *et al.*, 1998).

A equação (2.1) refere-se a sistemas estruturais discretizados em n graus de liberdade. Tal implica um procedimento de discretização das características dos sistemas, que em geral são distribuídas. Essa discretização é usualmente feita através do método dos elementos finitos, correspondendo a equação (2.1) ao equilíbrio dinâmico de modelos de elementos finitos.

Na equação (2.1), as forças de dissipação de energia são consideradas como sendo de tipo viscoso e iguais ao produto duma matriz de constantes de amortecimento (matriz C_2) pelo vector de velocidades. Na realidade, num sistema estrutural em regime linear, a dissipação de energia pode ocorrer devido a diversos mecanismos (Chopra, 1995), nomeadamente: o efeito térmico decorrente da deformação elástica repetida e o atrito interno nos materiais; o atrito nas ligações entre elementos; a abertura e fecho de micro-fissuras; o atrito entre elementos estruturais e não estruturais; a interacção entre o solo de fundação e a estrutura. Dada a dificuldade que haveria em representar matematicamente todos esses mecanismos, é usual considerar o amortecimento como sendo de tipo viscoso, o que corresponde a uma razoável idealização equivalente desses mecanismos responsáveis pela dissipação de energia num sistema estrutural em regime linear. Acresce ainda que essa idealização é muito conveniente em termos do tratamento matemático da equação do movimento.

O vector de forças externas $p(t)$ pode ser escrito como o produto de uma matriz B_2 ($n \times m$) por um vector de entrada $u(t)$ ($m \times 1$), em que $m \leq n$. A matriz B_2 é constituída por zeros (0) ou uns (1), especificando os m graus de liberdade onde estão aplicadas as entradas $u(t)$. Assim a equação (2.1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$M \ddot{z}(t) + C_2 \dot{z}(t) + K z(t) = B_2 u(t) \quad (2.2)$$

Exemplo: Com um modelo de elementos finitos espacial, ver figura 2.2, desenvolvido com o programa SAP2000 (CSI, 2000), determinaram-se as matrizes de massa e de rigidez, condensadas aos 4 graus de liberdade já referidos (deslocamentos horizontais dos pisos segundo a direcção longitudinal). Nesse modelo numérico, os pisos do modelo do edifício são considerados como diafragmas rígidos no seu próprio plano. Na figura 2.2 representa-se também o sistema estrutural condensado e indicam-se as correspondentes matrizes de massa e de rigidez (ainda não se apresentam valores para a matriz de amortecimento, tal só será feito mais adiante).

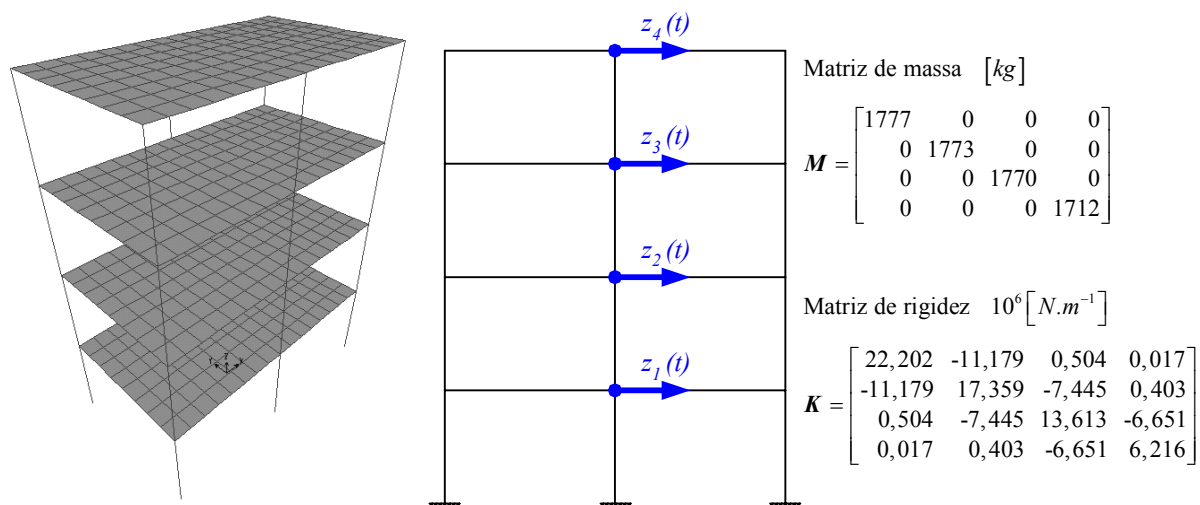


Figura 2.2 – Matrizes de massa e de rigidez do sistema estrutural considerado para exemplo.

Frequências e modos de vibração de sistemas sem amortecimento:

No caso de sistemas estruturais sem amortecimento, os seus valores e vectores próprios, correspondentes às suas frequências e modos naturais de vibração (sem forças externas aplicadas), podem ser determinados considerando a equação do movimento na situação de regime livre, ou seja:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Assumindo que a solução da equação (2.3) tem a forma $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i e^{\lambda_i t}$, obtém-se a seguinte equação relativa a um problema de valores e vectores próprios:

$$\left(\mathbf{K} - (-\lambda_i^2) \mathbf{M} \right) \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

em que: $\boldsymbol{\varphi}_i$ ($n \times 1$) com $i = 1, \dots, n$ são os vectores próprios reais do sistema, correspondentes às soluções não triviais de (2.4) e também designados por modos de vibração;
 $(-\lambda_i^2)$ com $i = 1, \dots, n$ são os valores próprios reais do sistema, que no caso de sistemas não amortecidos são iguais ao quadrado das frequências próprias angulares ω_i (rad/s) não amortecidas, verificando-se portanto que $\lambda_i = j \omega_i$ (em que j é o imaginário puro unitário, $j^2 = -1$); as frequências próprias f_i (Hz) não amortecidas relacionam-se com as frequências próprias angulares ω_i (rad/s) não amortecidas, através de $f_i = \omega_i / (2 \pi)$.

Os vectores próprios correspondentes aos n modos de vibração dum sistema estrutural podem ser reunidos na matriz modal $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_n]$ ($n \times n$) e as frequências próprias angulares ω_i numa matriz diagonal $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_i]$. Entre os vectores próprios e as matrizes de massa e de rigidez verificam-se as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{m}_i] \quad , \quad \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{k}_i] \quad (2.5)$$

em que: m_i e k_i são, respectivamente, a massa modal e a rigidez modal correspondentes ao modo de vibração i , verificando-se a relação $\omega_i^2 = k_i / m_i$.

Os vectores próprios $\boldsymbol{\varphi}_i$ são sempre determinados a menos de um factor de escala, podendo-se, por conveniência para a resolução da equação do movimento, normalizá-los relativamente à matriz de massa, de modo a que se verifiquem as relações:

$$\boldsymbol{\Phi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_m = \mathbf{I} \quad , \quad \boldsymbol{\Phi}_m^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi}_m = \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (2.6)$$

em que: Φ_m ($n \times n$) é a matriz que tem como colunas os vectores próprios ϕ_{mi} normalizados relativamente à matriz de massa, que podem ser determinados através de $\phi_{mi} = \phi_i / \sqrt{m_i}$;
 I ($n \times n$) é a matriz identidade.

Exemplo: Considerando as matrizes de rigidez e massa anteriormente apresentadas, determinaram-se os valores próprios, frequências próprias, matriz modal e matriz modal normalizada, que se indicam em seguida (estes cálculos, bem como os que serão apresentados adiante, referentes a este exemplo, foram efectuados com programas desenvolvidos em *MatLab* (MathWorks, 2000)):

Valores próprios $[rad^2.s^{-2}]$	Frequências angulares $[rad.s^{-1}]$	Frequências $[Hz]$
$-\lambda_i^2 = \begin{bmatrix} 550,2 \\ 4130,4 \\ 10419,4 \\ 18503,2 \end{bmatrix}$	$\omega_i = \begin{bmatrix} 23,46 \\ 64,27 \\ 102,08 \\ 136,03 \end{bmatrix} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 23,46 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64,27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 102,08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 136,03 \end{bmatrix}$	$f_i = \begin{bmatrix} 3,733 \\ 10,229 \\ 16,246 \\ 21,649 \end{bmatrix}$
Matriz modal (vectores próprios)	Matriz de massa modal $[kg]$	Matriz de rigidez modal $10^6 [N.m^{-1}]$
$\Phi = \begin{bmatrix} 0,256 & 0,747 & -0,669 & 1,000 \\ 0,526 & 1,000 & -0,176 & -0,936 \\ 0,826 & 0,177 & 1,000 & 0,435 \\ 1,000 & -0,895 & -0,580 & -0,128 \end{bmatrix}$	$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} 3525 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3196 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3694 \end{bmatrix}$	$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} 1,939 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17,31 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33,30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 68,34 \end{bmatrix}$
Matriz modal normalizada em relação à matriz de massa $10^{-3} [kg^{-0,5}]$		$[rad^2.s^{-2}]$
$\Phi_m = \begin{bmatrix} 4,319 & 11,541 & -11,837 & 16,454 \\ 8,852 & 15,445 & -3,119 & -15,401 \\ 13,906 & 2,738 & 17,689 & 7,155 \\ 16,844 & -13,821 & -10,251 & -2,103 \end{bmatrix}$	$\Phi_m^T M \Phi_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\Phi_m^T K \Phi_m = \begin{bmatrix} 550,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4130,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10419,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18503,2 \end{bmatrix}$

Na figura 2.3 apresentam-se os vectores próprios do sistema estrutural que se está a analisar, através da representação gráfica das configurações modais calculadas com o modelo de elementos finitos espacial já referido.

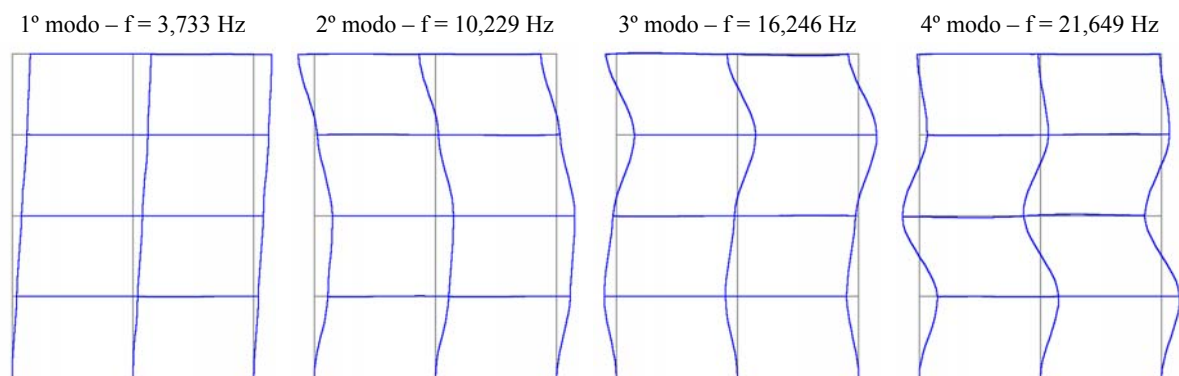


Figura 2.3 – Configurações dos modos de vibração do sistema estrutural considerado para exemplo.

Frequências e modos de vibração de sistemas com amortecimento proporcional:

Na situação de sistemas estruturais com amortecimento ($C_2 \neq 0$), o produto matricial $\Phi^T C_2 \Phi$ pode resultar ou não numa matriz diagonal, dependendo da distribuição, no sistema estrutural, dos mecanismos responsáveis pela dissipação de energia. No primeiro caso (C_2 também é diagonalizada pela matriz modal), diz-se que o sistema tem amortecimento proporcional ou clássico (Ventura e Brincker, 2000). Se o referido produto matricial resultar numa matriz não diagonal, então o sistema tem amortecimento não proporcional ou não clássico, situação que adiante será abordada.

Um caso especial de amortecimento proporcional é o chamado amortecimento de *Rayleigh*, em que a matriz de amortecimento é dada por uma combinação linear da matriz de massa e da matriz de rigidez:

$$C_2 = \alpha M + \beta K \quad (2.7)$$

em que: α e β são duas constantes.

Ao considerar-se um amortecimento do tipo de *Rayleigh* está-se no fundo a admitir que o amortecimento tem uma distribuição, ao longo do sistema estrutural, semelhante à distribuição da massa e da rigidez. Tal parece ser uma hipótese verosímil, pelo menos no caso de estruturas constituídas por um material homogéneo, e em que não existam outros mecanismos responsáveis por parte significativa da dissipação de energia, que não sejam os associados ao próprio funcionamento do material das estruturas.

Um outro caso de amortecimento proporcional é o chamado amortecimento de Caughey, em que a matriz de amortecimento pode ser construída através de (Ventura e Brincker, 2000):

$$C_2 = M \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (M^{-1} K)^i \quad (2.8)$$

em que: α_i são constantes.

A condição geral que a matriz C_2 deve satisfazer para que se verifique uma situação de amortecimento proporcional é a seguinte relação (Allemang, 1999):

$$[M^{-1} C_2]^s [M^{-1} K]^r = [M^{-1} K]^r [M^{-1} C_2]^s \quad (2.9)$$

em que: s e r são dois números inteiros.

Considerando então a situação de amortecimento proporcional e introduzindo a transformação de coordenadas $\mathbf{z}(t) = \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_m(t)$, em que $\mathbf{z}_m(t)$ ($n \times 1$) é o vector de coordenadas modais; pré-multiplicando a equação (2.2) por $\mathbf{\Phi}^T$, obtém-se:

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{z}}_m(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_2 \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{z}}_m(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_m(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (2.10)$$

Na situação de amortecimento proporcional, a matriz \mathbf{C}_2 também é diagonalizada pela matriz modal $\mathbf{\Phi}$, ou seja:

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C}_2 \mathbf{\Phi} = [\backslash c_i \backslash] = [\backslash 2 \xi_i \omega_i m_i \backslash] = [\backslash 2 \xi_i \omega_i \backslash] [\backslash m_i \backslash] = \mathbf{\Gamma} [\backslash m_i \backslash] \quad (2.11)$$

Na expressão (2.11) introduziu-se o coeficiente de amortecimento modal ξ_i , que é definido como a relação entre a constante de amortecimento e o amortecimento crítico, $\xi_i = c_i / (2 m_i \omega_i)$. Introduzindo as relações (2.5) e (2.11) na equação do movimento expressa em termos de coordenadas modais (2.10), obtém-se o seguinte sistema de equações desacopladas:

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{z}}_m(t) + \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{z}}_m(t) + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{z}_m(t) = \left[\frac{1}{m_i} \right] \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (2.12)$$

Os vectores próprios dum sistema com amortecimento proporcional coincidem com os vectores próprios desse mesmo sistema sem amortecimento, uma vez que a matriz \mathbf{C}_2 também é diagonalizada pela matriz modal $\mathbf{\Phi}$. Considerando a forma homogénea da equação (2.12) pode-se verificar que os correspondentes valores próprios λ_i , têm que satisfazer a equação característica $\lambda_i^2 + 2 \xi_i \omega_i \lambda_i + \omega_i^2 = 0$, de cuja resolução se obtêm as relações:

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_i + j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad , \quad \lambda_i^* = -\xi_i \omega_i - j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (2.13)$$

$$\omega_i = |\lambda_i| \quad , \quad \xi_i = -\text{Re}(\lambda_i) / |\lambda_i| \quad (2.14)$$

Em geral, os parâmetros necessários para a construção da matriz de rigidez e da matriz de massa, nomeadamente o módulo de elasticidade e a massa específica, podem ser determinados por ensaios de caracterização mecânica dos materiais que constituem as estruturas. No que se refere à matriz de amortecimento, já não é possível proceder da mesma forma, podendo-se no entanto avaliar os coeficientes de amortecimento modal ξ_i através da análise da informação obtida em ensaios dinâmicos das estruturas (conforme adiante se apresentará neste trabalho). É então possível, considerando os coeficientes de amortecimento modal ξ_i obtidos experimentalmente, construir a matriz de amortecimento \mathbf{C}_2 através de:

$$\mathbf{C}_2 = \left(\Phi^{-1} \right)^T \left[\begin{array}{c} 2 \xi_i \omega_i m_i \end{array} \right] \Phi^{-1} = \mathbf{M} \Phi \left[\begin{array}{c} 1 \\ m_i \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \xi_i \omega_i \end{array} \right] \Phi^T \mathbf{M} \quad (2.15)$$

Exemplo: Considerando a relação (2.7), as matrizes de rigidez e massa anteriormente apresentadas, e arbitrando valores para as constantes α e β , formou-se uma matriz de amortecimento viscoso proporcional, que se indica em seguida, a que correspondem os coeficientes de amortecimento também indicados.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0,8 \text{ s}^{-1} \\ \beta = 0,0003 \text{ s} \end{array} \right\} (2.7) \Rightarrow \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 8082,4 & -3353,8 & 151,3 & 5,0 \\ -3353,8 & 6626,6 & -2233,5 & 120,8 \\ 151,3 & -2233,5 & 5499,8 & -1995,2 \\ 5,0 & 120,8 & -1995,2 & 3234,1 \end{bmatrix} \quad (2.11) \Rightarrow \xi_i = \begin{bmatrix} 2,06 \\ 1,59 \\ 1,92 \\ 2,33 \end{bmatrix}$$

Matriz de amortecimento $[N.s.m^{-1}]$ Coeficientes de amortecimento $[\%]$

Alternativamente, utilizando a relação (2.15), construiu-se uma matriz de amortecimento viscoso proporcional de maneira que todos os coeficientes de amortecimento sejam de 2,00 % (nos cálculos subsequentes esta é a matriz de amortecimento viscoso que será considerada).

$$\xi_i = \begin{bmatrix} 2,00 \\ 2,00 \\ 2,00 \\ 2,00 \end{bmatrix} \quad (2.15) \Rightarrow \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 7596,0 & -2313,3 & -241,5 & -105,1 \\ -2313,3 & 6344,8 & -1885,7 & -310,0 \\ -241,5 & -1885,7 & 5504,2 & -2120,0 \\ -105,1 & -310,0 & -2120,0 & 3546,0 \end{bmatrix}$$

Coeficientes de amortecimento $[\%]$ Matriz de amortecimento $[N.s.m^{-1}]$

Frequências e modos de vibração de sistemas com amortecimento viscoso em geral:

Nem sempre a hipótese de amortecimento proporcional é válida, nomeadamente em sistemas estruturais em que a existência de diferentes materiais, as ligações entre elementos, as condições de apoio, ou o efeito de elementos não estruturais, resultam numa grande complexidade das distribuições de rigidez, massa e amortecimento (que em termos de sistemas discretizados se traduzem nas correspondentes matrizes).

A existência de dispositivos de amortecimento localizados numa estrutura, é também um caso em que a dissipação de energia fica concentrada nalguns pontos, não havendo portanto uma proporcionalidade da matriz de amortecimento relativamente à matriz de massa e/ou de rigidez.

Na situação de sistemas com amortecimento viscoso em geral, a matriz de amortecimento \mathbf{C}_2 não é necessariamente diagonalizada pela matriz modal Φ , e os vectores próprios do sistema amortecido não coincidem necessariamente com os vectores próprios do sistema não amortecido. Para determinar os valores e vectores próprios de sistemas nessa situação, é necessário introduzir uma alteração à equação do movimento (2.2), transformando-a, de um sistema de n equações diferenciais

de 2ª ordem, num sistema de $2n$ equações diferenciais de 1ª ordem. Assim, definindo o vector de estado $\mathbf{x}(t)$ ($2n \times 1$) e as matrizes \mathbf{A}_s ($2n \times 2n$) e \mathbf{B}_s ($2n \times 2n$) através de:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

e introduzindo a igualdade $\mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}(t)$, é possível verificar que a equação (2.2) pode ser expressa de forma equivalente através de:

$$\mathbf{A}_s \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_s \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.17)$$

Da forma homogénea da equação (2.17) resulta um problema de valores e vectores próprios, de onde se podem avaliar as $2n$ frequências naturais complexas e os $2n$ vectores próprios complexos. Em forma matricial, esse problema de valores e vectores próprios pode ser expresso através de:

$$\mathbf{A}_s \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c + \mathbf{B}_s \mathbf{\Psi} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

em que: $\mathbf{\Psi}$ ($2n \times 2n$) é uma matriz que tem como colunas os $2n$ vectores próprios complexos;

$\mathbf{\Lambda}_c = [\lambda_i]$ ($2n \times 2n$) é uma matriz diagonal que contém os $2n$ valores próprios complexos λ_i .

As matrizes $\mathbf{\Lambda}_c$ e $\mathbf{\Psi}$ têm a seguinte estrutura (Peeters, 2000):

$$\mathbf{\Lambda}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta} & \mathbf{\Theta}^* \\ \mathbf{\Theta} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Theta}^* \mathbf{\Lambda}^* \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

em que: $\mathbf{\Lambda}$ ($n \times n$) e $\mathbf{\Theta}$ ($n \times n$) são as matrizes dos valores próprios complexos e dos vectores próprios complexos correspondentes ao problema inicial expresso através do sistema de equações diferenciais de 2ª ordem (2.1) ou (2.2); a partir de (2.18) e considerando (2.16) pode-se verificar que as matrizes $\mathbf{\Lambda}$ e $\mathbf{\Theta}$ satisfazem a seguinte relação:

$$\mathbf{M} \mathbf{\Theta} \mathbf{\Lambda}^2 + \mathbf{C} \mathbf{\Theta} \mathbf{\Lambda} + \mathbf{K} \mathbf{\Theta} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Tal como para os sistemas com amortecimento proporcional, os valores próprios λ_i relacionam-se com as frequências próprias angulares não amortecidas ω_i , e com os coeficientes de amortecimento modal ξ_i , através da relação (2.13).

As matrizes \mathbf{A}_s e \mathbf{B}_s são diagonalizadas pela matriz $\mathbf{\Psi}$, verificando-se portanto as seguintes relações:

$$\Psi^T A_s \Psi = [\lambda_i] \quad , \quad \Psi^T B_s \Psi = [b_i] \quad (2.21)$$

em que as matrizes diagonais $[\lambda_i]$ e $[b_i]$ são designadas, respectivamente por *matriz modal A* e *matriz modal B*. A matriz dos valores próprios Λ_c relaciona-se com estas duas matrizes através de:

$$\Lambda_c = [\lambda_i] = - \left[\frac{1}{a_i} \right] [b_i] \quad (2.22)$$

Exemplo: Para o sistema estrutural considerado para exemplo, apresentam-se em seguida as matrizes referidas nas relações (2.16), (2.18), (2.19) e (2.21). Note-se que a matriz de amortecimento viscoso que está a ser considerada é uma matriz de amortecimento proporcional, embora o maior interesse da formulação que envolve as matrizes apresentadas seja o facto de ser aplicável em sistemas com amortecimento não proporcional.

$$A_s = \begin{bmatrix} 7596 & -2313 & -242 & -105 & 1777 & 0 & 0 & 0 \\ -2313 & 6345 & -1886 & -310 & 0 & 1773 & 0 & 0 \\ -242 & -1886 & 5504 & -2120 & 0 & 0 & 1770 & 0 \\ -105 & -310 & -2120 & 3546 & 0 & 0 & 0 & 1712 \\ 1777 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1773 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1712 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_s = 10^3 \begin{bmatrix} 22202 & -11179 & 504 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11179 & 17359 & -7445 & 403 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 504 & -7445 & 13613 & -6651 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 403 & -6651 & 6216 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,777 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,773 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,770 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,712 \end{bmatrix}$$

Diagonal da matriz dos valores próprios

$$\text{diag}(\Lambda_c) = \left\{ \begin{bmatrix} -0,469 + 23,45j \\ -1,285 + 64,26j \\ -2,042 + 102,06j \\ -2,721 + 136,00j \\ -0,469 - 23,45j \\ -1,285 - 64,26j \\ -2,042 - 102,06j \\ -2,721 - 136,00j \end{bmatrix} \right\} \quad (2.14) \Rightarrow \quad \omega_i = \begin{bmatrix} 23,46 \\ 64,27 \\ 102,08 \\ 136,03 \end{bmatrix} [\text{rad.s}^{-1}] \quad f_i = \begin{bmatrix} 3,733 \\ 10,229 \\ 16,246 \\ 21,649 \end{bmatrix} [\text{Hz}] \quad \xi_i = \begin{bmatrix} 2,00 \\ 2,00 \\ 2,00 \\ 2,00 \end{bmatrix} [\%]$$

Matriz dos vectores próprios

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0,256 & 0,747 & -0,669 & 1,000 & 0,256 & 0,747 & -0,669 & 1,000 \\ 0,526 & 1,000 & -0,176 & -0,936 & 0,526 & 1,000 & -0,176 & -0,936 \\ 0,826 & 0,177 & 1,000 & 0,435 & 0,826 & 0,177 & 1,000 & 0,435 \\ 1,000 & -0,895 & -0,580 & -0,128 & 1,000 & -0,895 & -0,580 & -0,128 \\ -0,120 + 6,014j & -0,960 + 48,01j & 1,366 - 68,29j & -2,721 + 136,0j & -0,120 - 6,014j & -0,960 - 48,01j & 1,366 + 68,29j & -2,721 - 136,0j \\ -0,247 + 12,33j & -1,285 + 64,26j & 0,360 - 18,00j & 2,546 - 127,3j & -0,247 - 12,33j & -1,285 - 64,26j & 0,360 + 18,00j & 2,546 + 127,3j \\ -0,387 + 19,36j & -0,228 + 11,39j & -2,042 + 102,1j & -1,183 + 59,14j & -0,387 - 19,36j & -0,228 - 11,39j & -2,042 - 102,1j & -1,183 - 59,14j \\ -0,469 + 23,45j & 1,150 - 57,50j & 1,183 - 59,14j & 0,348 - 17,38j & -0,469 - 23,45j & 1,150 + 57,50j & 1,183 + 59,14j & 0,348 + 17,38j \end{bmatrix}$$

Diagonal da matriz modal A

$$a_i = 10^5 \begin{bmatrix} +1,653j \\ +5,387j \\ +6,523j \\ +10,047j \\ -1,653j \\ -5,387j \\ -6,523j \\ -10,047j \end{bmatrix}$$

Diagonal da matriz modal B

$$b_i = 10^7 \begin{bmatrix} 0,3877 + 0,0078j \\ 3,4615 + 0,0692j \\ 6,6569 + 0,1332j \\ 13,663 + 0,2733j \\ 0,3877 - 0,0078j \\ 3,4615 - 0,0692j \\ 6,6569 - 0,1332j \\ 13,663 - 0,2733j \end{bmatrix}$$

2.3 Representação de estado de sistemas no tempo contínuo

Na secção anterior, ao analisar os sistemas com amortecimento viscoso em geral, foi já necessário recorrer a um vector de estado $\mathbf{x}(t)$ (ver equação (2.16)) que contém os deslocamentos e as velocidades segundo os n graus de liberdade. A equação (2.17), então apresentada, é já uma equação de estado, no entanto, não está ainda na forma usualmente considerada no domínio da engenharia de sistemas de controlo (e portanto na forma que serve de base a alguns métodos de identificação modal estocástica, que serão apresentados e aplicados no capítulo 4). Para obter a equação de estado nessa forma, é ainda necessário introduzir algumas alterações, conforme se apresenta em seguida.

Equação de estado:

Por pré-multiplicação da equação (2.2) pela inversa da matriz de massa pode-se escrever:

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{z}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (2.23)$$

Considerando ainda a igualdade $\dot{\mathbf{z}}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t)$, obtém-se a equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \ddot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.24)$$

que escrita em notação mais compacta, resulta em:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (2.25)$$

em que: \mathbf{A}_c ($2n \times 2n$) é designada por matriz de estado, matriz do sistema ou matriz dinâmica;
 \mathbf{B}_c ($2n \times m$) é a matriz de entrada.

As matrizes \mathbf{A}_c e \mathbf{B}_c podem ser relacionadas com as matrizes \mathbf{A}_s e \mathbf{B}_s (2.16) através de:

$$\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}_s^{-1} \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{A}_s^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Considerando as relações (2.21), (2.22) e (2.26), pode-se verificar que:

$$\mathbf{A}_c = -\left((\mathbf{\Psi}^{-1})^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1} \right)^{-1} \left((\mathbf{\Psi}^{-1})^T \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1} \right) = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{\Psi}^{-1} \quad (2.27)$$

A equação (2.27) mostra que as matrizes $\mathbf{\Lambda}_c$ e $\mathbf{\Psi}$ contêm, respectivamente, os valores próprios e os vectores próprios da matriz de estado \mathbf{A}_c . Portanto, as características dinâmicas (frequências

naturais, coeficientes de amortecimento e modos de vibração) de um sistema estão de facto descritas na sua matriz de estado A_c .

Equação de observação:

Para além da equação de estado (2.25), que corresponde à equação (2.17) expressa duma maneira diferente, a representação de estado, utilizada em engenharia de sistemas de controlo, envolve uma segunda equação designada por equação de observação. Com esta 2ª equação associada à equação de estado, faz-se com que a representação de estado seja uma descrição do comportamento de entrada-resposta dum sistema. Essa equação constitui também, de certa forma, uma maneira de estabelecer uma ligação entre o modelo dum sistema, e as respostas que podem ser observadas (medidas) experimentalmente.

De facto, na observação experimental do comportamento dinâmico de estruturas, não é possível, em geral, medir a resposta em todos os n graus de liberdade que podem ser considerados num modelo analítico discretizado. Essa observação tem que restringir-se a um número de graus de liberdade menor do que n , podendo, em geral, incluir acelerações, velocidades ou deslocamentos. Considere-se então que as n_e respostas observadas, de um determinado sistema estrutural, são organizadas num vector de resposta $y(t)$ ($n_e \times 1$):

$$y(t) = C_a \ddot{z}(t) + C_v \dot{z}(t) + C_d z(t) \quad (2.28)$$

em que: C_a ($n_e \times n$), C_v ($n_e \times n$) e C_d ($n_e \times n$) são as matrizes de localização das respostas observadas, respectivamente, para acelerações, velocidades e deslocamentos; estas matrizes são constituídas por zeros (0) ou uns (1), especificando os graus de liberdade observados.

Considerando a equação (2.2) e a definição do vector de estado (2.16), a expressão (2.28) pode ser transformada na seguinte expressão designada por equação de observação:

$$y(t) = C_c x(t) + D_c u(t) \quad (2.29)$$

em que: C_c ($n_e \times 2n$) é a matriz de resposta;
 D_c ($n_e \times m$) é a matriz de transmissão directa;
 sendo estas duas matrizes dadas por:

$$C_c = \left[(C_d - C_a M^{-1} K) \quad (C_v - C_a M^{-1} C_2) \right] \quad , \quad D_c = C_a M^{-1} B_2 \quad (2.30)$$

que, no caso de se observarem apenas acelerações (a situação mais comum em ensaios dinâmicos de estruturas), podem ser simplificadas para:

$$C_c = \begin{bmatrix} -C_a M^{-1} K & (-C_a M^{-1} C_2) \end{bmatrix}, \quad D_c = C_a M^{-1} B_2 \quad (2.31)$$

Representação de estado:

A representação de estado dum sistema no tempo contínuo é portanto expressa através da equação de estado (2.25) e da equação de observação (2.29), indicadas novamente em seguida, e de que se apresenta, na figura 2.4, uma descrição gráfica através dum diagrama de blocos (Carvalho, 1989; Ribeiro, 2002).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

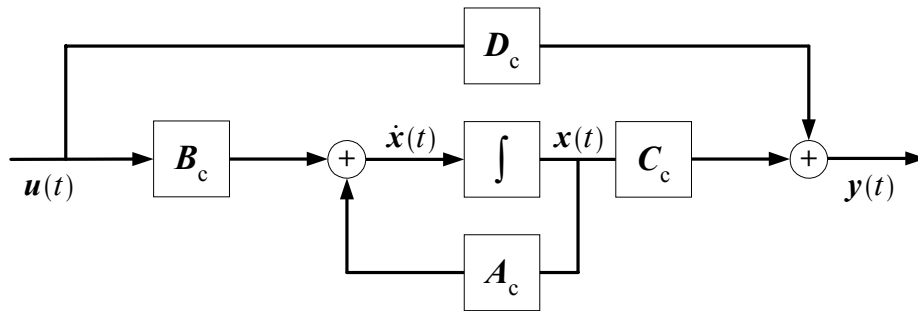


Figura 2.4 – Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema no tempo contínuo.

Exemplo: Para o sistema estrutural considerado para exemplo, apresentam-se em seguida as matrizes da representação de estado (2.32). São consideradas duas situações, ilustradas na figura 2.5, em que o sistema é actuado em todos os graus de liberdade; na primeira situação observa-se a resposta em aceleração segundo os quatro graus de liberdade, no segundo caso observa-se apenas a resposta em aceleração no piso superior.

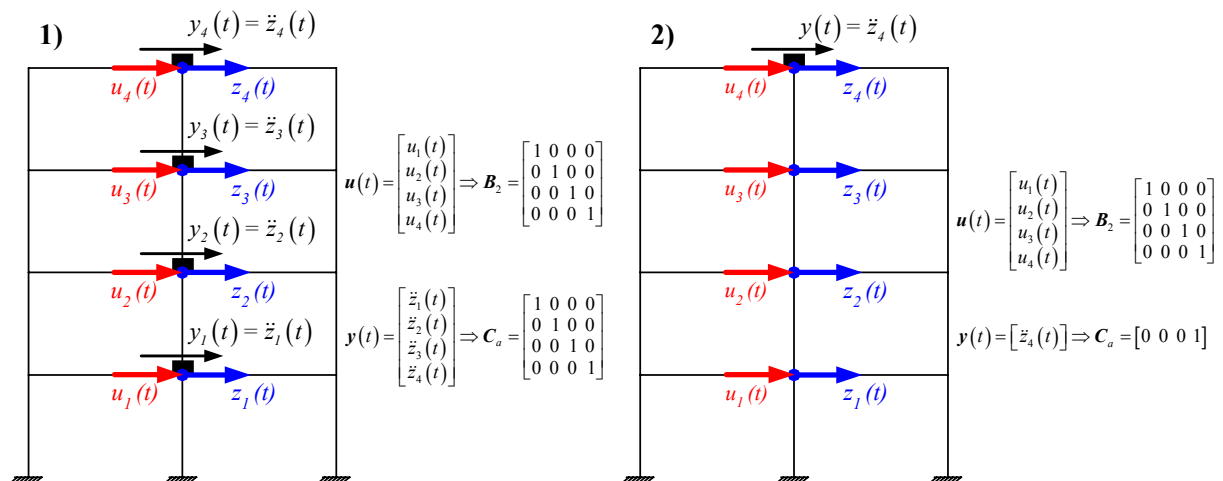


Figura 2.5 – Situações consideradas para exemplificar a formulação de estado.

As matrizes de estado A_c e as matrizes de entrada B_c são idênticas nas duas situações consideradas, uma vez que não há qualquer diferença nem no sistema nem nas forças que sobre ele actuam.

Matriz de estado

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12493 & 6291 & -283,7 & -9,33 & -4,274 & 1,302 & 0,136 & 0,059 \\ 6303 & -9788 & 4198 & -227,1 & 1,304 & -3,577 & 1,063 & 0,175 \\ -284,9 & 4206 & -7691 & 3757 & 0,136 & 1,065 & -3,110 & 1,198 \\ -9,69 & -235,3 & 3886 & -3632 & 0,061 & 0,181 & 1,239 & -2,072 \end{bmatrix}$$

Matriz de entrada

$$B_c = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 562,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 563,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 584,3 \end{bmatrix}$$

Quanto às matrizes de resposta C_c e às matrizes de transmissão directa D_c , já há diferenças nas duas situações consideradas, uma vez que há uma alteração nos graus de liberdade que são observados.

Situação 1)

Matriz de resposta

$$C_c = \begin{bmatrix} -12493 & 6291 & -283,7 & -9,33 & -4,274 & 1,302 & 0,136 & 0,059 \\ 6303 & -9788 & 4198 & -227,1 & 1,304 & -3,577 & 1,063 & 0,175 \\ -284,9 & 4206 & -7691 & 3757 & 0,136 & 1,065 & -3,110 & 1,198 \\ -9,69 & -235,3 & 3886 & -3632 & 0,061 & 0,181 & 1,239 & -2,072 \end{bmatrix}$$

Matriz de transmissão directa

$$D_c = 10^{-6} \begin{bmatrix} 562,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 563,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 584,3 \end{bmatrix}$$

Situação 2)

Matriz de resposta

$$C_c = [-9,69 \ -235,3 \ 3886 \ -3632 \ 0,061 \ 0,181 \ 1,239 \ -2,072]$$

Matriz de transmissão directa

$$D_c = 10^{-6} [0 \ 0 \ 0 \ 584,3]$$

Transformação de coordenadas e decomposição modal:

O vector de estado $x(t)$ foi até agora considerado como sendo formado pelos deslocamentos e velocidades segundo os n graus de liberdade dum sistema. Esse não é o único vector de estado possível, podendo-se representar um mesmo sistema através de inúmeros vectores de estado (Ribeiro, 2002). As alterações do vector de estado considerado, correspondem também alterações das matrizes da representação de estado dum sistema. Podem-se estabelecer relações entre cada representação de estado dum sistema, através de transformações de coordenadas traduzidas em matrizes T ($2n \times 2n$) não singulares. Um novo vector de estado $\tilde{x}(t)$ pode então ser definido de modo que:

$$x(t) = T \tilde{x}(t) \quad (2.33)$$

Considerando o novo vector de estado $\tilde{x}(t)$, as equações (2.32) transformam-se em:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}_c \tilde{x}(t) + \tilde{B}_c u(t) \\ y(t) &= \tilde{C}_c \tilde{x}(t) + \tilde{D}_c u(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

em que as matrizes \tilde{A}_c ($2n \times 2n$), \tilde{B}_c ($2n \times m$), \tilde{C}_c ($n_e \times 2n$) e \tilde{D}_c ($n_e \times m$) são dadas por:

$$\tilde{A}_c = T^{-1} A_c T, \quad \tilde{B}_c = T^{-1} B_c, \quad \tilde{C}_c = C_c T, \quad \tilde{D}_c = D_c \quad (2.35)$$

Uma transformação de coordenadas que pode ser definida, com evidentes vantagens em termos da forma em que se obtêm as matrizes da representação de estado, é a que corresponde a considerar um vector de estado $\mathbf{x}_m(t)$ expresso em termos de coordenadas modais. Nesse caso a matriz de transformação T coincide com a matriz modal Ψ , ou seja:

$$\mathbf{x}(t) = \Psi \mathbf{x}_m(t) \quad (2.36)$$

Considerando as expressões (2.34), (2.35), (2.36) e a decomposição modal (2.27) da matriz de estado, pode-se verificar que a representação de estado em termos de coordenadas modais pode ser expressa através de:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_m(t) &= \Lambda_c \mathbf{x}_m(t) + L_c^T \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= V_c \mathbf{x}_m(t) + D_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

em que: L_c^T ($2n \times m$) é a matriz de entrada modal, normalmente designada por matriz dos factores de participação modal;

V_c ($n_e \times 2n$) é a matriz de resposta modal, que representa a parte dos modos de vibração que pode ser observada na resposta;

sendo estas duas matrizes dadas por:

$$L_c^T = \Psi^{-1} B_c, \quad V_c = C_c \Psi \quad (2.38)$$

Uma representação de estado em que a matriz de estado é uma matriz diagonal (como é o caso de (2.37) expressa em termos de coordenadas modais) é denominada representação de estado na forma diagonal ou na forma canónica de Jordan (Ribeiro, 2002). O interesse neste tipo de representação está no facto da matriz Λ_c ter uma estrutura diagonal, o que permite desacoplar as contribuições dos diferentes modos para a resposta total dum sistema.

Na representação (2.37), a matriz de transmissão directa não está decomposta em termos de contribuições modais, ao contrário das outras matrizes da representação de estado. Pode-se verificar (Peeters, 2000) que a decomposição modal dessa matriz pode ser obtida através de:

$$D_c = V_c \Lambda_c^{-1} L_c^T = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\lambda_i} [\mathbf{v}_{ci}] [\mathbf{l}_{ci}]^T \quad (2.39)$$

em que: $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} (n_e \times I)$ é a i -ésima coluna da matriz \mathbf{V}_c ;

$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci} \end{bmatrix}^T (I \times m)$ é a i -ésima linha da matriz \mathbf{L}_c^T .

A resposta total dum sistema pode ser considerada como dada por:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{y}_i(t) \quad (2.40)$$

em que: $\mathbf{y}_i(t)$ ($n_e \times I$) é a contribuição do modo i para a resposta total, que resulta da seguinte representação de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{mi}(t) &= \lambda_i \mathbf{x}_{mi}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci} \end{bmatrix}^T \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_i(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{mi}(t) + \frac{1}{\lambda_i} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci} \end{bmatrix}^T \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

em que: $\mathbf{x}_{mi}(t)$ é a i -ésima componente do vector de estado expresso em termos de coordenadas modais.

Exemplo: Para o sistema estrutural considerado para exemplo, apresentam-se em seguida as matrizes da representação de estado (2.37) em termos de coordenadas modais, apenas para a primeira situação da figura 2.5.

Diagonal da matriz dos valores próprios

$$\text{diag}(\underbrace{\Psi^{-1} \mathbf{A}_c \Psi}_{\mathbf{\Lambda}_c}) = \begin{bmatrix} -0,469 + 23,45j \\ -1,285 + 64,26j \\ -2,042 + 102,06j \\ -2,721 + 136,00j \\ -0,469 - 23,45j \\ -1,285 - 64,26j \\ -2,042 - 102,06j \\ -2,721 - 136,00j \end{bmatrix}$$

Matriz de entrada modal

$$\mathbf{L}_c^T = 10^{-6} \begin{bmatrix} -1,551j & -3,179j & +4,994j & -6,049j \\ -1,387j & -1,856j & -0,329j & +1,661j \\ +1,026j & +0,270j & -1,533j & +0,888j \\ -0,995j & +0,932j & -0,433j & +0,127j \\ +1,551j & +3,179j & -4,994j & +6,049j \\ +1,387j & +1,856j & +0,329j & -1,661j \\ -1,026j & -0,270j & +1,533j & -0,888j \\ +0,995j & -0,932j & +0,433j & -0,127j \end{bmatrix}$$

Matriz de resposta modal

$$\mathbf{V}_c = \begin{bmatrix} -141,0-5,642j & -3084-123,4j & 6967+278,8j & -18488-740,0j & -141,0+5,642j & -3084+123,4j & 6967-278,8j & -18488+740,0j \\ -288,9-11,56j & -4127-165,2j & 1836+73,48j & 17305+692,6j & -288,9+11,56j & -4127+165,2j & 1836-73,48j & 17305-692,6j \\ -453,9-18,17j & -731,6-29,28j & -10411-416,7j & -8040-321,8j & -453,9+18,17j & -731,6+29,28j & -10411+416,7j & -8040+321,8j \\ -549,8-22,00j & 3693+147,8j & 6034+241,5j & 2363+94,56j & -549,8+22,00j & 3693-147,8j & 6034-241,5j & 2363-94,56j \end{bmatrix}$$

Redução de modelos:

A identificação modal que pode ser efectuada por análise da informação obtida em ensaios dinâmicos de estruturas é sempre limitada em termos de banda de frequências, não sendo possível identificar as características de todos os modos que se conseguem calcular com modelos analíticos. Tal deve-se às limitações dos transdutores e sistemas de aquisição, às características da excitação (o

que tem maior importância no caso de ensaios em que essa excitação é a existente na situação de funcionamento normal das estruturas) e também à maior densidade modal nas altas frequências, o que dificulta a identificação experimental dos modos de ordem mais elevada (Maia *et al.*, 1998). Compreende-se assim, que tenha interesse efectuar a redução de modelos, ou seja limitar também o número de modos considerados nos modelos analíticos.

A representação de estado expressa em termos de coordenadas modais (2.37) permite utilizar uma forma de efectuar a redução de modelos (Peeters, 2000). Considere-se então que o vector de estado é subdividido no vector $\mathbf{x}_r(t)$ ($2r \times 1$) correspondente aos r modos a reter no modelo reduzido, e no vector $\mathbf{x}_e(t)$ ($2(n-r) \times 1$) relativo aos $n-r$ modos a eliminar. A representação de estado pode então ser expressa através de:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_r(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{cr} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{cr}^T \\ \mathbf{L}_{ce}^T \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{cr} & \mathbf{V}_{ce} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_r(t) \\ \mathbf{x}_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t)$$
(2.42)

A redução do modelo é obtida considerando na equação de estado que $\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{0}$, e substituindo a expressão resultante para $\mathbf{x}_e(t)$ na equação de observação. Obtém-se assim a representação de estado do modelo reduzido:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_r(t) &= \Lambda_{cr} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{L}_{cr}^T \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{V}_{cr} \mathbf{x}_r(t) + \mathbf{D}_{cr} \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$
(2.43)

em que a matriz de transmissão directa \mathbf{D}_{cr} do modelo reduzido é dada por:

$$\mathbf{D}_{cr} = \mathbf{D}_c - \mathbf{V}_{ce} \Lambda_{ce}^{-1} \mathbf{L}_{ce}^T = \mathbf{V}_{cr} \Lambda_{cr}^{-1} \mathbf{L}_{cr}^T$$
(2.44)

Representação de estado de sistemas com amortecimento proporcional:

Na exposição até agora efectuada, verificou-se que a representação de estado (2.32) constitui uma forma adequada de formular o comportamento dinâmico de sistemas com amortecimento viscoso em geral. Analisa-se agora a forma das matrizes da formulação de estado, na situação particular de sistemas com amortecimento proporcional. Note-se que, como se verificou em 2.2, nesse caso não seria necessário recorrer a vectores de estado e à formulação de estado, no entanto considera-se que tem interesse analisar essa situação particular, conforme se apresenta em seguida.

Na situação de amortecimento proporcional, os modos de vibração de um sistema são designados por modos normais. Para obter a representação de estado expressa em termos de coordenadas modais normais, pode-se utilizar uma transformação de coordenadas em que a matriz de transformação é constituída pelos vectores modais normais, tal como se indica em seguida:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}_n \mathbf{x}_{mn}(t) \quad , \quad \mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

O vector de estado expresso em termos de coordenadas modais normais $\mathbf{x}_{mn}(t)$ é constituído pelos deslocamentos e velocidades modais. A correspondente representação de estado é:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{mn}(t) &= \mathbf{A}_{cn} \mathbf{x}_{mn}(t) + \mathbf{B}_{cn} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{cn} \mathbf{x}_{mn}(t) + \mathbf{D}_{cn} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Tendo em conta as relações (2.35), pode-se verificar que as matrizes \mathbf{A}_{cn} ($2n \times 2n$), \mathbf{B}_{cn} ($2n \times m$), \mathbf{C}_{cn} ($n_e \times 2n$) e \mathbf{D}_{cn} ($n_e \times m$) são dadas por:

$$\mathbf{A}_{cn} = \mathbf{T}_n^{-1} \mathbf{A}_c \mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega^2 & -\Gamma \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{B}_{cn} = \mathbf{T}_n^{-1} \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left[\backslash 1/m_i \backslash \right] \Phi^T \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{C}_{cn} = \mathbf{C}_c \mathbf{T}_n = \left[\left(\mathbf{C}_d \Phi - \mathbf{C}_a \Phi \Omega^2 \right) \quad \left(\mathbf{C}_v \Phi - \mathbf{C}_a \Phi \Gamma \right) \right] \quad (2.49)$$

$$\mathbf{D}_{cn} = \mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \Phi \left[\backslash 1/m_i \backslash \right] \Phi^T \mathbf{B}_2 \quad (2.50)$$

Tem também interesse estabelecer uma relação entre a representação de estado (2.46) expressa em termos de coordenadas modais normais e a representação de estado (2.37) expressa em termos de coordenadas modais gerais (complexas). Essa relação pode ser expressa através duma matriz de transformação \mathbf{T}_c e da sua inversa \mathbf{T}_c^{-1} , que relacionam os vectores de estado $\mathbf{x}_{mn}(t)$ e $\mathbf{x}_m(t)$, tal como se indica nas duas expressões seguintes:

$$\mathbf{x}_{mn}(t) = \mathbf{T}_c \mathbf{x}_m(t) \quad , \quad \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \Lambda & \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{x}_{mn}(t) \quad , \quad \mathbf{T}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)^{-1} \mathbf{\Lambda}^* & (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)^{-1} \\ (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)^{-1} \mathbf{\Lambda} & -(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{\Lambda}^*)^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

2.4 Funções de caracterização da resposta de sistemas no tempo contínuo

Na apresentação até agora efectuada, as características dos sistemas estruturais foram expressas através de matrizes e vectores que correspondem a uma discretização espacial das suas propriedades mecânicas (como é o caso das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C}_2 e \mathbf{K} ou, no espaço de estado, \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c e \mathbf{D}_c) ou que traduzem relações entre essas propriedades (como é o caso das matrizes $\mathbf{\Lambda}_c$ e $\mathbf{\Psi}$ com as características dinâmicas dos sistemas). Os sistemas estruturais podem também ser descritos por intermédio de funções que caracterizam a sua resposta, nomeadamente as funções de resposta em frequência, ou as funções de resposta impulsiva no domínio do tempo. Essas funções podem ser designadas por modelos de resposta dos sistemas (Maia *et al.*, 1998; Ewins, 2000) uma vez que os caracterizam através da descrição da sua resposta.

Para este trabalho, o interesse em analisar as funções de caracterização da resposta dos sistemas está no facto de que experimentalmente são elas que são avaliadas, iniciando-se a identificação modal pela análise dessas funções experimentais.

A informação que é obtida directamente em ensaios dinâmicos de estruturas consiste, normalmente, nas séries temporais da resposta e, eventualmente, também das forças de excitação (no caso de ensaios com controlo e medição dessas forças). A transformação dessas séries para o domínio da frequência permite observar algumas das características dinâmicas das estruturas, servindo por isso de base a vários métodos de identificação modal, nomeadamente, ao primeiro método que será abordado no capítulo 4.

A análise da informação obtida em ensaios dinâmicos, através da sua representação no domínio da frequência, passou a ter maior utilização com o desenvolvimento do algoritmo da transformada rápida de *Fourier*, FFT (Cooley e Tukey, 1965), que implementa, numa forma eficiente, o cálculo da transformada discreta finita de *Fourier*, pois é nesta operação matemática que se baseia a transformação das séries temporais para o domínio da frequência.

No âmbito dos objectivos deste capítulo, importa demonstrar qual a representação no domínio da frequência dos modelos analíticos do comportamento dinâmico de sistemas estruturais. Tal será efectuado partindo da representação de estado (2.32), que se mostrou ser uma forma adequada de formular o comportamento dinâmico de sistemas com amortecimento viscoso em geral. Procura-se assim salientar que as características, que se podem observar nas representações no domínio da

frequência das séries temporais registadas experimentalmente, estão de facto relacionadas com as características dos sistemas, nomeadamente, com as suas características modais.

Para além das funções de caracterização da resposta no domínio da frequência, apresentar-se-á também a forma analítica das funções de resposta impulsiva, que descrevem a resposta dos sistemas no domínio do tempo, a entradas de tipo impulso unitário.

Funções de transferência:

Admitindo condições iniciais nulas (deslocamentos e velocidades iniciais iguais a zero), através da aplicação da transformada de *Laplace* à representação de estado (2.32) obtém-se:

$$\begin{aligned} s \mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}_c \mathbf{X}(s) + \mathbf{B}_c \mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}_c \mathbf{X}(s) + \mathbf{D}_c \mathbf{U}(s) \end{aligned} \quad (2.53)$$

em que: $\mathbf{X}(s)$, $\mathbf{U}(s)$ e $\mathbf{Y}(s)$ são as transformadas de *Laplace* de $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$;
 s é designada por variável de *Laplace* (variável complexa, $s = \sigma + j\omega$).

Utilizando a equação de estado em (2.53) para obter $\mathbf{X}(s)$ e substituindo na equação de observação, obtém-se a seguinte relação de excitação - resposta:

$$\mathbf{Y}(s) = \left(\mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \right) \mathbf{U}(s) = \mathbf{H}_c(s) \mathbf{U}(s) \quad (2.54)$$

em que $\mathbf{H}_c(s)$ é a matriz de funções de transferência do sistema, definida por:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (2.55)$$

Considerando a decomposição modal da matriz \mathbf{A}_c (2.27) e as relações (2.38), onde se define a matriz dos factores de participação modal \mathbf{L}_c^T e a matriz de resposta modal \mathbf{V}_c , também se pode aplicar uma decomposição modal à expressão (2.55), obtendo-se:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{V}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T + \mathbf{D}_c \quad (2.56)$$

No caso de se observarem apenas deslocamentos, a matriz de transmissão directa é nula ($\mathbf{D}_c = \mathbf{0}$) e portanto a expressão (2.56) pode ser simplificada para:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{V}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \quad (2.57)$$

Na situação de se observarem apenas acelerações, tendo em conta a decomposição modal da matriz de transmissão directa, ver expressão (2.39), a matriz de funções de transferência (2.56) pode ser escrita através de:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{V}_c s \mathbf{\Lambda}_c^{-1} (s \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \quad (2.58)$$

Pode-se ainda verificar (Peeters, 2000) que a expressão (2.58) da matriz de funções de transferência em aceleração pode ser transformada em:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{V}_c \mathbf{\Lambda}_c^{-2} s^2 (s \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \quad (2.59)$$

As expressões (2.57) e (2.59) podem ser escritas noutras formas, mais utilizadas no domínio da análise modal experimental com controlo e medição das forças de excitação (Heylen *et al.*, 1997; Maia *et al.*, 1998; Allemang, 1999; Ewins, 2000), em que se torna mais clara a contribuição de cada modo do sistema para as suas funções de transferência. A matriz de funções de transferência em deslocamento pode assim ser expressa através de:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{C}_d \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{Re}_i}{s - \lambda_i} + \frac{\mathbf{Re}_i^*}{s - \lambda_i^*} \right) \mathbf{B}_2 \quad (2.60)$$

e a matriz de funções de transferência em aceleração através de:

$$\mathbf{H}_c(s) = \mathbf{C}_a \sum_{i=1}^n \left(\frac{s^2 \mathbf{Re}_i}{s - \lambda_i} + \frac{s^2 \mathbf{Re}_i^*}{s - \lambda_i^*} \right) \mathbf{B}_2 \quad (2.61)$$

em que: $\mathbf{Re}_i (n \times n)$ são os denominados resíduos correspondentes ao modo i , que são dados por:

$$\mathbf{Re}_i = \frac{[\boldsymbol{\theta}_i][\boldsymbol{\theta}_i]^T}{a_i} \quad (2.62)$$

em que: $[\boldsymbol{\theta}_i] (n \times 1)$ é a i -ésima coluna da matriz $\boldsymbol{\Theta}$, ver expressão (2.19), ou seja é um vector próprio do sistema;

a_i são os elementos da *matriz modal* A , ver expressão (2.21).

Nas expressões (2.60) e (2.61) os termos abrangidos pelo somatório correspondem à matriz de transferência completa, envolvendo todos os n graus de liberdade dum sistema discretizado. Através da pré-multiplicação por \mathbf{C}_d ou \mathbf{C}_a e da pós-multiplicação por \mathbf{B}_2 , seleccionam-se apenas os graus de liberdade observados e aqueles em que é aplicada a excitação.

Exemplo: Para o sistema estrutural considerado para exemplo, representa-se na figura 2.6 uma parte da superfície da amplitude da função de transferência em aceleração $H_c[1,1]$ definida no plano da variável complexa s . Esta função de transferência foi calculada através da expressão (2.58).

Na figura 2.6, no plano de amplitude 10^{-6} mg/N indica-se também a localização dos pólos (valores próprios) do sistema. Salienta-se ainda a traço negro a linha de intersecção do plano em que $Real(s) = 0$ com a superfície da função de transferência; conforme se indicará em seguida, essa linha corresponde à função de resposta em frequência do sistema.

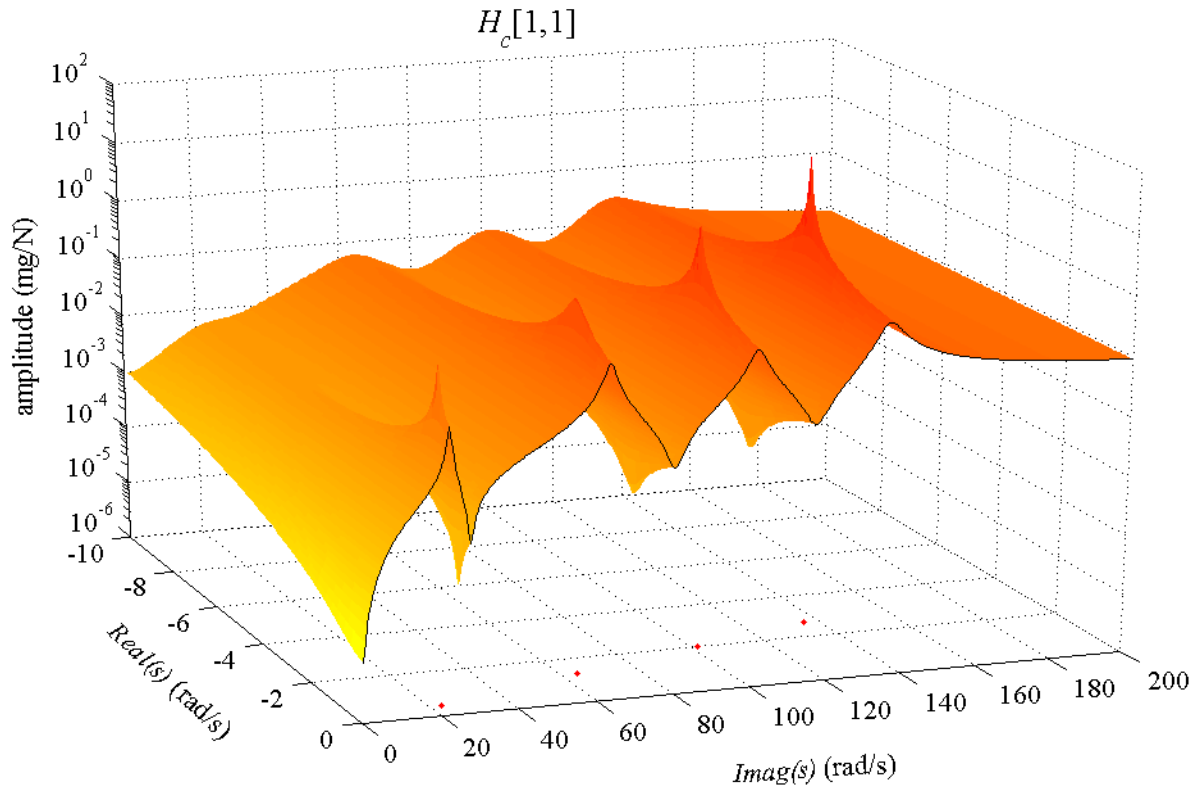


Figura 2.6 – Amplitude da função de transferência em aceleração $H_c[1,1]$ do sistema considerado para exemplo.

Funções de resposta em frequência:

As funções de resposta em frequência (FRF) têm um maior interesse sob um ponto de vista da análise modal experimental, uma vez que são essas funções que é possível avaliar experimentalmente (no caso de ensaios com controlo e medição das forças de excitação) e não as funções de transferência.

A matriz de FRF pode ser definida através da matriz de funções de transferência restringida a valores imaginários da variável de Laplace ($s = j\omega$), resultando portanto numa matriz de funções no domínio da frequência ω , que pode ser expressa através de:

$$H_c(\omega) = C_c (j\omega I - A_c)^{-1} B_c + D_c \quad (2.63)$$

ou, de forma equivalente, através de:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \mathbf{V}_c (\mathbf{j} \omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T + \mathbf{D}_c \quad (2.64)$$

No caso de se observarem apenas deslocamentos, a expressão (2.64) transforma-se em:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \mathbf{V}_c (\mathbf{j} \omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \quad (2.65)$$

Na situação de se observarem apenas acelerações, a FRF (2.64) pode ser escrita através de:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \mathbf{V}_c \mathbf{\Lambda}_c^{-2} (\mathbf{j} \omega)^2 (\mathbf{j} \omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \quad (2.66)$$

Tal como para as funções de transferência, as expressões (2.65) e (2.66) podem ser escritas noutras formas, em que se realça melhor a contribuição de cada modo do sistema para a matriz de FRF. Assim, no caso da resposta observada ser constituída por deslocamentos, a matriz de FRF, que neste caso também é designada por receptância (Maia *et al.*, 1998), pode ser expressa através de:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \mathbf{C}_d \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathbf{R}e_i}{\mathbf{j} \omega - \lambda_i} + \frac{\mathbf{R}e_i^*}{\mathbf{j} \omega - \lambda_i^*} \right) \mathbf{B}_2 \quad (2.67)$$

Se a resposta observada for constituída por acelerações, a matriz de FRF, que neste caso também é designada por inertância ou acelerância (Maia *et al.*, 1998), pode ser expressa através de:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \mathbf{C}_a \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega^2 \mathbf{R}e_i}{\mathbf{j} \omega - \lambda_i} + \frac{\omega^2 \mathbf{R}e_i^*}{\mathbf{j} \omega - \lambda_i^*} \right) \mathbf{B}_2 \quad (2.68)$$

No caso dos ensaios com controlo e medição das forças de excitação, as FRF podem ser avaliadas aplicando técnicas não-paramétricas de processamento de sinal, nomeadamente o algoritmo da transformada rápida de *Fourier* (FFT), às séries temporais das forças de excitação e das respostas do sistema. Muitos métodos de identificação modal utilizados nessa situação consistem pois no ajuste das expressões analíticas (2.67) ou (2.68) às FRF obtidas por via experimental.

Exemplo: Na figura 2.7 representa-se uma parte da amplitude e fase de toda a matriz de funções de resposta em frequência em aceleração, do sistema estrutural considerado para exemplo. Estas funções de resposta em frequência foram calculadas através da expressão (2.66).

Na figura 2.8 representa-se uma parte da amplitude e fase da função de resposta em frequência em aceleração $H_c[1,1]$. Nessa figura indicam-se também as contribuições de cada um dos quatro modos de vibração do sistema, para a FRF total, e ainda as frequências onde se verificam os picos da amplitude da FRF representada.

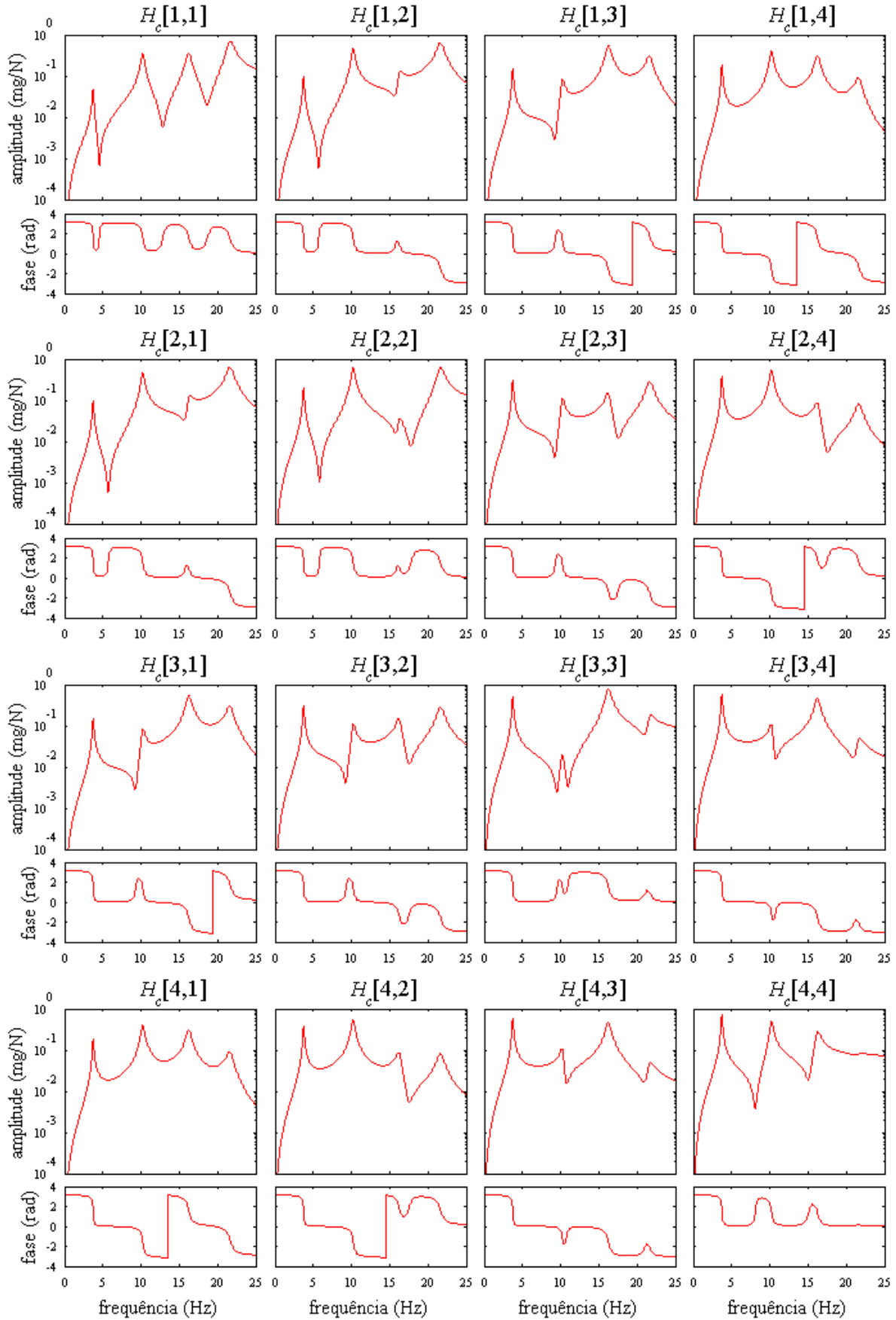


Figura 2.7 – Amplitude e fase das FRF em aceleração do sistema considerado para exemplo.

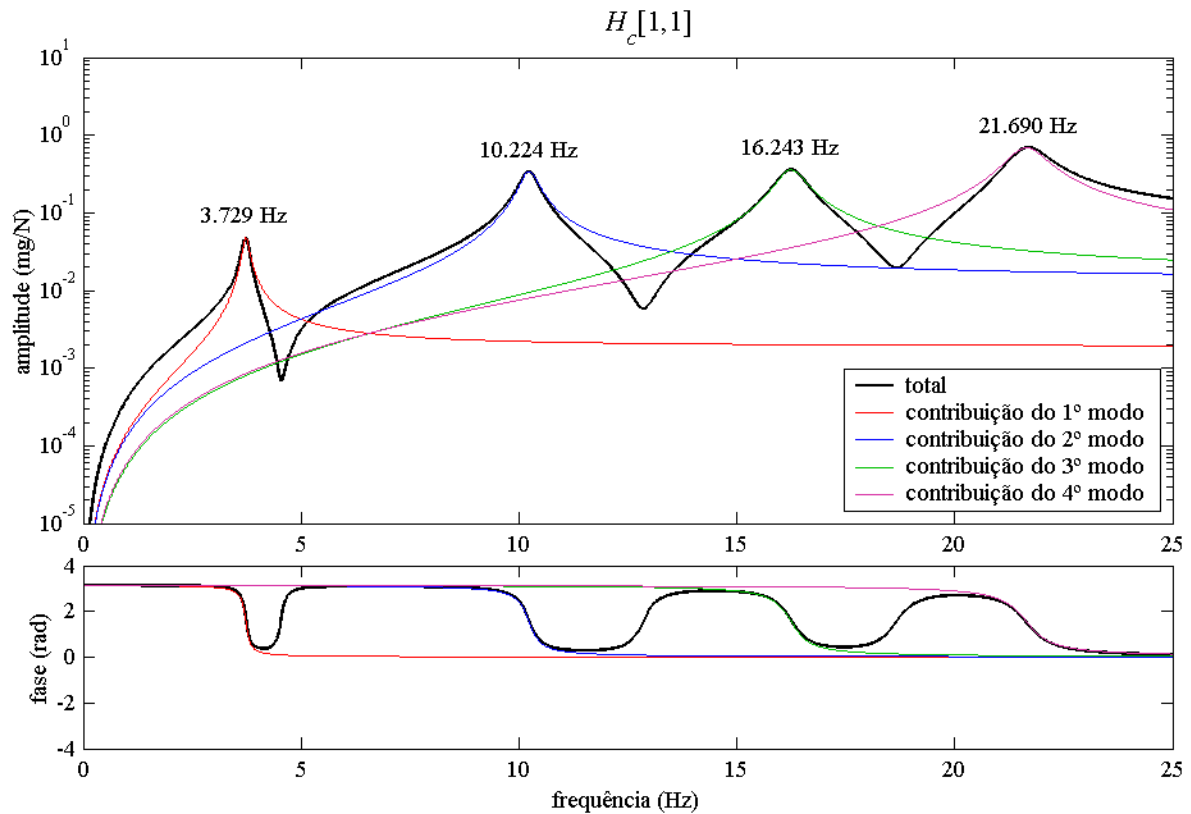


Figura 2.8 – Amplitude e fase da FRF em aceleração $H_c[1,1]$ do sistema considerado para exemplo.

Na figura 2.8, pode-se verificar que na vizinhança dos picos da amplitude da FRF, a resposta do sistema é dominada por um dos modos de vibração, havendo no entanto alguma contribuição dos restantes modos, efeito este que seria superior se as frequências dos modos fossem mais próximas e se o amortecimento fosse maior.

Devido ao facto do sistema ser amortecido, as frequências indicadas na figura 2.8 que correspondem aos picos da amplitude da FRF, não coincidem exactamente com as suas frequências naturais não amortecidas, no entanto são-lhes muito próximas.

Em sistemas de um grau de liberdade, com frequência própria angular não amortecida ω_n e coeficiente de amortecimento ξ , os máximos da amplitude da FRF verificam-se para frequências ω_p com valores de:

- $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$, para a FRF em deslocamento;
- $\omega_p = \omega_n$, para a FRF em velocidade;
- $\omega_p = \omega_n / \sqrt{1 - 2\xi^2}$, para a FRF em aceleração.

Em sistemas com vários graus de liberdade, a soma da contribuição dos diferentes modos, também introduz uma ligeira diferença adicional entre as frequências onde se verificam os picos da amplitude da FRF total, e as frequências naturais não amortecidas. No entanto, para os valores usuais do amortecimento de estruturas ($\xi < 10\%$) é razoável considerar que os picos da amplitude das FRF, verificam-se nas frequências naturais das estruturas, embora não se deva deixar de ter em conta que tal não é exacto.

Funções de densidade espectral da resposta de um sistema:

Dada a sua importância para a identificação modal estocástica, tem grande interesse para este trabalho, analisar a representação analítica das funções de densidade espectral da resposta de um sistema sujeito a uma entrada $\mathbf{u}(t)$ que não é conhecida numa forma determinística, mas que pode ser considerada como um processo estocástico caracterizado por determinadas propriedades estatísticas.

Considere-se então que a entrada $\mathbf{u}(t)$ é um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco com média nula $E[\mathbf{u}(t)] = 0$. A matriz de funções de covariância $\mathbf{\Pi}_u(\tau)$ desse processo é dada por (Peeters, 2000):

$$\mathbf{\Pi}_u(\tau) = E[\mathbf{u}(t+\tau) \mathbf{u}^T(t)] = \mathbf{\Pi}_u \delta(\tau) \quad (2.69)$$

em que: $\mathbf{\Pi}_u(m \times m)$ é uma matriz de valores constantes;

$\delta(\tau)$ é a função delta de Dirac.

A matriz de funções de densidade espectral $\mathbf{S}_u(\omega)$ do processo estocástico de entrada $\mathbf{u}(t)$ pode ser definida (Bendat e Piersol, 2000) considerando as relações de Wiener-Khinchine, através da transformada de *Fourier* da sua matriz de funções de covariância $\mathbf{\Pi}_u(\tau)$, ou seja:

$$\mathbf{S}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Pi}_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathbf{\Pi}_u \quad (2.70)$$

Num sistema com matriz de funções de resposta em frequência $\mathbf{H}_c(\omega)$, a matriz de funções de densidade espectral da resposta $\mathbf{S}_y(\omega)$ relaciona-se com a matriz de funções de densidade espectral da entrada $\mathbf{S}_u(\omega)$, através da seguinte expressão (Bendat e Piersol, 2000):

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}_c(\omega) \mathbf{S}_u(\omega) (\mathbf{H}_c^*)^T(\omega) \quad (2.71)$$

No caso da entrada $\mathbf{u}(t)$ ser um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco com média nula, a expressão (2.71) pode ser simplificada para:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}_c(\omega) \mathbf{\Pi}_u (\mathbf{H}_c^*)^T(\omega) \quad (2.72)$$

Considerando a relação (2.64), a expressão (2.72) resulta em:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \left(\mathbf{V}_c (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T + \mathbf{D}_c \right) \mathbf{\Pi}_u \left(\left(\mathbf{V}_c (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T + \mathbf{D}_c \right)^* \right)^T \quad (2.73)$$

No caso de se observarem apenas deslocamentos, a matriz de funções de densidade espectral simplifica-se para:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \left(\mathbf{V}_c (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \right) \mathbf{\Pi}_u \left(\left(\mathbf{V}_c (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \right)^* \right)^T \quad (2.74)$$

Na situação de se observarem apenas acelerações, a matriz de funções de densidade espectral pode ser escrita através de:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \left(\mathbf{V}_c \mathbf{\Lambda}_c^{-2} (j\omega)^2 (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \right) \mathbf{\Pi}_u \left(\left(\mathbf{V}_c \mathbf{\Lambda}_c^{-2} (j\omega)^2 (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c)^{-1} \mathbf{L}_c^T \right)^* \right)^T \quad (2.75)$$

As equações (2.74) e (2.75) podem ainda ser apresentadas noutras formas, em que se evidencia melhor a contribuição de cada modo do sistema para a matriz de funções de densidade espectral da resposta. Assim, na situação de se observarem apenas deslocamentos, a matriz de funções de densidade espectral da resposta pode ser expressa através de (Peeters, 2000):

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{[\mathbf{v}_{ci}][\mathbf{g}_{ci}]^T}{j\omega - \lambda_i} + \frac{[\mathbf{v}_{ci}^*][\mathbf{g}_{ci}^*]^T}{j\omega - \lambda_i^*} + \frac{[\mathbf{g}_{ci}][\mathbf{v}_{ci}]^T}{-j\omega - \lambda_i} + \frac{[\mathbf{g}_{ci}^*][\mathbf{v}_{ci}^*]^T}{-j\omega - \lambda_i^*} \right) \quad (2.76)$$

em que: $[\mathbf{g}_{ci}]^T$ ($1 \times n_e$) é a i -ésima linha da matriz $\mathbf{G}_{c,m}$ que é designada por matriz de participação modal estocástica para sistemas no tempo contínuo; $[\mathbf{g}_{ci}]^T$ pode ser avaliada através de:

$$[\mathbf{g}_{ci}]^T = \frac{1}{a_i} [\boldsymbol{\theta}_i]^T \mathbf{B}_2 \mathbf{\Pi}_u \mathbf{B}_2^T \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbf{R}e_k}{\lambda_i - \lambda_k} + \frac{\mathbf{R}e_k^*}{-\lambda_i - \lambda_k^*} \right) \mathbf{C}_d^T \quad (2.77)$$

No caso de se observarem apenas acelerações, a matriz de funções de densidade espectral da resposta pode ser expressa através de:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega^4 [\mathbf{v}_{ci}][\mathbf{g}_{ci}]^T}{(\lambda_i)^2 (j\omega - \lambda_i)} + \frac{\omega^4 [\mathbf{v}_{ci}^*][\mathbf{g}_{ci}^*]^T}{(\lambda_i^*)^2 (j\omega - \lambda_i^*)} + \frac{\omega^4 [\mathbf{g}_{ci}][\mathbf{v}_{ci}]^T}{(\lambda_i)^2 (-j\omega - \lambda_i)} + \frac{\omega^4 [\mathbf{g}_{ci}^*][\mathbf{v}_{ci}^*]^T}{(\lambda_i^*)^2 (-j\omega - \lambda_i^*)} \right) \quad (2.78)$$

$$[\mathbf{g}_{ci}]^T = \frac{1}{a_i} [\boldsymbol{\theta}_i]^T \mathbf{B}_2 \mathbf{\Pi}_u \mathbf{B}_2^T \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbf{R}e_k}{\lambda_i - \lambda_k} + \frac{\mathbf{R}e_k^*}{-\lambda_i - \lambda_k^*} \right) \mathbf{C}_a^T \quad (2.79)$$

Exemplo: Na figura 2.9 representa-se uma parte da amplitude e fase de toda a matriz de funções de densidade espectral da resposta em aceleração, do sistema estrutural considerado para exemplo.

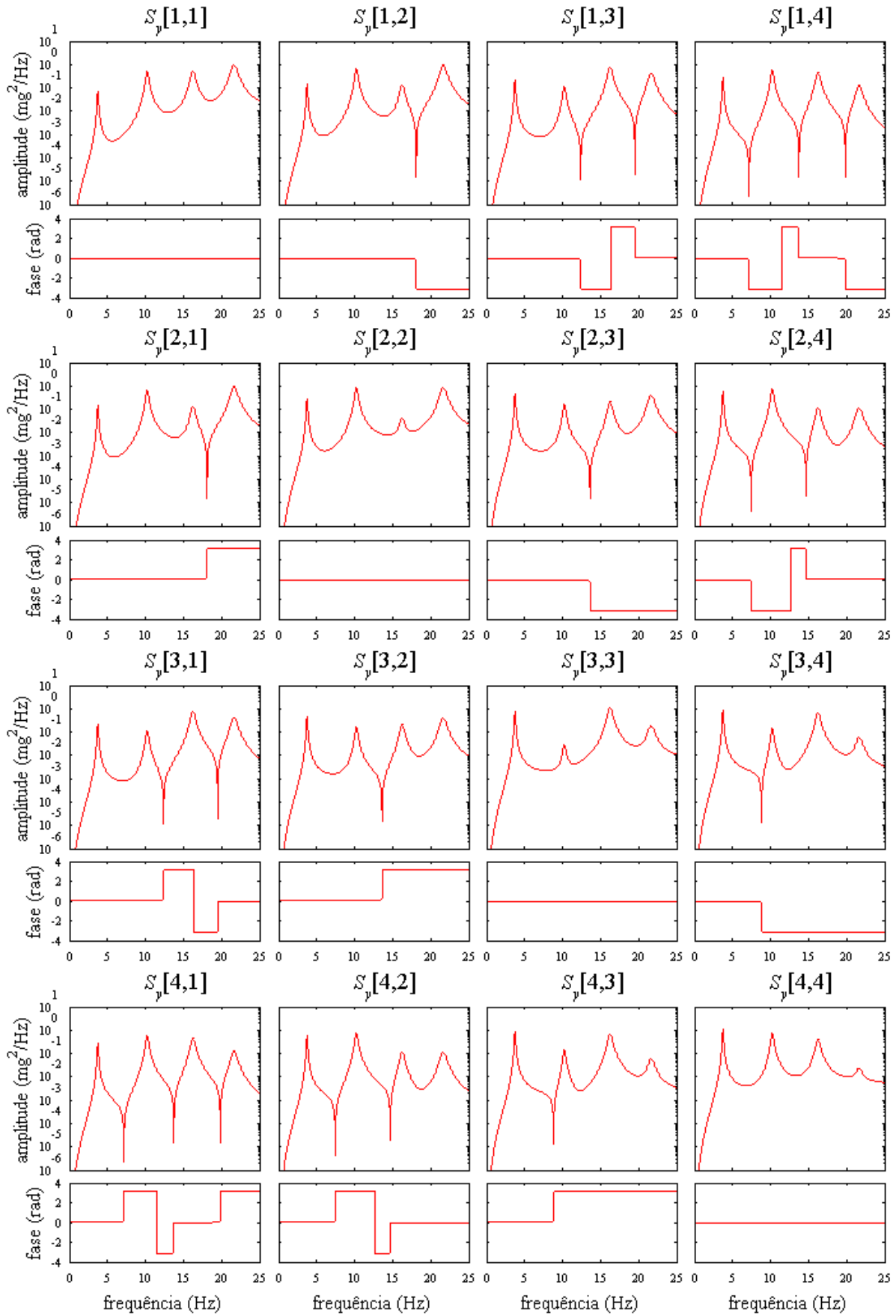


Figura 2.9 – Funções de densidade espectral da resposta em aceleração do sistema de exemplo.

As funções de densidade espectral da resposta em aceleração apresentadas na figura 2.9 foram calculadas através da expressão (2.75) considerando que as forças de excitação têm densidade espectral constante (ruído branco) e unitária ($\Pi_u = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \text{ N}^2/\text{Hz}$).

Os elementos da diagonal principal da matriz de funções de densidade espectral representadas na figura 2.9, são designados por auto-espectros e os restantes elementos por espectros cruzados. Como se pode verificar nessa figura, a fase dos auto-espectros é sempre nula (como é óbvio a resposta num determinado grau de liberdade está sempre em fase consigo própria) enquanto que a fase dos espectros cruzados apresenta valores de 0 ou de $\pm\pi$ (*rad*) consoante a relação de sinais entre as componentes modais nos graus de liberdade a que se referem os espectros cruzados (note-se que neste exemplo está-se a considerar uma matriz de amortecimento proporcional).

Na figura 2.10 representa-se uma parte da amplitude e fase da função de densidade espectral da resposta em aceleração $S_y[1,1]$. Nessa figura indicam-se também as contribuições de cada modo de vibração para a função de densidade espectral representada. De forma semelhante ao que se verificou na figura 2.8 para a FRF, pode-se verificar na figura 2.10 que na vizinhança dos picos da amplitude da função de densidade espectral, a resposta do sistema é dominada por um dos modos, havendo apenas uma pequena contribuição dos restantes modos; no entanto, essa contribuição seria superior se as frequências dos modos fossem mais próximas e se o amortecimento fosse maior.

Na figura 2.10 indicam-se também os valores das frequências que correspondem aos picos da amplitude da função de densidade espectral representada. Tal como já se salientou para a FRF, devido ao facto do sistema ser amortecido, essas frequências não coincidem exactamente com as suas frequências naturais não amortecidas.

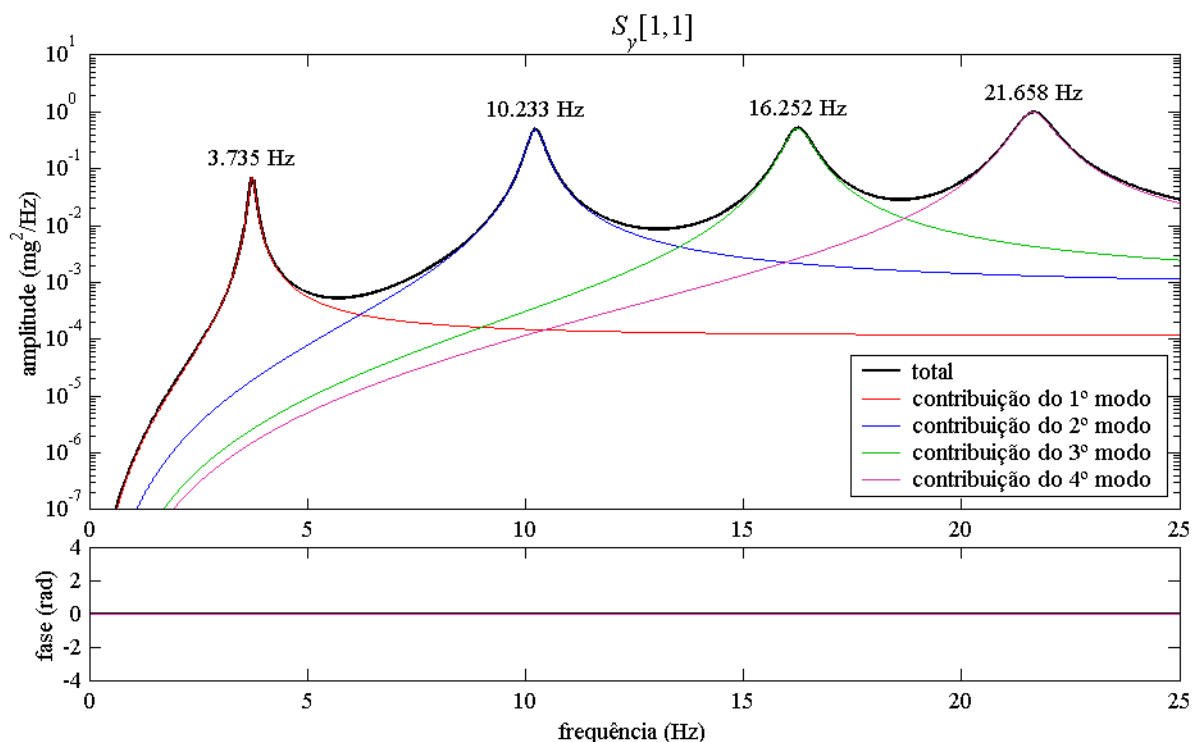


Figura 2.10 – Função de densidade espectral da resposta em aceleração $S_y[1,1]$ do sistema de exemplo.

Funções de resposta impulsiva:

As funções de resposta impulsiva de um sistema são o equivalente no domínio do tempo às suas funções de transferência ou às suas funções de resposta em frequência. São funções que, no domínio do tempo, descrevem as características dinâmicas dum sistema, representando a sua resposta a impulsos unitários aplicados segundo os seus graus de liberdade.

Sob o ponto de vista da identificação modal, tem interesse abordar as funções de resposta impulsiva uma vez que há diversos métodos que se baseiam na sua análise, nomeadamente, métodos que são aplicáveis na identificação modal estocástica. Nesta última situação, esses métodos não são aplicados directamente às funções de resposta impulsiva, mas sim a outras funções de resposta no domínio do tempo (Zang *et al.*, 2002) que exprimem de forma equivalente as características dinâmicas dos sistemas, como é o caso das funções de correlação da resposta ou das funções de decaimento aleatório (ver capítulo 4). O aspecto comum a essas funções é o de poderem ser expressas como uma soma de sinusóides com decaimento exponencial, o que constitui o fundamento dos métodos de identificação modal baseados na análise dessas funções, conforme se apresentará no capítulo 4.

As expressões analíticas para as funções de resposta impulsiva dum sistema podem ser estabelecidas através da inversa da transformada de *Laplace* das suas funções de transferência. Considerando então a expressão (2.55) e aplicando a inversa da transformada de *Laplace*, pode-se verificar que a matriz de funções de resposta impulsiva pode ser avaliada através de:

$$\mathbf{h}_c(t) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (2.80)$$

Tendo em conta a decomposição modal da matriz \mathbf{A}_c (2.27) e as matrizes \mathbf{L}_c^T e \mathbf{V}_c , definidas nas relações (2.38), pode-se verificar que a matriz de funções de resposta impulsiva pode ser determinada através da expressão seguinte:

$$\mathbf{h}_c(t) = \mathbf{V}_c e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{L}_c^T \quad (2.81)$$

A expressão (2.81) é válida para a resposta em deslocamento, velocidade ou aceleração segundo os graus de liberdade do sistema; as diferenças entre essas situações são apropriadamente consideradas na matriz \mathbf{V}_c .

Considerando as expressões (2.60) e (2.61) e as respectivas inversas da transformada de *Laplace*, pode-se verificar que as funções de resposta impulsiva podem ser escritas noutras formas, mais utilizadas no domínio da análise modal experimental com controlo e medição das forças de

excitação (Heylen *et al.*, 1997; Maia *et al.*, 1998; Allemang, 1999; Ewins, 2000). A matriz de funções de resposta impulsiva em deslocamento pode assim ser expressa através de:

$$h_c(t) = C_d \sum_{i=1}^n \left(Re_i e^{\lambda_i t} + Re_i^* e^{\lambda_i^* t} \right) B_2 \quad (2.82)$$

e a matriz de funções de resposta impulsiva em aceleração através de:

$$h_c(t) = C_a \sum_{i=1}^n \left((\lambda_i)^2 Re_i e^{\lambda_i t} + (\lambda_i^*)^2 Re_i^* e^{\lambda_i^* t} \right) B_2 \quad (2.83)$$

Exemplo: Na figura 2.11 representa-se uma parte com a duração de 1 s, de toda a matriz de funções de resposta impulsiva em aceleração, do sistema estrutural considerado para exemplo.

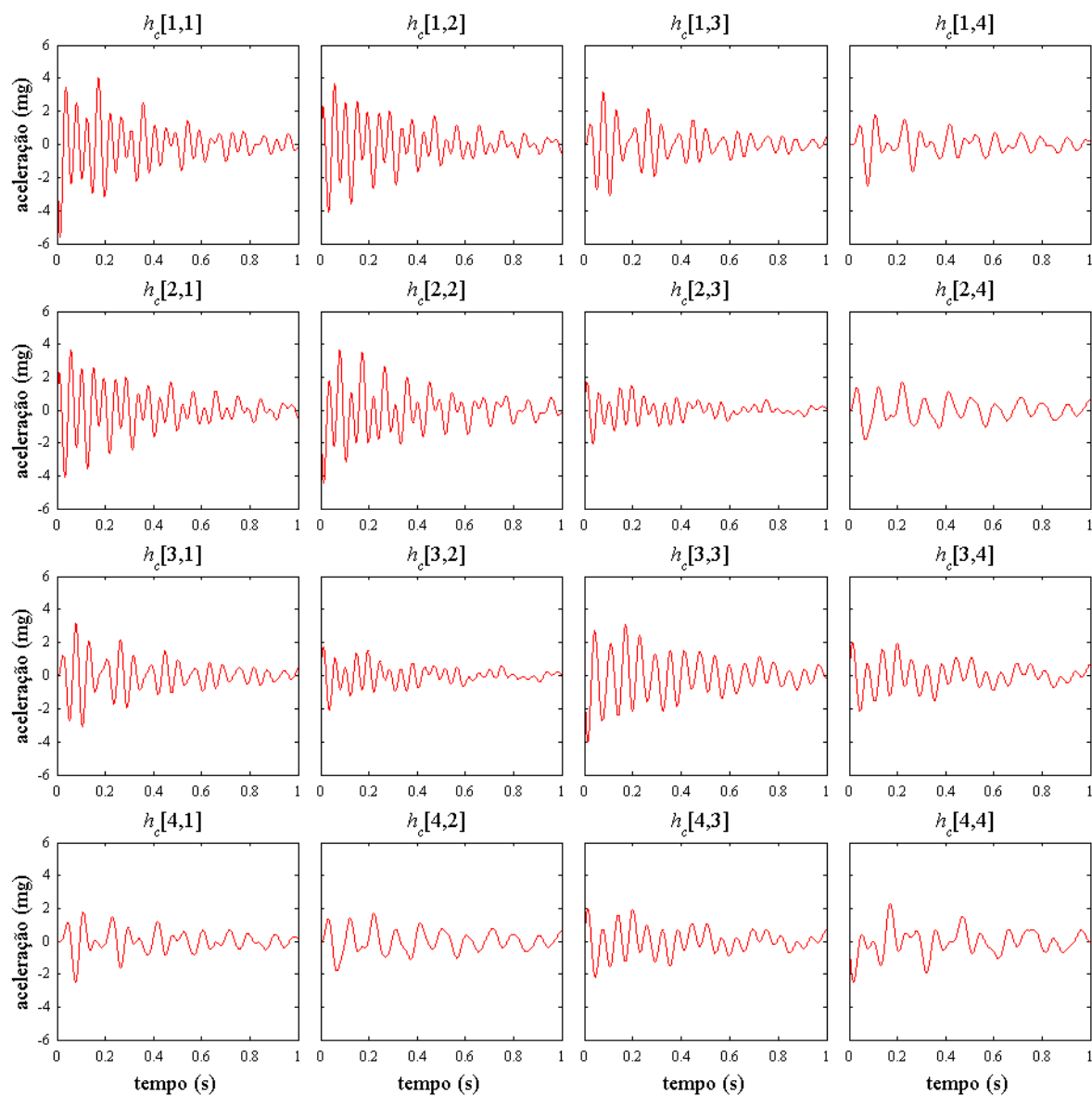


Figura 2.11 – Funções de resposta impulsiva em aceleração do sistema considerado para exemplo.

As funções de resposta impulsiva em aceleração apresentadas na figura 2.11 foram calculadas através da expressão (2.81).

Na figura 2.12 representa-se uma parte com a duração de 1 s, da função de resposta impulsiva em aceleração $h_c[1,1]$. Nessa figura indicam-se também as contribuições de cada modo de vibração para a função de resposta impulsiva representada. Na figura 2.12 é bastante evidente que, quando um impulso unitário é aplicado segundo o 1º grau de liberdade do sistema (deslocamento horizontal segundo x , do 1º piso do modelo do edifício), o 1º modo de vibração praticamente não contribui para a resposta total segundo esse grau de liberdade e que essa resposta é dominada pela contribuição do 4º modo de vibração.

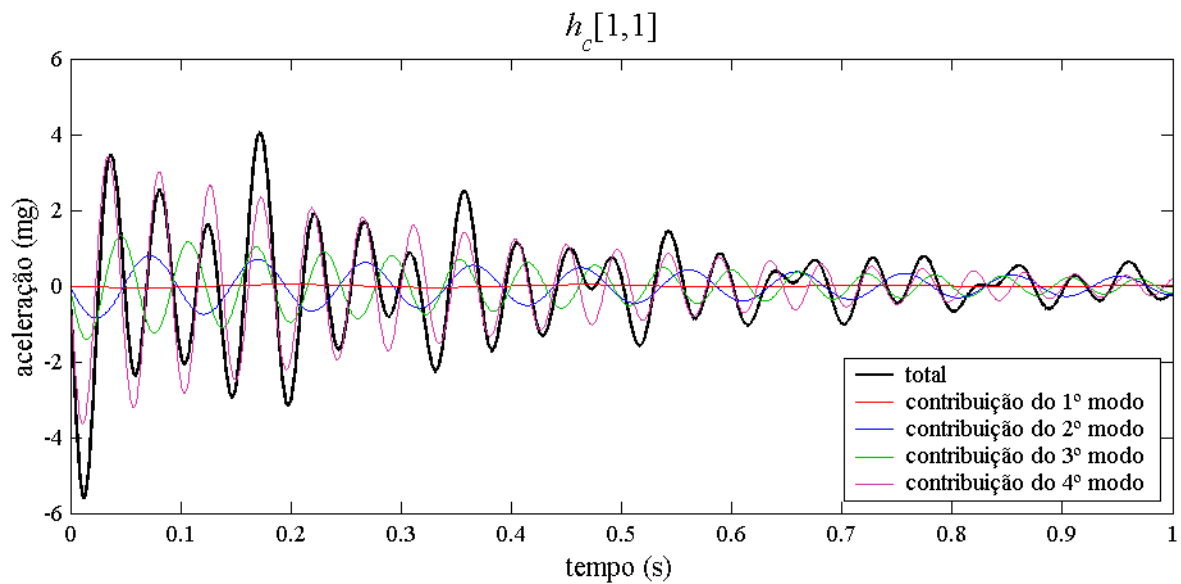


Figura 2.12 – Função de resposta impulsiva em aceleração $h_c[1,1]$ do sistema considerado para exemplo.

2.5 Representação de sistemas no tempo discreto

Na análise até agora efectuada e nas equações apresentadas, a variável tempo é considerada como contínua, ou seja, é encarada na concepção usual de algo que flui sem interrupções (Carvalho *et al.*, 1989), tendo-se designado os respectivos sistemas estruturais por sistemas no tempo contínuo. No entanto, conforme já se referiu, actualmente as respostas estruturais medidas experimentalmente são sempre obtidas na forma de séries numéricas discretas no tempo, ou seja, a sua observação é efectuada por amostragem em intervalos finitos de tempo. Os sistemas observados dessa forma são então designados por sistemas discretos amostrados ou sistemas no tempo discreto. Na prática, a identificação modal é portanto efectuada com séries discretas no tempo, ou com as suas representações no domínio da frequência. Importa pois analisar os sistemas no tempo discreto, verificando as alterações nas suas formas de representação relativamente às dos correspondentes sistemas no tempo contínuo.

Considere-se então que um sistema contínuo é amostrado com um intervalo de tempo ou período de amostragem Δt . As equações no tempo contínuo podem pois ser discretizadas e resolvidas em todos os instantes t_k em que $t_k = k \Delta t$, sendo k um número inteiro. Para se obter a representação de estado deste sistema discreto amostrado, é necessário assumir um determinado tipo de variação da entrada $u(t)$ em cada período de amostragem Δt . A hipótese mais simples é admitir que $u(t)$ é constante em cada intervalo Δt , o que corresponde a considerar um retentor de amostras de ordem 0 (designado pelas iniciais ZOH na literatura anglo-saxónica). Nesta hipótese, pode-se verificar (Juang, 1994; Ribeiro, 2000) que a representação de estado (2.32) dum sistema no tempo contínuo, pode ser convertida na seguinte representação de estado de um sistema no tempo discreto (traduzida graficamente no diagrama de blocos apresentado na figura 2.13):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (2.84)$$

em que: \mathbf{x}_k ($2n \times 1$) é o vector de estado discreto que contém os deslocamentos e velocidades

amostrados, $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_k^T & \dot{\mathbf{z}}_k^T \end{pmatrix}^T$;

\mathbf{u}_k ($m \times 1$) é o vector de entrada amostrado;

\mathbf{y}_k ($n_e \times 1$) é o vector de resposta amostrado;

\mathbf{A} ($2n \times 2n$), \mathbf{B} ($2n \times m$), \mathbf{C} ($n_e \times 2n$) e \mathbf{D} ($n_e \times m$) são as matrizes no tempo discreto, respectivamente, de estado, de entrada, de resposta e de transmissão directa; na hipótese de ZOH, a relação entre estas matrizes e as correspondentes matrizes no tempo contínuo, é:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t}, \quad \mathbf{B} = \left(\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \right) \mathbf{B}_c = (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_c, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_c \quad (2.85)$$

note-se que estas relações só são válidas para a hipótese de ZOH; no caso de se considerarem outras hipóteses para a variação de $u(t)$ em cada período de amostragem, obtêm-se equações diferentes de (2.85) para as relações entre as matrizes dos sistemas no tempo discreto e as matrizes dos correspondentes sistemas no tempo contínuo.

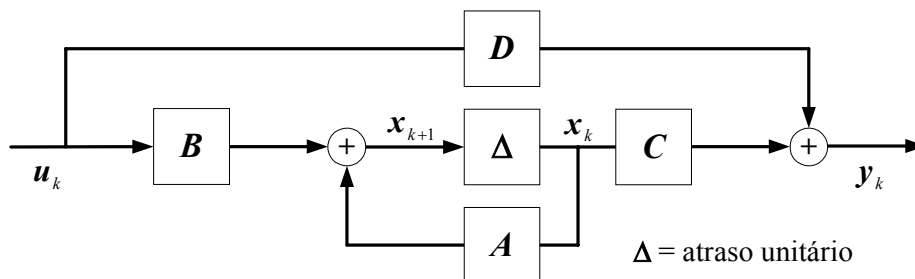


Figura 2.13 – Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema no tempo discreto.

Exemplo: Considerando que a resposta do sistema estrutural de exemplo é observada com uma frequência de amostragem de 200 Hz, ou seja com $\Delta t = 0,005$ s, apresentam-se em seguida as matrizes da representação de estado (2.84) do correspondente sistema no tempo discreto, calculadas de acordo com as expressões (2.85), apenas para a primeira situação ilustrada na figura 2.5.

Matriz de estado (no tempo discreto)

$$A = \begin{bmatrix} 0,8501 & 0,0742 & -0,0026 & -0,0002 & 0,0047 & 0,0001 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0744 & 0,8825 & 0,0501 & -0,0023 & 0,0001 & 0,0048 & 0,0001 & 0,0000 \\ -0,0026 & 0,0502 & 0,9069 & 0,0455 & 0,0000 & 0,0001 & 0,0048 & 0,0001 \\ -0,0002 & -0,0024 & 0,0471 & 0,9556 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 & 0,0049 \\ -57,760 & 28,135 & -0,7123 & -0,0894 & 0,8302 & 0,0798 & -0,0018 & 0,0001 \\ 28,192 & -45,268 & 19,176 & -0,7089 & 0,0800 & 0,8658 & 0,0548 & -0,0013 \\ -0,7152 & 19,215 & -36,191 & 17,702 & -0,0018 & 0,0550 & 0,8922 & 0,0511 \\ -0,0928 & -0,7346 & 18,306 & -17,441 & 0,0001 & -0,0014 & 0,0528 & 0,9455 \end{bmatrix}$$

Matriz de entrada (no tempo discreto)

$$B = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0,0068 & 0,0001 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0069 & 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0001 & 0,0069 & 0,0001 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 & 0,0072 \\ 2,642 & 0,080 & -0,002 & 0,000 \\ 0,080 & 2,683 & 0,055 & -0,001 \\ -0,002 & 0,055 & 2,715 & 0,053 \\ 0,000 & -0,001 & 0,053 & 2,863 \end{bmatrix}$$

Matriz de resposta (no tempo discreto)

$$C = \begin{bmatrix} -12493 & 6291 & -283,7 & -9,33 & -4,274 & 1,302 & 0,136 & 0,059 \\ 6303 & -9788 & 4198 & -227,1 & 1,304 & -3,577 & 1,063 & 0,175 \\ -284,9 & 4206 & -7691 & 3757 & 0,136 & 1,065 & -3,110 & 1,198 \\ -9,69 & -235,3 & 3886 & -3632 & 0,061 & 0,181 & 1,239 & -2,072 \end{bmatrix}$$

Matriz de transmissão directa (no tempo discreto)

$$D = 10^{-6} \begin{bmatrix} 562,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 563,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 565,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 584,3 \end{bmatrix}$$

Decomposição modal:

A decomposição modal da matriz de estado dum sistema discreto amostrado pode ser obtida, considerando a decomposição modal da matriz de estado no tempo contínuo, definida em (2.27), e introduzindo-a na primeira relação de (2.85). Obtém-se assim (Peeters, 2000; Ribeiro, 2002):

$$A = e^{A_c \Delta t} = e^{\Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \Delta t} = \Psi e^{\Lambda_c \Delta t} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_d \Psi^{-1} = \Psi \begin{bmatrix} \mu_i \end{bmatrix} \Psi^{-1} \quad (2.86)$$

Verifica-se pois que os vectores próprios dos sistemas no tempo discreto coincidem com os vectores próprios dos sistemas no tempo contínuo. Por outro lado, os valores próprios μ_i dos sistemas no tempo discreto relacionam-se com os valores próprios λ_i dos sistemas no tempo contínuo, através das expressões:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \ln(\mu_i) / \Delta t \quad (2.87)$$

As matrizes de entrada modal L^T ($2n \times m$) e de resposta modal V ($n_e \times 2n$) dum sistema no tempo discreto são definidas de forma semelhante à indicada em (2.38) para um sistema no tempo contínuo, ou seja:

$$L^T = \Psi^{-1} B, \quad V = C \Psi \quad (2.88)$$

Considerando a decomposição (2.39) da matriz de transmissão directa dum sistema no tempo contínuo, pode-se verificar que essa decomposição para um sistema no tempo discreto, resulta em:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c = \mathbf{V}_c \mathbf{\Lambda}_c^{-1} \mathbf{L}_c^T = \mathbf{V} (\mathbf{\Lambda}_d - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{L}^T = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\mu_i - 1} [\mathbf{v}_i] [\mathbf{l}_i]^T \quad (2.89)$$

Exemplo: Para o sistema estrutural de exemplo, a partir da matriz de estado do sistema no tempo discreto, anteriormente apresentada, calcularam-se os respectivos valores próprios que se indicam em seguida.

$$\begin{array}{l} \text{valores} \\ \text{próprios} \\ \text{do sistema} \\ \text{no tempo} \\ \text{discreto} \end{array} \mu_i = \begin{bmatrix} 0,9908 + 0,1167j \\ 0,9428 + 0,3138j \\ 0,8637 + 0,4835j \\ 0,7671 + 0,6203j \\ 0,9908 - 0,1167j \\ 0,9428 - 0,3138j \\ 0,8637 - 0,4835j \\ 0,7671 - 0,6203j \end{bmatrix} \Rightarrow (2.87) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{valores} \\ \text{próprios} \\ \text{do sistema} \\ \text{no tempo} \\ \text{contínuo} \end{array} \lambda_i = \begin{bmatrix} -0,469 + 23,45j \\ -1,285 + 64,26j \\ -2,042 + 102,06j \\ -2,721 + 136,00j \\ -0,469 - 23,45j \\ -1,285 - 64,26j \\ -2,042 - 102,06j \\ -2,721 - 136,00j \end{bmatrix}$$

Funções de resposta impulsiva:

Conforme já se referiu para os sistemas no tempo contínuo, é importante analisar as funções de resposta impulsiva dos sistemas, dado o seu interesse para vários métodos de identificação modal. As funções de resposta impulsiva correspondem às respostas dum sistema a entradas de tipo impulso unitário ($\mathbf{u}_0 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ para $k > 0$). As funções de resposta impulsiva podem ser organizadas numa matriz \mathbf{h}_k ($n_e \times m$) com n_e respostas observadas para cada impulso unitário aplicado segundo m graus de liberdade. Admitindo condições iniciais nulas ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$) pode-se verificar, partindo de (2.84), que as funções de resposta impulsiva são dadas por:

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{D} \quad , \quad \mathbf{h}_k = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \quad (k > 0) \quad (2.90)$$

Estas respostas impulsivas podem também ser escritas em função dos parâmetros modais dum sistema, ou seja:

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{V} (\mathbf{\Lambda}_d - \mathbf{I})^{-1} \mathbf{L}^T \quad , \quad \mathbf{h}_k = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}_d^{k-1} \mathbf{L}^T \quad (k > 0) \quad (2.91)$$

As funções de resposta impulsiva (2.90) ou (2.91) dum sistema no tempo discreto, são também designadas por *parâmetros de Markov* do sistema (Chhipwadia *et al.*, 1999).

Representação de estado de sistemas determinísticos-estocásticos no tempo discreto:

Na representação de estado (2.84) de um sistema no tempo discreto, a entrada \mathbf{u}_k é considerada numa forma determinística, resultando a resposta observada \mathbf{y}_k apenas do efeito dessa entrada e do estado do sistema nos instantes anteriores. Na realidade, na observação experimental do

comportamento dinâmico de estruturas, podem existir perturbações na entrada, imprecisões de modelação¹ e ruídos na resposta observada devido a imprecisões dos transdutores e sistemas de aquisição de dados. Assim, uma representação de estado mais próxima da realidade experimental, do que a expressa através de (2.84), também deve incluir termos que reflectam a existência de perturbações e ruídos. Pode-se assim considerar a seguinte representação de estado de sistemas determinísticos-estocásticos no tempo discreto (traduzida graficamente no diagrama de blocos apresentado na figura 2.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (2.92)$$

em que: \mathbf{w}_k ($2n \times 1$) é designado por ruído do processo e é incluído para considerar os efeitos de perturbações e imprecisões na modelação;

\mathbf{v}_k ($n_e \times 1$) é designado por ruído de medição e é considerado para ter em conta o ruído devido a imprecisões dos transdutores e sistemas de aquisição de dados.

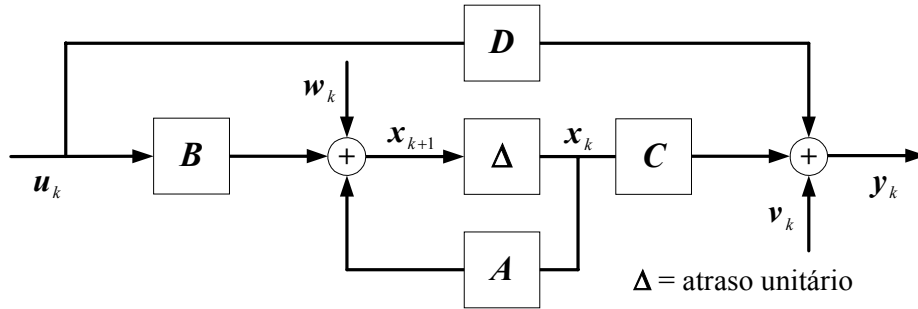


Figura 2.14 – Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema determinístico-estocástico.

Os vectores \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k não podem ser conhecidos (medidos) duma forma determinística, mas pode assumir-se que têm determinadas propriedades estatísticas, nomeadamente que são processos gaussianos estacionários de ruído branco com média nula e com matrizes de covariância dadas por:

$$E \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \delta_{pq} \quad (2.93)$$

em que: \mathbf{Q} ($2n \times 2n$), \mathbf{S} ($2n \times n_e$) e \mathbf{R} ($n_e \times n_e$) são as matrizes de covariância de \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k ;

δ_{pq} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{pq} = 1$ se $p = q$, $\delta_{pq} = 0$ se $p \neq q$);

p e q são dois instantes de tempo.

¹ Note-se que está-se a assumir que os sistemas são lineares e invariantes no tempo, na realidade pode haver perturbações, nomeadamente, pequenas alterações de rigidez, induzidas por variações de temperatura, ou de massa, devido por exemplo ao tráfego a circular numa ponte, que invalidem ligeiramente essa hipótese.

Representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto:

Embora (2.92) seja já uma representação de estado mais próxima da realidade experimental, corresponde ainda a uma situação em que a entrada u_k é controlada e medida. Para a análise da informação obtida em ensaios em que só é medida a resposta dos sistemas, tem maior interesse considerar uma representação de estado em que a própria excitação é considerada, não numa forma determinística, mas também como um processo estocástico e incluída nos termos w_k e v_k . Pode-se assim considerar a seguinte representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto (traduzida graficamente no diagrama de blocos apresentado na figura 2.15):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A x_k + w_k \\ y_k &= C x_k + v_k \end{aligned} \quad (2.94)$$

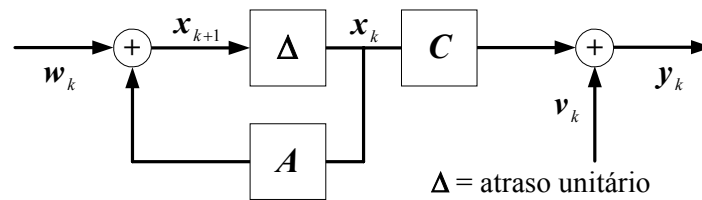


Figura 2.15 – Diagrama de blocos da representação de estado dum sistema estocástico.

Em (2.94) as forças de excitação dum sistema, são consideradas nos termos w_k e v_k para os quais se mantém a hipótese de serem processos gaussianos estacionários de tipo ruído branco com média nula. Esta é uma hipótese de base de grande importância para a identificação modal estocástica (já referida quando se abordaram as funções de densidade espectral da resposta dum sistema e que será de novo analisada no capítulo 4). Se esta hipótese não se verificar, ou seja, se as forças de excitação contiverem componentes com frequências claramente dominantes, então nessas frequências surgirão pólos da matriz de estado do sistema identificado, ou picos da amplitude das funções de densidade espectral. Esta situação será ilustrada num dos casos de aplicação apresentados no capítulo 6.

Propriedades dos sistemas estocásticos:

Sob a hipótese de que w_k e v_k são processos gaussianos estacionários de tipo ruído branco com média nula, e uma vez que (2.94) só envolve operações lineares sobre esses processos, então o vector de estado x_k e a resposta observada y_k são também processos estacionários de distribuição gaussiana e de média nula, para um estado inicial também de média nula (Andersen, 1997). No que se refere ao vector de estado, podem-se assim escrever as seguintes relações (Van Overschee e De Moor, 1996):

$$E[x_k] = 0 \quad , \quad E[x_k x_k^T] = \Sigma \quad (2.95)$$

em que: $\Sigma (2n \times 2n)$ é a matriz de covariância do estado \mathbf{x}_k ; esta matriz é independente do instante de tempo k .

A matriz de covariância da resposta $\mathbf{R}_i (n_e \times n_e)$ é definida através de:

$$\mathbf{R}_i = E \left[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \right] \quad (2.96)$$

em que: i é um intervalo de tempo arbitrário.

A matriz de covariância $\mathbf{G} (2n \times n_e)$ entre o estado no instante $k+1$ e a resposta no instante k é definida através de:

$$\mathbf{G} = E \left[\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{y}_k^T \right] \quad (2.97)$$

Os sistemas estocásticos podem ter diversas representações de estado ou modelos no espaço de estado. Essas representações são equivalentes entre si, no sentido de equivalência dos momentos de segunda ordem da resposta, ou seja, de covariâncias da resposta idênticas (Van Overschee e De Moor, 1996). Dado o seu interesse para os métodos de identificação modal estocástica, apresentam-se em seguida dois desses modelos, que têm as designações de modelo para a frente (*forward model*) e modelo de inovação para a frente (*forward innovation model*).

Modelo para a frente (forward model):

Os processos de ruído branco e média nula \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são independentes do estado \mathbf{x}_k , ou seja:

$$E \left[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T \right] = \mathbf{0} \quad , \quad E \left[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T \right] = \mathbf{0} \quad (2.98)$$

Considerando as matrizes de covariância definidas em (2.93), a representação de estado (2.94) e as expressões (2.95) a (2.98), podem-se demonstrar as seguintes relações (Van Overschee e De Moor, 1996), a primeira das quais é designada por equação de *Lyapunov* para a matriz Σ :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{C} \Sigma \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \mathbf{v} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{A} \Sigma \mathbf{C}^T + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Considerando a definição (2.96) e a última expressão de (2.99), obtêm-se para as matrizes de covariância da resposta, para $i = 1, 2, \dots$, as seguintes expressões (Van Overschee e De Moor, 1996):

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \quad , \quad \mathbf{R}_{-i} = \mathbf{G}^T \left(\mathbf{A}^{i-1} \right)^T \mathbf{C}^T \quad (2.100)$$

É de salientar que existe uma semelhança entre a factorização das matrizes de covariância da resposta, expressa em (2.100), e a factorização das funções de resposta impulsiva (2.90). Em sistemas estocásticos, as matrizes (A, G, C, R_0) têm a função das matrizes (A, B, C, D) em sistemas determinísticos. Devido a esta equivalência, os métodos de identificação modal aplicados na análise das funções de resposta impulsiva (avaliadas com a informação obtida em ensaios com medição da entrada e da resposta) podem também ser utilizados na identificação modal a partir das covariâncias da resposta (calculadas com a informação obtida em ensaios só com medição da resposta).

A relação (2.100) é de grande importância para a identificação modal estocástica, nomeadamente para os métodos baseados na análise das funções de correlação da resposta dos sistemas, conforme se apresentará no capítulo 4.

Introduzindo em (2.100) a decomposição modal da matriz A (2.86) e considerando também a relação (2.88), pode-se verificar que:

$$R_i = V \Lambda_d^{i-1} G_m \quad (i > 0) \quad (2.101)$$

em que: $G_m (2n \times n_e)$ é a matriz de covariância entre o próximo estado modal e a resposta, que pode ser designada por matriz de participação modal estocástica para sistemas discretos (comparando (2.101) com (2.91) pode-se verificar a semelhança entre G_m e a matriz de participação modal L^T ; ver também a relação (2.76) onde é introduzida a matriz $G_{c,m}$ para sistemas contínuos).

Modelo de inovação para a frente (forward innovation model):

A representação de estado (2.94) pode ser convertida no chamado modelo de inovação para a frente (Van Overschee e De Moor, 1996). Tal é efectuado aplicando um filtro de *Kalman* de estado estacionário à representação (2.94), obtendo-se assim:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A \tilde{x}_k + K_a e_k \\ y_k &= C \tilde{x}_k + e_k \end{aligned} \quad (2.102)$$

em que: $e_k (n_e \times 1)$ é o vector de inovações (corresponde à parte da resposta no instante k que não é prevista com base na resposta até ao instante $k-1$ (Andersen, 1997));
 $K_a (2n \times n_e)$ é a matriz de ganho do filtro de *Kalman*.

O vector de inovações e_k é um processo de ruído branco, com matriz de covariância (R_e) dada por:

$$E[\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q^T] = \mathbf{R}_e \delta_{pq} = (\mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T) \delta_{pq} \quad (2.103)$$

A matriz de ganho do filtro de *Kalman* \mathbf{K}_a pode ser determinada através de:

$$\mathbf{K}_a = (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{C}^T) (\mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)^{-1} \quad (2.104)$$

Para avaliar a matriz de covariância das inovações (2.103) e a matriz de ganho do filtro de *Kalman* (2.104) é necessário determinar a matriz \mathbf{P} (matriz de covariância do estado dum sistema $\mathbf{P} = E[\tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^T]$) através da resolução da equação discreta de *Riccati*:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T + (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{C}^T) (\mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)^T \quad (2.105)$$

A determinação da solução de (2.105) envolve a resolução de um problema generalizado de valores próprios (Laub, 1979; Van Overschee e De Moor, 1996).

Quando se abordar o método de identificação estocástica em subespaços no capítulo 4, ficarão mais claros alguns dos aspectos agora introduzidos e a importância que têm para este trabalho.

Representação no domínio da frequência:

O interesse em analisar a representação no domínio da frequência de sistemas no tempo discreto está acima de tudo na possibilidade de comparar essa representação com as funções de densidade espectral obtidas por aplicação de técnicas não-paramétricas (nomeadamente o algoritmo da FFT). Essa comparação constitui portanto uma maneira de validar e verificar a qualidade dos resultados obtidos com métodos de identificação no domínio do tempo.

Para efectuar a transformação de sinais discretos para o domínio da frequência, tem interesse analisar a transformada- z que pode ser encarada como sendo a transformada de *Laplace* de sinais discretos. A transformada- z é definida através de (ver por exemplo Carvalhal *et al.*, 1989):

$$\mathbf{X}(z) = Z[\mathbf{x}_k] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k z^{-k} \quad (2.106)$$

em que: z é uma variável complexa.

Considerando $z = e^{s\Delta t}$ pode-se verificar (Juang, 1994) que a transformada- z de um sinal discreto, obtido por amostragem de um sinal contínuo, é coincidente com a transformada de Laplace desse sinal contínuo. Restringir a variável s a valores imaginários puros, ou seja, passar para o

domínio da frequência ω , conforme se viu em 2.4, é equivalente, em termos de transformada-z, a restringir z a valores no círculo de raio unitário, $z = e^{j\omega\Delta t} = \cos(\omega\Delta t) + j \sin(\omega\Delta t)$.

A função de densidade espectral de um processo estocástico estacionário no tempo discreto, pode ser definida através da transformada-z da sua covariância. Assim, a função de densidade espectral da resposta y_k de um sistema no tempo discreto, é dada por:

$$S_y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k z^{-k} \Rightarrow S_y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{-j\omega k \Delta t} \quad (2.107)$$

em que: R_k é a covariância da resposta para um intervalo de tempo k , ver expressão (2.96).

Pode-se verificar (Peeters, 2000) que a função de densidade espectral (2.107) pode também ser expressa através de:

$$S_y(\omega) = C \left(e^{j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{R}_0 + \mathbf{G}^T \left(e^{-j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{C}^T \quad (2.108)$$

Considerando a decomposição da matriz \mathbf{A} ($\mathbf{A} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{\Psi}^{-1}$) a expressão (2.108) pode também ser escrita na seguinte forma:

$$S_y(\omega) = \mathbf{V} \left(e^{j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_d \right)^{-1} \mathbf{G}_m + \mathbf{R}_0 + \mathbf{G}_m^T \left(e^{-j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_d \right)^{-1} \mathbf{V}^T \quad (2.109)$$

A função de densidade espectral pode ainda ser definida considerando o modelo de inovação para a frente (2.102). Nesse caso, obtém-se a seguinte expressão:

$$S_y(\omega) = \left(\mathbf{C} \left(e^{j\omega\Delta t} \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{K}_a + \mathbf{I}_{n_e} \right) \mathbf{R}_e \left(\mathbf{I}_{n_e} + \mathbf{K}_a^T \left(e^{-j\omega\Delta t} \mathbf{I}_{2n} - \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{C}^T \right) \quad (2.110)$$

em que: R_e é a matriz de covariância das inovações.

2.6 Representação de sistemas através de modelos ARMAV

Os modelos auto-regressivos com média móvel (ARMA) são utilizados para a análise de séries temporais e modelação de sistemas dinâmicos (Ljung, 1999) em diversos domínios científicos. No que concerne à sua aplicação para a identificação modal estocástica de sistemas estruturais, são de destacar os desenvolvimentos de Gersch e Liu (1976), Pi e Mickleborough (1989), Bonnecase *et al.* (1990), Prevosto *et al.* (1991), Piombo *et al.* (1993), Andersen (1997), Brincker e Andersen (1999).

No caso de sistemas de vários graus de liberdade em que são observadas diversas respostas, ou seja, um vector de resposta, em vez de, simplesmente, modelos ARMA, utiliza-se a designação de

modelos ARMAV (modelos vectoriais auto-regressivos com média móvel) que salienta o carácter vectorial da resposta observada.

Um ponto importante, para compreender a aplicabilidade dos modelos ARMAV na identificação modal estocástica, é estabelecer uma ligação entre as representações, até agora apresentadas, de modelos do comportamento dinâmico de estruturas e os modelos ARMAV. É precisamente este aspecto que se procura esclarecer em seguida, mostrando-se, nomeadamente, a equivalência entre os modelos ARMAV e a representação de estado (2.102) de sistemas estocásticos no tempo discreto (Andersen, 1997).

De facto os modelos no espaço de estado e os modelos ARMAV são formas de representação equivalentes de sistemas estocásticos no tempo discreto. A diferença significativa entre as duas representações está no facto de que a representação de estado é uma representação interna dum sistema (Ribeiro, 2002), onde é descrita a sua estrutura interna através do vector de estado, enquanto que os modelos ARMAV são apenas representações externas de entrada-resposta, onde o vector de estado não surge explicitamente.

Um modelo ARMAV de um sistema estocástico no tempo discreto pode ser traduzido através da equação seguinte:

$$\mathbf{y}_k + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{k-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{k-2} + \dots + \mathbf{A}_{na} \mathbf{y}_{k-na} = \mathbf{e}_k + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_{k-2} + \dots + \mathbf{C}_{nc} \mathbf{e}_{k-nc}$$

ou

(2.111)

$$\mathbf{y}_k = \underbrace{-\mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{k-2} - \dots - \mathbf{A}_{na} \mathbf{y}_{k-na}}_{\text{parte auto-regressiva}} + \underbrace{\mathbf{e}_k + \mathbf{C}_1 \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{C}_2 \mathbf{e}_{k-2} + \dots + \mathbf{C}_{nc} \mathbf{e}_{k-nc}}_{\text{parte de média móvel}}$$

em que: $\mathbf{y}_k (n_e \times 1)$ é o vector da resposta do sistema;

$\mathbf{e}_k (n_e \times 1)$ é um processo estocástico vectorial de ruído branco;

$\mathbf{A}_i (n_e \times n_e) (i=1 \dots na)$ são os parâmetros matriciais da parte auto-regressiva;

$\mathbf{C}_i (n_e \times n_e) (i=1 \dots nc)$ são os parâmetros matriciais da parte de média móvel.

Em seguida, apresentam-se, inicialmente, as relações que permitem determinar os parâmetros matriciais de modelos ARMAV a partir da representação de estado de um sistema estocástico no tempo discreto, e posteriormente, as relações inversas, ou seja, que permitem determinar a representação de estado a partir dos parâmetros matriciais de modelos ARMAV.

Das matrizes da representação de estado para os parâmetros de modelos ARMAV:

Para estabelecer a equivalência entre um modelo ARMAV e a representação de estado de um sistema, é necessário que o modelo ARMAV tenha o mesmo número de parâmetros auto-regressivos e de parâmetros de média móvel, ou seja, que $na = nc = p$.

Os parâmetros matriciais A_i da parte auto-regressiva dum modelo ARMAV estão relacionados com as matrizes A e C da representação de estado (2.102) dum sistema estocástico no tempo discreto, através da seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} A_p & A_{p-1} & \dots & A_2 & A_1 \end{bmatrix} O_p = -C A^p \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_p & A_{p-1} & \dots & A_2 & A_1 \end{bmatrix} = -C A^p O_p^{-1} \quad (2.112)$$

em que: O_p ($p n_e \times 2n$) é a matriz de observabilidade do sistema, que é dada por:

$$O_p = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{p-1} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

Na equação matricial (2.112) há $p \times n_e \times n_e$ incógnitas e $2n \times n_e$ equações. Assumindo que a ordem do sistema $2n$ é um múltiplo inteiro do número de respostas observadas n_e , a ordem do modelo ARMAV é dada por $p = 2n / n_e$.

Para que as equações de (2.112) sejam determinadas, a matriz de observabilidade tem que ter característica completa ($car(O_p) = 2n$), ou seja, o sistema tem que ser observável. Se $p > 2n / n_e$ ou se o sistema não for observável ($car(O_p) < 2n$), as equações de (2.112) são indeterminadas, podendo-se avaliar os parâmetros matriciais A_i da parte auto-regressiva através de mínimos quadrados.

Os parâmetros matriciais de média móvel C_i dum modelo ARMAV estão relacionados com as matrizes A , C e K_a da representação de estado (2.102) dum sistema estocástico no tempo discreto, e ainda com os parâmetros matriciais A_i , através da seguinte expressão (Andersen, 1997):

$$\begin{bmatrix} C_p & C_{p-1} & \dots & C_1 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & A_{p-1} & \dots & A_1 & I \end{bmatrix} H \quad (2.114)$$

em que: H ($p n_e \times p n_e$) é uma matriz dada por:

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C K_a & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ C A^{p-2} K_a & C A^{p-3} K_a & \dots & I & 0 \\ C A^{p-1} K_a & C A^{p-2} K_a & \dots & C K_a & I \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

Dos parâmetros de modelos ARMAV para as matrizes da representação de estado:

Conhecidos os parâmetros matriciais A_i e C_i dum modelo ARMAV dum sistema estocástico no tempo discreto, a sua representação no espaço de estado pode ser traduzida através de (2.102) em que as matrizes A , C e K_a são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -A_p & -A_{p-1} & \dots & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

$$C = [I \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0] \quad (2.117)$$

$$K_a = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_1 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ A_{p-2} & A_{p-3} & \dots & I & 0 \\ A_{p-1} & A_{p-2} & \dots & A_1 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 - A_1 \\ C_2 - A_2 \\ \vdots \\ C_{p-1} - A_{p-1} \\ C_p - A_p \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Uma matriz de estado na forma indicada em (2.116) é designada por matriz de estado na forma companheira de baixo, sendo a correspondente representação de estado designada por representação de estado na forma canónica da observabilidade (Ribeiro, 2002).

Parâmetros modais de modelos ARMAV:

Uma vez estabelecida a relação entre os modelos ARMAV e a representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto, é imediato verificar que os parâmetros modais de um sistema representado através de um modelo ARMAV podem ser determinados a partir dos valores e vectores próprios da matriz de estado na forma companheira (2.116), que contém, na última linha, os parâmetros matriciais da parte auto-regressiva do modelo.

Os vectores próprios da matriz de estado na forma companheira (2.116) têm a seguinte forma (Andersen, 1997; Peeters, 2000):

$$\Psi_i^{ARMA} = \begin{bmatrix} V_i \\ \mu_i V_i \\ \vdots \\ \mu_i^{p-2} V_i \\ \mu_i^{p-1} V_i \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

em que: Ψ_i^{ARMA} é o vector próprio i do sistema;

μ_i é o valor próprio i do sistema;

V_i é a parte observada do vector próprio i do sistema.

Verificou-se portanto que a parte auto-regressiva de um modelo ARMAV é que determina as características dinâmicas do sistema que esse modelo representa; a parte de média móvel é necessária para assegurar que a função de covariância das respostas previstas pelo modelo ARMAV, seja equivalente à função de covariância das respostas do sistema (Andersen, 1997; Peeters *et al.*, 1999).

Visto que a parte auto-regressiva dos modelos ARMAV é que está relacionada com as características dinâmicas dos sistemas, para efeitos de identificação modal de sistemas estruturais, também é possível utilizar modelos que apenas têm essa parte auto-regressiva, e que, como tal, são designados por modelos vectoriais auto-regressivos (ARV). Nessa situação contudo, teoricamente, apenas com modelos ARV de ordem infinita é que é possível definir modelos equivalentes a modelos ARMAV; na prática, tal exige que se utilizem modelos ARV de ordem muito elevada (Peeters, 2000).

2.7 Considerações finais

Neste capítulo apresentaram-se os fundamentos analíticos que servem de base aos métodos de identificação modal estocástica, que constituem o tema principal deste trabalho. Considera-se que os tópicos analisados são importantes para uma melhor compreensão dos métodos de identificação modal estocástica. Na figura 2.16 sintetizam-se num esquema, os aspectos que foram abordados no capítulo e a forma como a sua apresentação foi feita.

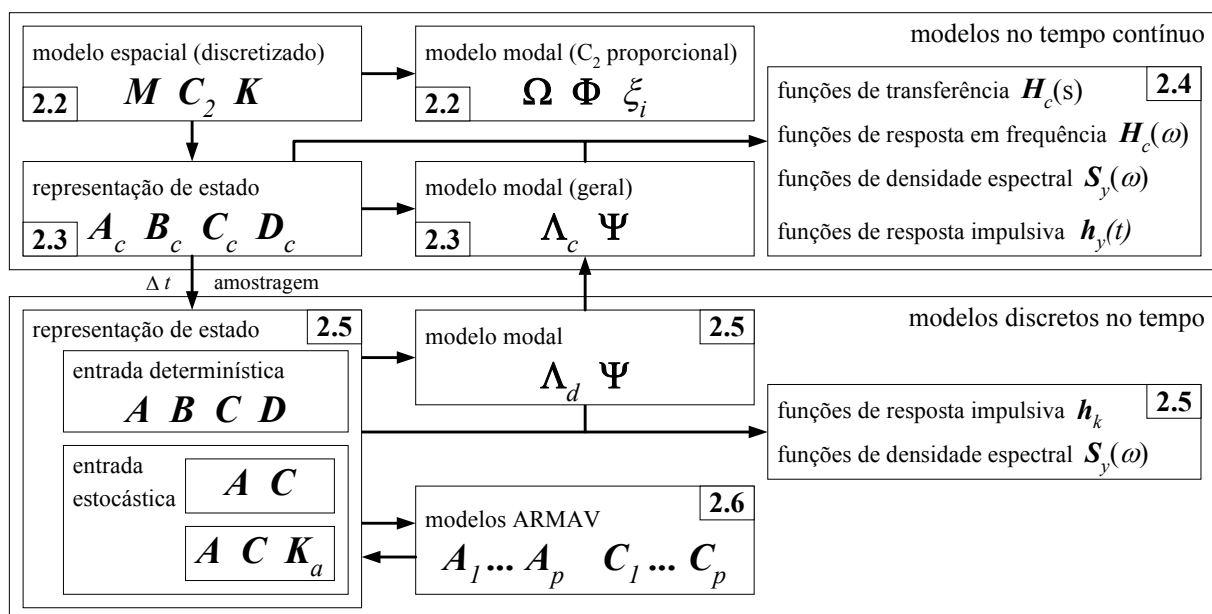


Figura 2.16 – Esquema de síntese dos temas abordados no capítulo 2.

Partindo da formulação mais utilizada na análise de problemas de dinâmica de estruturas no domínio da engenharia civil (que é expressa numa equação diferencial de 2ª ordem que envolve as matrizes M , C_2 e K), apresentaram-se as relações que permitem formular esses mesmos problemas através duma representação de estado (expressa através das matrizes A_c , B_c , C_c e D_c) numa forma que é de utilização comum para a análise de sistemas dinâmicos no domínio da engenharia de sistemas de controlo. O objectivo de efectuar essa transformação, na forma de representação dos problemas de dinâmica de estruturas, prende-se por um lado com a utilização de métodos de identificação de sistemas, que se baseiam precisamente na representação de estado, e por outro, com o facto de que a formulação no espaço de estado é de maior generalidade, permitindo abordar de forma unificada sistemas com amortecimento proporcional ou com amortecimento não proporcional.

Mostrou-se como os parâmetros modais (frequências naturais de vibração, coeficientes de amortecimento e configurações modais) dos sistemas estruturais, estão relacionados com os valores e vectores próprios da matriz de estado A_c da representação de estado dum sistema. Apresentaram-se também as expressões analíticas, em função das matrizes da formulação de estado, das funções de representação da resposta dos sistemas, nomeadamente, funções de transferência, funções de resposta em frequência, funções de densidade espectral da resposta de sistemas sujeitos a uma entrada assumida como um processo de densidade espectral constante (ruído branco), e funções de resposta impulsiva.

Uma vez que as respostas dos sistemas estruturais medidas experimentalmente são obtidas na forma de séries discretas por amostragem, apresentaram-se as matrizes da formulação de estado de sistemas no tempo discreto e as suas relações com as matrizes de sistemas no tempo contínuo, na situação de um retentor de amostras de ordem 0 (ZOH), que corresponde a considerar que a entrada tem valores constantes em cada intervalo de amostragem.

Finalmente apresentaram-se as relações entre os parâmetros matriciais de modelos ARMAV e as matrizes da representação de estado de sistemas no tempo discreto.

Sempre que se considerou adequado, as diferentes formas de representação do comportamento dinâmico de sistemas estruturais foram ilustradas através dum exemplo simples, de modo a concretizar os aspectos abordados.

Capítulo 3

Ensaio *in situ* de Caracterização Dinâmica de Estruturas

3.1 Considerações gerais

Neste capítulo são abordados os aspectos relacionados com a realização de ensaios *in situ* de caracterização dinâmica de estruturas, ou seja, com a medição experimental da resposta dos sistemas estruturais, com o objectivo de aplicar métodos de avaliação das suas características dinâmicas, e em particular, métodos de identificação modal estocástica.

Descrevem-se inicialmente os equipamentos, transdutores e sistemas de aquisição de dados, que podem ser utilizados na medição da resposta dos sistemas estruturais. As características dos equipamentos utilizados nas aplicações apresentadas no capítulo 6 são descritas com maior pormenor, fazendo-se no entanto, também referência a outros equipamentos que se consideram adequados para a medição da resposta de estruturas de engenharia civil, quando sujeitas às acções que normalmente sobre elas actuam (acções ambiente).

Referem-se em seguida diversas técnicas de ensaio dinâmico de estruturas, abordando-se com maior detalhe os procedimentos a adoptar em ensaios em que apenas é feita a medição da resposta dos sistemas estruturais.

Focam-se também algumas questões, na sua maioria de índole mais prática, relacionadas com o planeamento dos ensaios, mas que envolvem também a utilização de modelos de elementos finitos na definição dos pontos a instrumentar e na escolha dos graus de liberdade de referência.

Finalmente, abordam-se os procedimentos de pré-processamento que normalmente é necessário aplicar aos registos de resposta obtidos experimentalmente. Essa é uma fase importante da análise da informação obtida *in situ*, onde deve ser feita uma verificação da qualidade dos registos adquiridos, identificando-se e corrigindo-se eventuais problemas.

3.2 Transdutores e sistemas de aquisição de dados

Tendo em vista a aplicação de métodos de identificação modal estocástica, a observação da resposta dos sistemas estruturais é efectuada através de transdutores que transformam uma grandeza

física em que se exprime a resposta dos sistemas (deslocamento, velocidade, aceleração ou extensão) num sinal eléctrico proporcional a essa grandeza. Em muitos casos o sinal eléctrico de resposta dos transdutores não se encontra ainda numa forma apropriada para ser medida e processada directamente, sendo necessário condicioná-lo adequadamente para esse fim. Assim, os transdutores estão normalmente associados a condicionadores de sinal, cujas funções dependem muito do tipo de transdutor, mas que envolvem, usualmente, a geração de sinais de excitação e a amplificação e filtragem dos sinais de resposta. Nalguns transdutores, parte ou a totalidade dos circuitos de condicionamento estão incorporados neles próprios.

No fim da cadeia de observação (medição) da resposta das estruturas, estão os sistemas de registo ou armazenamento da informação. Actualmente esses sistemas consistem, normalmente, em sistemas de aquisição de dados, com conversão analógica/digital (ADC), associados a computadores digitais com unidades (disco rígido) para armazenamento da informação. Para este fim, utilizaram-se também (embora actualmente em desuso) registadores em filme fotográfico, registadores em papel, ou gravadores em fita magnética.

Importa referir que a tendência actual no desenvolvimento de transdutores para medição da resposta dinâmica de estruturas é a de uma maior miniaturização, utilizando tecnologia MEMS (*micro electro mechanical systems*), e de incorporação dos circuitos de condicionamento e também da própria digitalização dos sinais, nos transdutores em si. Esta tendência tem-se traduzido nas tecnologias que são designadas por *Smart Sensors* e *Network Sensors*, que deram já origem à norma IEEE P1451.2-1997 (IEEE, 1997) e que deverão ter desenvolvimentos apreciáveis num futuro próximo.

Para a medição da resposta das estruturas de engenharia civil às acções ambiente, há dois requisitos importantes que devem ser satisfeitos pelos equipamentos de toda a cadeia de medição (a começar pelos transdutores):

- devem ter uma boa sensibilidade, que se traduz na capacidade de medir movimentos extremamente pequenos dos sistemas estruturais; em muitas situações, nomeadamente em estruturas mais rígidas, as respostas induzidas pelas acções ambiente têm amplitudes muito pequenas, tornando-se então necessário que os equipamentos sejam muito sensíveis para que da análise das respostas medidas se possa extrair informação de interesse sobre as características dos sistemas estruturais;
- devem ter uma resposta em frequência adequada para a gama de frequências em que se encontram os principais modos de vibração das estruturas de engenharia civil; tal significa que deverão ter uma boa resposta nas baixas frequências; por exemplo, numa das aplicações apresentadas no capítulo 6, a ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa, a frequência do 1º modo de vibração transversal é de 0,070 Hz, o que ilustra bem a importância de utilizar

equipamento com capacidade de medir nessa gama de frequências, sob pena de não se conseguir identificar as características dos principais modos de vibração de estruturas muito flexíveis.

Descrevem-se em seguida as características dos transdutores que podem ser utilizados na medição da resposta das estruturas de engenharia civil. Abordam-se também os sistemas de aquisição de dados e finalmente descreve-se um tipo de equipamento, os macro-sismógrafos, que associam numa unidade independente, os diversos elementos constituintes dum sistema de medição da resposta (transdutores, sistema de aquisição e unidades de armazenamento dos registos).

3.2.1 Transdutores de medição da resposta

A resposta dos sistemas estruturais pode ser observada em termos de qualquer uma das grandezas cinemáticas, deslocamento, velocidade ou aceleração, que descrevem o movimento dos seus pontos ao longo do tempo. Podem-se também observar as extensões em determinadas zonas das estruturas, ou até, por intermédio das extensões, avaliar as forças em determinados elementos (por exemplo num tirante).

Em princípio é indiferente medir qualquer uma das grandezas cinemáticas, no entanto, na resposta em deslocamento tornam-se mais evidentes as componentes de baixa frequência, enquanto que na resposta em aceleração sobressaem mais as componentes com frequências mais altas (Caetano, 2000). Assim, para sistemas estruturais com frequências naturais de vibração com valores baixos, seria mais apropriado medir a sua resposta em deslocamento.

Note-se, no entanto, que a medição da resposta em deslocamento com a maioria dos equipamentos actualmente existentes e sempre que também se pretende medir a componente *estática* dessa resposta, tem que ser feita em termos relativos. Os deslocamentos duma estrutura são portanto medidos relativamente a uma base de referência (em princípio exterior à estrutura, mas que também pode ser um ponto da própria estrutura desde que tenha movimentos muito pequenos em relação aos pontos onde a resposta é observada, por exemplo, num tabuleiro duma ponte, a secção de apoio sobre um pilar). Esta exigência dificulta bastante a medição da resposta em termos de deslocamento.

Assim, na prática, a grandeza de resposta que é usualmente medida é a aceleração, o que tem demonstrado ser uma opção adequada para a identificação modal de estruturas de engenharia civil.

Descrevem-se em seguida as características gerais de diversos tipos de transdutores que podem ser utilizados na medição da resposta das estruturas. Abordam-se com mais detalhe os acelerómetros, em especial os do tipo utilizado nos exemplos de aplicação apresentados no capítulo 6, mas referem-se também outros equipamentos, tais como transdutores de velocidade, transdutores laser

de velocidade e de deslocamento, LVDT's, transdutores baseados em sistemas de satélites de navegação global, transdutores baseados em interferometria de micro-ondas e extensómetros.

3.2.1.1 Acelerómetros

Acelerómetros piezoeléctricos:

Os acelerómetros piezoeléctricos baseiam-se na propriedade que alguns cristais apresentam de, quando sujeitos a uma deformação, gerarem cargas eléctricas proporcionais a essa deformação. Essa propriedade é atribuível ao facto de que a deformação corresponde a uma alteração de forma que, num cristal que não possua um centro de simetria de carga, resulta na geração de uma carga eléctrica (Walter, 1999). Há diversos cristais que apresentam a propriedade de piezoelectricidade, tais como o quartzo, a turmalina ou os materiais cerâmicos policristalinos.

As propriedades dos cristais piezoeléctricos podem ser aproveitadas em diferentes formas de funcionamento, donde resultam transdutores piezoeléctricos de características também diferentes. Os acelerómetros piezoeléctricos podem assim ser construídos colocando os cristais num funcionamento em flexão, compressão ou corte (ver figura 3.1). Em qualquer dos modos de funcionamento, os acelerómetros piezoeléctricos são fundamentalmente constituídos por uma base, uma massa, por vezes designada por massa sísmica, e o elemento piezoeléctrico. Quando o acelerómetro é sujeito a uma aceleração, a massa sísmica induz uma força ($F = m \cdot a$) no elemento piezoeléctrico, fazendo com que neste se gere uma diferença de potencial proporcional à aceleração.

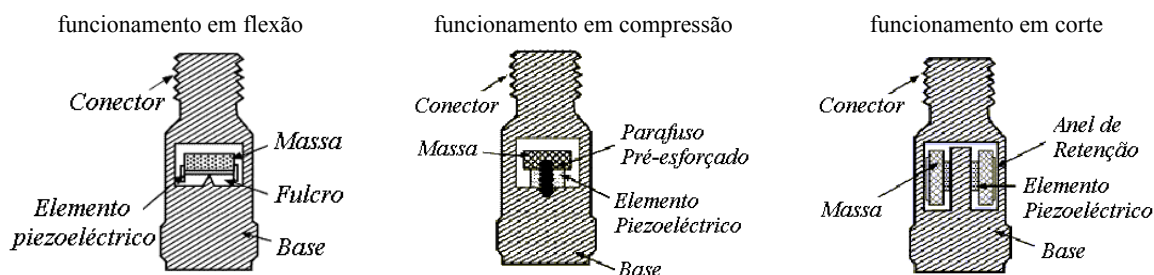


Figura 3.1 – Modos de funcionamento dos acelerómetros piezoeléctricos (<http://www.imi-sensors.com>).

No modo de funcionamento em flexão o elemento piezoeléctrico é ligado à massa sísmica sob a forma de uma viga com dois tramos em balanço. Os acelerómetros com este tipo de funcionamento têm, em geral, uma baixa frequência de ressonância e uma boa sensibilidade, sendo, de entre os acelerómetros piezoeléctricos, dos mais apropriados para aplicações em que é necessário medir movimentos de pequena amplitude e com componentes de baixa frequência.

O modo de funcionamento em compressão é talvez o que é mais fácil de entender. Neste caso, o cristal piezoeléctrico é colocado entre a massa sísmica e a base do acelerómetro, sendo fixo através

de um parafuso pré-esforçado. O cristal ao ser comprimido pela massa sujeita a uma aceleração, gera uma diferença de potencial proporcional a essa aceleração. Os acelerómetros piezoelétricos, com este tipo de construção, são adequados para medir movimentos com frequências elevadas.

No modo de funcionamento em corte, o elemento piezoelétrico e a massa sísmica ficam fixos a um fuste vertical central, por intermédio de um anel de retenção (conforme ilustrado na figura 3.1). O cristal piezoelétrico está assim sujeito a um estado de tensão de corte.

A maioria dos acelerómetros piezoelétricos não são dos mais adequados para medir movimentos com componentes de baixa frequência e de pequena amplitude, aspectos estes que são de grande importância para aplicações no domínio da identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil. Há no entanto alguns modelos que apresentam características que já podem ser consideradas como bastante boas para esse tipo de aplicações. No quadro 3.1 apresentam-se alguns desses acelerómetros piezoelétricos, indicando-se as suas características (com esse quadro não se pretende ser exaustivo, mas apenas apresentar alguns exemplos).

Quadro 3.1 – Características gerais de alguns acelerómetros piezoelétricos com boa sensibilidade.

	<p>Marca: ENDEVCO (http://www.endevco.com)</p> <p>Modelo: 7754A-1000 Isotron</p> <p>Sensibilidade: 1000 mV/g</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 5,0$ g</p> <p>Resposta dinâmica: ± 1dB entre 0,01 Hz e 2 kHz</p>
	<p>Marca: IMI Sensors (PCB Piezotronics) (http://www.imi-sensors.com)</p> <p>Modelo: 626A03</p> <p>Sensibilidade: 1000 mV/g</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 5,0$ g</p> <p>Resposta dinâmica: $\pm 5\%$ entre 0,5 Hz e 2 kHz</p>
	<p>Marca: ENDEVCO (http://www.endevco.com)</p> <p>Modelo: 86</p> <p>Sensibilidade: 10000 mV/g</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 0,5$ g</p> <p>Resposta dinâmica: ± 1dB entre 0,01 Hz e 100 Hz</p>
	<p>Marca: IMI Sensors (PCB Piezotronics) (http://www.imi-sensors.com)</p> <p>Modelo: 626A04</p> <p>Sensibilidade: 10000 mV/g</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 0,5$ g</p> <p>Resposta dinâmica: $\pm 5\%$ entre 0,1 Hz e 200 Hz</p>

Acelerómetros piezoresistivos e capacitivos:

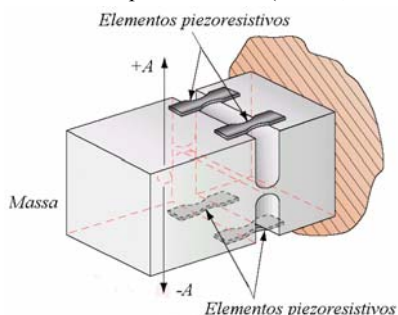
Nos acelerómetros piezoresistivos explora-se uma propriedade que vários materiais possuem, que é designada por efeito piezoresistivo, e que consiste na alteração da resistência eléctrica resultante

da deformação a que os materiais estão sujeitos. O efeito piezoresistivo num material pode ser quantificado através do *gage factor* (Karolys e Pender, 1989) que exprime a relação entre a variação relativa de resistência eléctrica e a correspondente extensão. Um dos materiais que apresenta um maior *gage factor* é a sílica sendo por isso utilizado na construção de acelerómetros piezoresistivos.

Os acelerómetros piezoresistivos são constituídos por uma massa ligada a uma viga em flexão (ver figura 3.2) à qual estão ligados os elementos piezoresistivos (sílica) formando uma ponte de *Weathstone* activa. Quando a massa sofre uma aceleração, os elementos de sílica deformam-se e a ponte de *Weathstone* fica desequilibrada, dando origem a um sinal eléctrico proporcional à aceleração.

Os acelerómetros capacitivos têm uma construção semelhante à dos piezoresistivos, envolvendo também uma massa ligada a uma viga em flexão (ver figura 3.2). Os elementos sensíveis são no entanto colocados de modo a formar uma meia-ponte capacitiva. Quando a massa é sujeita a uma aceleração essa ponte desequilibra-se, gerando-se um sinal proporcional a essa aceleração.

acelerómetro piezoresistivo (Walter, 1999)



acelerómetro capacitivo (Maia *et al.*, 1998)

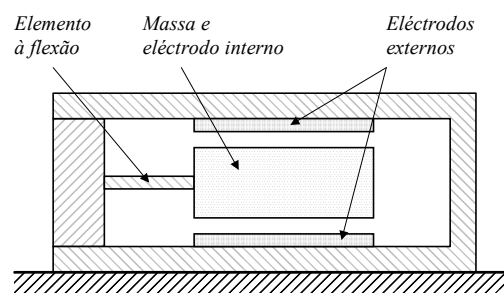


Figura 3.2 – Esquemas de um acelerómetro piezoresistivo e de um acelerómetro capacitivo.

Tanto os acelerómetros piezoresistivos como os capacitivos têm uma boa resposta nas baixas frequências, chegando mesmo até DC, uma característica que não é possível obter nos acelerómetros piezoeléctricos.

Uma outra diferença entre os acelerómetros piezoeléctricos e os piezoresistivos e capacitivos é o facto de que os primeiros são transdutores em que o sinal eléctrico proporcional à aceleração é gerado no próprio transdutor, enquanto que nos segundos é necessário fornecer aos transdutores um sinal eléctrico de alimentação. Por este motivo, os acelerómetros piezoeléctricos podem ser considerados como transdutores activos, e os piezoresistivos e capacitivos como transdutores passivos.

No quadro 3.2 indicam-se as características gerais de alguns acelerómetros capacitivos que podem ser considerados como tendo uma boa sensibilidade e uma resposta em frequência adequada para aplicações no domínio da caracterização dinâmica de estruturas de engenharia civil.

Quadro 3.2 – Características gerais de alguns acelerómetros capacitivos com boa sensibilidade.

	<p>Marca: ENDEVCO (http://www.endevco.com) Modelo: 7290A-2 Microtron Sensibilidade: 1000 ± 20 mV/g (a 100 Hz) Gama de amplitudes: $\pm 2,0$ g Resposta dinâmica: ± 1dB entre 0 Hz e 35 Hz</p>
	<p>Marca: KISTLER (http://www.kistler.com) Modelo: 8312A2 K-BEAM Sensibilidade: 1000 mV/g Gama de amplitudes: $\pm 2,0$ g Resposta dinâmica: $\pm 5\%$ entre 0 Hz e 300 Hz</p>
	<p>Marca: KISTLER (http://www.kistler.com) Modelo: 8310A2 K-BEAM Sensibilidade: 1000 mV/g Gama de amplitudes: $\pm 2,0$ g Resposta dinâmica: $\pm 5\%$ entre 0 Hz e 300 Hz</p>

Acelerómetros de tipo force balance ou de tipo servo:








Os acelerómetros de tipo *force balance* ou de tipo servo são constituídos por uma massa e por um mecanismo servo que controla a posição dessa massa. Ao ser sujeita a uma aceleração, a massa tende a mover-se, havendo um elemento sensível que detecta esse movimento e dá origem a um sinal de erro no ciclo servo, criando um fluxo de corrente numa bobina que gera uma força magnética que equilibra a força induzida pela aceleração na massa. O valor da corrente necessária para manter a massa na sua posição é assim proporcional à aceleração que sobre ela actua.

As primeiras aplicações dos acelerómetros de tipo servo foram em sistemas inerciais de navegação de aeronaves (Maia *et al.*, 1998). As suas características, nomeadamente a resposta dinâmica até DC e a grande sensibilidade fazem com que sejam os acelerómetros mais apropriados para aplicações no domínio da identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil, nomeadamente para estruturas muito flexíveis (com frequências naturais de vibração com valores muito baixos) ou para estruturas em que os níveis de resposta, induzidos pelas acções ambiente, são muito baixos.

Os acelerómetros de tipo *force balance* podem ser considerados como transdutores passivos, uma vez que o seu funcionamento exige que lhes seja fornecido um sinal eléctrico de alimentação.

No quadro 3.3 apresentam-se as características gerais de alguns acelerómetros de tipo *force balance*, disponíveis actualmente no mercado.

Quadro 3.3 – Características gerais de alguns acelerómetros de tipo *force balance*.

	<p>Marca: KISTLER (http://www.kistler.com)</p> <p>Modelo: 8330A2.5 ServoK-BEAM</p> <p>Sensibilidade: 1500 mV/g</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 2,5$ g</p> <p>Resposta dinâmica: $\pm 5\%$ entre 0 Hz e 300 Hz</p>
	<p>Marca: Kinematics (http://www.kinematics.com)</p> <p>Modelos: FBA11 e FBA23 (a fotografia refere-se a um FBA23)</p> <p>Gama de amplitudes: ± 1 g (ou, por opção, $\pm 0,1$ g, $\pm 0,25$ g, $\pm 0,5$ g, ± 2 g)</p> <p>Gama dinâmica: 135 dB de 0,01 Hz a 50 Hz</p> <p>Resposta dinâmica: de DC a 50 Hz</p>
	<p>Marca: Kinematics (http://www.kinematics.com)</p> <p>Modelo: Episensor ES-U (uniaxial)</p> <p>Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25$ g, $\pm 0,5$ g, ± 1 g, ± 2 g ou ± 4 g</p> <p>Gama dinâmica: 145 dB</p> <p>Resposta dinâmica: de DC a 200 Hz</p>
	<p>Marca: Kinematics (http://www.kinematics.com)</p> <p>Modelo: Episensor ES-T (triaxial)</p> <p>Gama de amplitudes: configurável em $\pm 0,25$ g, $\pm 0,5$ g, ± 1 g, ± 2 g ou ± 4 g</p> <p>Gama dinâmica: 155 dB</p> <p>Resposta dinâmica: de DC a 200 Hz</p>
	<p>Marca: GeoSig (http://www.geosig.ch)</p> <p>Modelo: AC-63 (triaxial)</p> <p>Gama de amplitudes: ± 2 g (ou, por opção, ± 1 g, ± 4 g)</p> <p>Gama dinâmica: 120 dB</p> <p>Resposta dinâmica: de DC a 100 Hz (ou, por opção, de DC a 200 Hz)</p>
	<p>Marca: Guralp (http://www.guralp.com)</p> <p>Modelo: CMG-5T (triaxial)</p> <p>Gama de amplitudes: ± 2 g (ou, por opção, ± 1 g, $\pm 0,5$ g, $\pm 0,1$ g)</p> <p>Gama dinâmica: 140 dB</p> <p>Resposta dinâmica: de DC a 100 Hz</p>
	<p>Marca: Sprengnether Instruments (http://www.sprengnether.com)</p> <p>Modelo: FBX28 (triaxial)</p> <p>Gama de amplitudes: ± 1 g (ou, por opção, $\pm 0,5$ g)</p> <p>Gama dinâmica: 145 dB</p> <p>Resposta dinâmica: de DC a 50 Hz</p>

Em todos os exemplos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6, foram utilizados acelerómetros de tipo *force balance*. Os macro-sismógrafos GSR-16, que foram utilizados em vários desses exemplos, estão equipados com acelerómetros de tipo servo, embora de uma marca que entretanto já desapareceu do mercado, a *Terra Technology*, motivo pelo qual as suas características não foram incluídas no quadro 3.3. Nos ensaios da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira, foram também utilizados acelerómetros de marca *Kinematics* e modelo FBA-11. Finalmente, em vários dos ensaios efectuados, foram já utilizados os acelerómetros da *Kinematics* de modelo ES-U.

Os acelerómetros ES-U são um transdutor relativamente recente da *Kinemetrics*, que apresenta alguns aperfeiçoamentos relativamente aos acelerómetros FBA-11 da mesma marca. Os acelerómetros ES-U têm uma resposta dinâmica entre DC e 200 Hz, uma gama dinâmica superior a 145 dB, um fim de escala ajustável, podendo ser configurados para valores de $\pm 0,25$ g, $\pm 0,5$ g, $\pm 1,0$ g, $\pm 2,0$ g ou $\pm 4,0$ g (o que os torna bastante versáteis).

Para a utilização dos acelerómetros ES-U (e também dos acelerómetros FBA-11 no caso dos ensaios efectuados na estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira), foi desenvolvido, no Centro de Instrumentação Científica (CIC) do LNEC, um sistema constituído por cinco unidades de alimentação dos acelerómetros e condicionamento dos respectivos sinais. Estas unidades contêm, fundamentalmente, duas baterias de 12 Volt para a alimentação e um circuito com amplificadores e filtros analógicos *anti-aliasing* para o condicionamento dos sinais. O factor de ganho nos amplificadores pode ter valores de 1, 2, 5, 50, 100, 200, 250, 400 e 1000.

Cada uma das unidades de alimentação e condicionamento é ligada a três acelerómetros através de cabos com 20 m de comprimento e é ligada ao sistema de aquisição através de cabos longos. Entre os cabos longos e o sistema de aquisição há apenas uma caixa de conversão dos cabos longos de três pares para terminais BNC que por sua vez são ligados ao sistema de aquisição com cabos coaxiais curtos (1,5 m). Na figura 3.3 representa-se esquematicamente o sistema de instrumentação desenvolvido para os acelerómetros ES-U (mais adiante far-se-á referência às soluções adoptadas nesse sistema para a aquisição dos sinais).

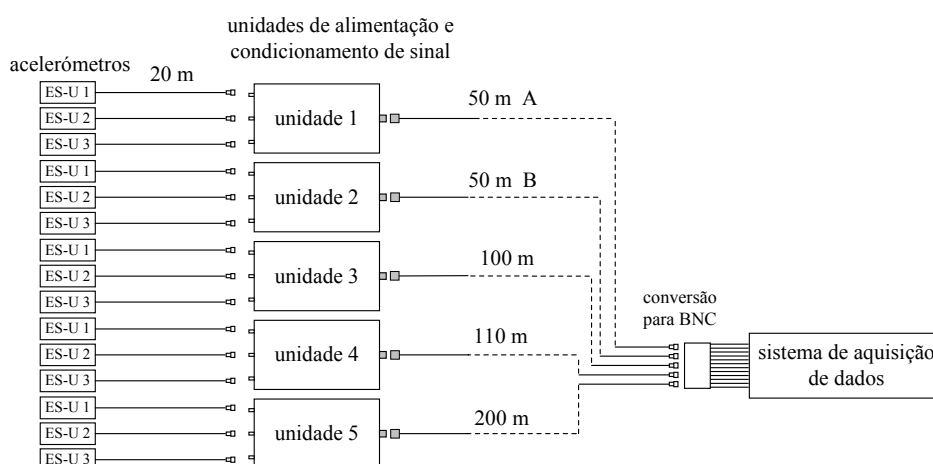


Figura 3.3 – Esquema do sistema desenvolvido para os acelerómetros ES-U.

O sistema desenvolvido para a medição da resposta em aceleração de estruturas tem bastante versatilidade, pois permite instrumentar estruturas de diversos tipos, de maneiras diferentes consoante os objectivos que se pretendam atingir com os ensaios. Com este sistema, os sinais podem ser amplificados antes de serem transmitidos pelos cabos de grande comprimento.

Note-se ainda que, considerando o fim de escala ajustável dos acelerómetros ES-U e o factor de ganho dos amplificadores das unidades de alimentação e condicionamento, é possível configurar todo o sistema de diversas maneiras, ajustadas ao nível de resposta que é necessário medir.

Na figura 3.4 podem-se observar alguns aspectos dos acelerómetros ES-U e das unidades de alimentação e condicionamento desenvolvidas para a sua utilização, em alguns dos casos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6.

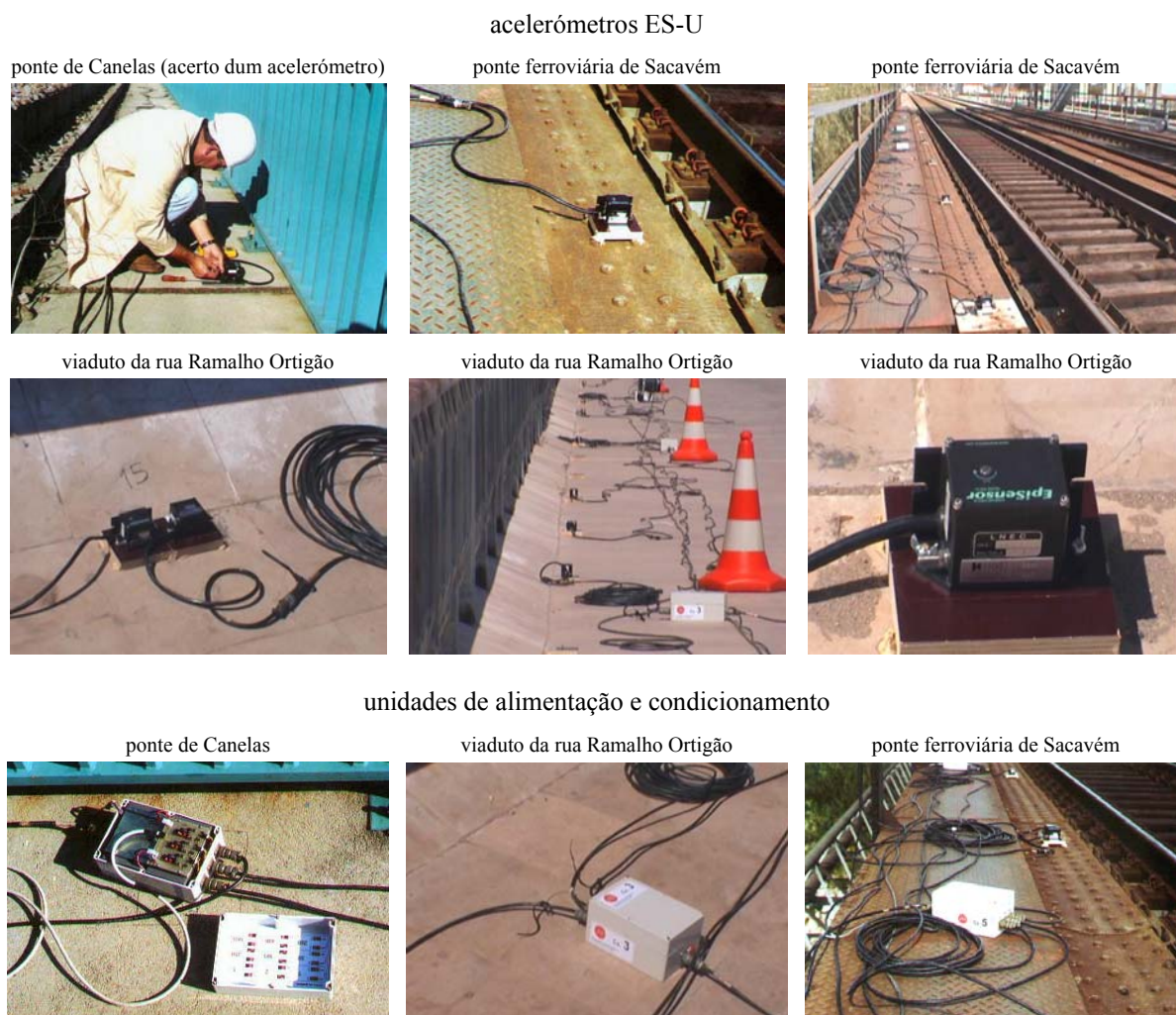


Figura 3.4 – Alguns aspectos dos acelerómetros ES-U e das unidades de alimentação e condicionamento.

3.2.1.2 Transdutores de velocidade

Uma alternativa aos acelerómetros anteriormente apresentados são os transdutores que permitem medir a resposta das estruturas em termos de velocidade. Há transdutores deste tipo com uma boa sensibilidade o que os torna adequados para ensaios em que é necessário medir respostas com amplitudes pequenas. Em geral a resposta em frequência deste tipo de transdutores introduz um corte na zona das baixas frequências, podendo-se por isso colocar algumas reservas quanto à sua utilização

em estruturas com frequências naturais de vibração muito baixas. Os transdutores deste tipo têm normalmente grande utilização no domínio da monitorização de movimentos sísmicos.

No quadro 3.4 apresentam-se as características gerais de alguns transdutores de velocidade, disponíveis actualmente no mercado.

Quadro 3.4 – Características gerais de alguns transdutores de velocidade.

	<p>Marca: Geotech Instruments (http://www.geoinstr.com)</p> <p>Modelo: KS2000 (triaxial)</p> <p>Sensibilidade: 2000 V/(m/s)</p> <p>Gama de frequências: de 0,008 Hz a 50 Hz</p>
	<p>Marca: Sprengnether Instruments (http://www.sprengnether.com)</p> <p>Modelo: WB-223 (triaxial)</p> <p>Sensibilidade: 2000 V/(m/s)</p> <p>Gama de frequências: de 0,0167 Hz a 32 Hz</p>
	<p>Marca: Sprengnether Instruments (http://www.sprengnether.com)</p> <p>Modelo: WB-113 (triaxial)</p> <p>Sensibilidade: 2000 V/(m/s)</p> <p>Gama de frequências: de 0,0167 Hz a 50 Hz</p>
	<p>Marca: Sprengnether Instruments (http://www.sprengnether.com)</p> <p>Modelo: S-3000EQ (triaxial), S-3000EQV (vertical), S-3000EQH (horizontal)</p> <p>Sensibilidade: 278 V/(m/s) ou 500 V/(m/s)</p> <p>Gama de frequências: de 1 Hz a 250 Hz</p>
	<p>Marca: GeoSig (http://www.geosig.ch)</p> <p>Modelo: VE-53 (triaxial)</p> <p>Sensibilidade: 1000 V/(m/s)</p> <p>Gama de frequências: de 1 Hz a 50 Hz ou de 1 Hz a 315 Hz</p>
	<p>Marca: GeoSig (http://www.geosig.ch)</p> <p>Modelo: VE-13(triaxial), VE-12(biaxial), VE-11-V(vertical), VE-11-H(horizontal)</p> <p>Gama dinâmica: > 96 dB</p> <p>Gama de frequências: de 1 Hz a 315 Hz</p>
	<p>Marca: GeoSig (http://www.geosig.ch)</p> <p>Modelo: VE-23(triaxial), VE-22(biaxial), VE-21-V(vertical), VE-21-H(horizontal)</p> <p>Gama dinâmica: > 96 dB</p> <p>Gama de frequências: de 4,5 Hz a 315 Hz</p>






3.2.1.3 Transdutores laser de velocidade

Os transdutores laser de velocidade, também designados por vibrómetros laser ou LDV (*laser doppler vibrometer*), são transdutores de velocidade, cujo princípio de funcionamento baseia-se no efeito de *doppler*. Este efeito consiste na alteração de frequência que um raio luminoso (laser) sofre ao ser reflectido por um objecto em movimento, sendo essa alteração proporcional à velocidade do objecto. Um transdutor laser de velocidade é assim um sistema óptico que pode ser utilizado para

medir a velocidade instantânea num ponto, ou em pontos numa estrutura. Com um transdutor deste tipo, é medida a componente da velocidade na direcção do raio laser incidente na estrutura. Os equipamentos deste tipo envolvem componentes ópticas sofisticadas e técnicas de processamento de sinal específicas, o que os torna dispendiosos. Existem actualmente sistemas que permitem fazer o varrimento numa malha de pontos definida na estrutura a ensaiar, possibilitando assim efectuar medições com uma resolução espacial bastante fina e em zonas de difícil acesso.

No quadro 3.5 apresentam-se as características gerais de alguns transdutores laser de velocidade, disponíveis actualmente no mercado.

Quadro 3.5 – Características gerais de alguns transdutores laser de velocidade.

	<p>Marca: Ometron/Bruel & Kjaer (http://www.bksv.com)</p> <p>Modelo: 8333 vibrómetro laser para um único ponto</p> <p>Gama de velocidades: de 0,01 $\mu\text{m/s}$ a 100 mm/s</p> <p>Gama de frequências: de 0,01 Hz a 50 kHz</p> <p>Distância de trabalho: de 0,05 m a 200 m (sem tratamento da superfície)</p>
	<p>Marca: Ometron/Bruel & Kjaer (http://www.bksv.com)</p> <p>Modelo: 8329 vibrómetro laser para um único ponto</p> <p>Gama de velocidades: de 65 $\mu\text{m/s}$ a 425 mm/s</p> <p>Gama de frequências: de 0,1 Hz a 25 kHz</p> <p>Distância de trabalho: de 0,4 m a 25 m (sem tratamento da superfície)</p>
	<p>Marca: Polytec (http://www.polytec.com)</p> <p>Modelo: OFV-3001 e OFV-303 vibrómetro laser para um único ponto</p> <p>Gama de velocidades: de 10 mm/s a 10 m/s</p> <p>Gama de frequências: de DC Hz a 50 kHz</p> <p>Distância de trabalho: de 65 mm até 250 m (com tratamento da superfície)</p>
	<p>Marca: Ometron/Bruel & Kjaer (http://www.bksv.com)</p> <p>Modelo: 8330 vibrómetro laser de varrimento</p> <p>Gama de velocidades: de 1 $\mu\text{m/s}$ a 2 m/s</p> <p>Gama de frequências: de 0,1 Hz a 200 kHz</p> <p>Distância de trabalho: até 200 m (dependendo do tratamento da superfície)</p> <p>Ângulo de varrimento: $25^\circ \times 25^\circ$</p>
	<p>Marca: Polytec (http://www.polytec.com)</p> <p>Modelo: PSV-300 vibrómetro laser de varrimento</p> <p>Gama de velocidades: de 10 mm/s a 10 m/s</p> <p>Gama de frequências: de DC Hz a 40 kHz</p> <p>Distância de trabalho: de 65 mm até 250 m (com tratamento da superfície)</p> <p>Ângulo de varrimento: $40^\circ \times 40^\circ$</p>

Para exemplificar algumas aplicações dos transdutores laser de velocidade, na observação da resposta dinâmica de estruturas de engenharia civil, referem-se os trabalhos de Cunha e Caetano (1999) que utilizam um vibrómetro laser para avaliar as frequências naturais de vibração de tirantes da ponte Vasco da Gama, com a vantagem de assim não ser necessário um contacto directo com os

pontos dos tirantes onde a resposta é observada, e também de Kaito *et al.* (2001) que utilizam um vibrômetro laser de varrimento, para medir a resposta dum painel de betão armado do tabuleiro de um viaduto, com vista a identificar modos locais desse painel, através dum método de identificação modal estocástica.

3.2.1.4 Transdutores de deslocamento de indutância variável

Os transdutores de deslocamento de indutância variável, usualmente designados por LVDT (*linear variable-differential transformers*), são constituídos por 3 bobinas enroladas num tubo cilíndrico isolado que contém no seu interior um núcleo magnético móvel.

Conforme se indica na figura 3.5, onde se representa um corte de um LVDT, nestes transdutores há duas bobinas secundárias localizadas de ambos os lados de uma bobina primária. O núcleo central faz com que o campo magnético gerado pela bobina primária esteja acoplado com os campos das bobinas secundárias. Quando o núcleo está numa posição central (figura 3.5 a)), a voltagem induzida em cada bobina é igual e a saída total é nula, porque ambas se cancelam. Quando o núcleo se desloca para o lado esquerdo (figura 3.5 b)), a primeira bobina secundária fica mais fortemente acoplada com a bobina primária do que a segunda bobina secundária; a maior voltagem da primeira bobina secundária dá origem a um sinal de saída que está em fase com a voltagem da bobina primária. De forma idêntica, quando o núcleo se desloca para a direita (figura 3.5 c)), a segunda bobina secundária fica mais fortemente acoplada com a bobina primária do que a primeira bobina secundária; resulta assim um sinal de saída que está em oposição de fase com a voltagem da bobina primária.

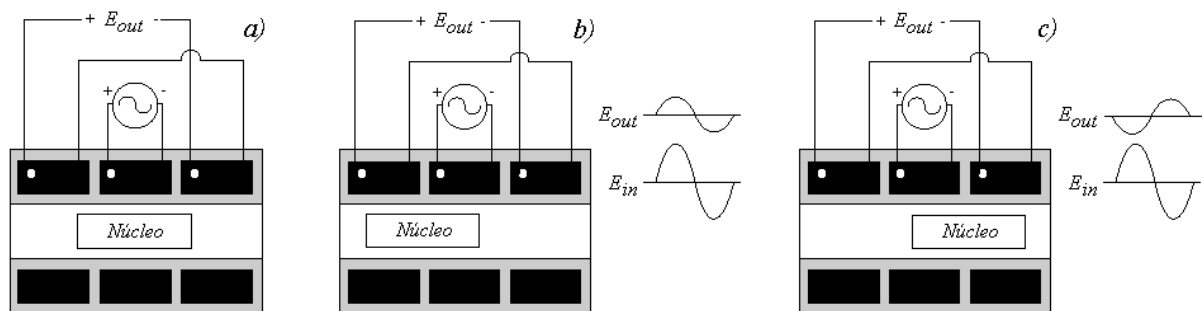


Figura 3.5 – Esquema do funcionamento de um LVDT (<http://www.natinst.com>).

Os condicionadores de sinal de um LVDT geram um sinal sinusoidal para a bobina primária e de forma síncrona desmodulam o sinal de saída das bobinas secundárias, resultando assim um sinal DC que é proporcional ao deslocamento do núcleo.

Nos LVDT, a frequência do sinal de excitação pode ser de 50 Hz até mais de 25 kHz, conseguindo-se melhores sensibilidades com sinais de 1 a 5 kHz. Esta frequência do sinal de excitação deve ser igual a pelo menos 10 vezes a máxima frequência da resposta medida com o transdutor.

Os LVDT são transdutores passivos, uma vez que tem de lhes ser fornecido um sinal eléctrico de alimentação. Para exemplificar, indicam-se no quadro 3.6 as características gerais de alguns transdutores LVDT disponíveis actualmente no mercado.

Quadro 3.6 – Características gerais de alguns transdutores LVDT.

	<p>Marca: Micro-Epsilon (http://www.micro-epsilon.com)</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 1 / 3 / 5 / 10 / 15 / 25$ mm</p> <p>Sensibilidade: 133 mV/V/mm (no modelo de ± 1 mm)</p> <p>Frequência de excitação: 1 a 5 kHz</p>
	<p>Marca: Omega (http://www.omega.com)</p> <p>Modelo: LD200</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 1,25 / 2,5 / 5 / 7,5 / 10$ mm</p> <p>Sensibilidade: 250 mV/V/mm (no modelo de $\pm 1,25$ mm)</p> <p>Frequência de excitação: 1 a 10 kHz</p>
	<p>Marca: Omega (http://www.omega.com)</p> <p>Modelo: LD300</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 15 / 25 / 50 / 100 / 150 / 250 / 300$ mm</p> <p>Sensibilidade: 34 mV/V/mm (no modelo de ± 15 mm)</p> <p>Frequência de excitação: 1 a 10 kHz</p>
	<p>Marca: Sentech (http://www.sentechlvdt.com)</p> <p>Modelo: 75PCAC e 75PCDC</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 1,27 / 3,18 / 6,35 / 12,7 / 25,4 / 50,8 / 76,2 / 127 / 254$ mm</p> <p>Sensibilidade: 165 mV/V/mm (no modelo de $\pm 1,27$ mm)</p> <p>Frequência de excitação: 400 Hz a 10 kHz</p>
	<p>Marca: HBM (http://www.hbm.com)</p> <p>Modelo: WA L</p> <p>Gama de amplitudes: $\pm 2 / 10 / 20 / 50 / 100 / 200 / 500$ mm</p> <p>Sensibilidade: 80 mV/V</p> <p>Frequência de excitação: 4,8 kHz</p>

3.2.1.5 Transdutores laser de deslocamento

A observação da resposta em deslocamento de estruturas de engenharia civil pode também ser efectuada através de transdutores baseados em sistemas laser. Actualmente, há pelo menos dois sistemas disponíveis, com princípios de funcionamento ligeiramente diferentes.




O primeiro dos referidos sistemas baseia-se na utilização de um transmissor laser e de um receptor optoelectrónico activo que deve ficar colocado no ponto onde se pretende medir a resposta da

estrutura. O transmissor e o receptor devem assim ser posicionados de modo a que o raio laser forme uma linha de referência desde o transmissor até ao centro da área sensível do receptor. Quando o receptor se desloca em relação à linha de referência, devido aos movimentos do ponto onde está colocado, a posição do raio laser na área do receptor altera-se também. Através do sistema optoelectrónico, a posição do centro de gravidade do raio laser na área do receptor é continuamente determinada, em termos das suas coordenadas x e y , e transformada em sinais analógicos, a elas proporcionais.

O segundo sistema é constituído por um emissor/receptor optoelectrónico e por um alvo reflector a colocar no ponto cujos deslocamentos se pretendem medir. Neste caso, o emissor/receptor é apontado para o alvo e mantido numa posição fixa. O raio laser emitido é reflectido pelo alvo e recebido pelo emissor/receptor que o reconhece. Quando o alvo se desloca, a posição do raio reflectido altera-se também nos componentes optoelectrónicos do emissor/receptor, originando, após o condicionamento adequado, sinais analógicos proporcionais aos deslocamentos do alvo.

Ambos os sistemas acima descritos são comercializados pela empresa Finlandesa *Noptel Oy*, indicando-se no quadro 3.7 as características de 3 dos modelos actualmente existentes. Há já vários casos de aplicação deste tipo de transdutores na observação do comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil; refere-se, nomeadamente, a aplicação num sistema de monitorização que esteve instalado durante dois anos na ponte *Skarnsundet* (Myrvoll *et al.*, 1994) na costa Oeste da Noruega.

Quadro 3.7 – Características gerais de alguns transdutores laser de deslocamento.

	<p>Marca: Noptel Oy (http://www.noptel.fi) Modelo PSM-200 Área de medição: 200 mm Distância de trabalho: de 1 m a 400 m (dependendo das condições) Máxima frequência de amostragem: 500 Hz Resolução: < 0,1 mm</p>
	<p>Marca: Noptel Oy (http://www.noptel.fi) Modelo PSM-90 Área de medição: 90 mm Distância de trabalho: de 1 m a 100 m (dependendo das condições) Máxima frequência de amostragem: 500 Hz Resolução: < 0,01 mm</p>
	<p>Marca: Noptel Oy (http://www.noptel.fi) Modelo PSM-R Área de medição: de 0,12 m a 4,5 m (dependendo da distância) Distância de trabalho: de 10 m a 600 m Máxima frequência de amostragem: 100 Hz Resolução: de 0,1 mm a 30 mm (dependendo da distância e condições)</p>

3.2.1.6 Transdutores baseados em sistemas de satélites de navegação global

Uma das aplicações actuais da tecnologia dos sistemas de satélites de navegação global GNSS (*Global Navigation Satellite Systems*) é a observação de deslocamentos em estruturas de engenharia civil, nomeadamente em pontes de grande vão ou em edifícios altos. Nestas estruturas, dada a sua flexibilidade, os deslocamentos induzidos pelas acções a que estão sujeitas, nomeadamente pelo vento, têm amplitudes que são mensuráveis de forma inequívoca com a precisão que actualmente é possível obter com os transdutores baseados nos GNSS. Para estruturas de maior rigidez, pode-se considerar que o interesse desta tecnologia é ainda limitado, no entanto ela tem vindo a sofrer uma rápida evolução, sendo de prever que num futuro próximo o seu campo de aplicação se venha a alargar.

Na linguagem corrente, é usual referir os sistemas de satélites de navegação global apenas por sistema GPS (*Global Positioning System*), no entanto esta designação apenas se refere de facto a um dos sistemas actualmente existentes, o sistema desenvolvido nos EUA. Existe ainda o sistema GLONASS (*GLObal NAVigation Satellite System*) desenvolvido na Rússia e está também em desenvolvimento na Europa o sistema GALILEO que terá o lançamento do primeiro satélite em 2005 e deverá estar completamente operacional em 2008. Tanto o sistema GPS como o GLONASS são constituídos por uma rede de 24 satélites, enquanto que o GALILEO será constituído por uma rede de 30 satélites.

Os satélites de navegação global dispõem de relógios atómicos de elevada precisão e estão continuamente a transmitir sinais através de duas ondas designadas por L1 e L2. A posição na superfície da Terra de um receptor desses sinais é determinada a partir das distâncias desse receptor aos satélites, avaliadas com base no intervalo de tempo entre a transmissão dos sinais e a sua recepção. Para a determinação da latitude e longitude de um ponto, é necessário que pelo menos 3 satélites estejam em linha de vista com o ponto na Terra, enquanto que para a determinação da altitude são necessários pelo menos 4 satélites.

Para as aplicações que exigem maior precisão, com é o caso da observação de deslocamentos em estruturas de engenharia civil, utilizam-se técnicas que são designadas por DGPS (*Differential Global Positioning System*) que envolvem a utilização de um receptor num ponto fixo de referência a partir do qual são introduzidas correcções na determinação da posição de outros receptores colocados em pontos da estrutura. A introdução dessas correcções pode ser efectuada em tempo real se no receptor de referência for incluída uma unidade que transmite a informação que recebe dos satélites para os receptores colocados em pontos da estrutura, onde é logo efectuada o processamento que permite determinar com maior precisão a posição desses pontos – esta técnica é designada por RTK (*Real Time Kinematic*).

Como aplicações práticas da tecnologia dos satélites de navegação global na observação de deslocamentos em estruturas de engenharia civil, referem-se os trabalhos de: Ashkenazi e Roberts (1997) na ponte do Humber no Reino Unido, uma ponte suspensa com um vão central de 1410 m; Nakamura *et al.* (1999) na ponte Hakucho no Japão, uma ponte suspensa com um vão central de 720 m; Wang *et al.* (2001) nas pontes Tsing Ma, Kap Shui Mun e Ting Kau em Hong Kong, a primeira suspensa e as outras duas atirantadas; Celebi e Sanli (2002) em edifícios em Los Angeles; Kijewski-Correa e Kareem (2003) em edifícios em Chicago.

Na figura 3.6 podem-se observar as antenas GPS instaladas no topo das torres da ponte Akashi Kaikyo no Japão e da ponte Tsing Ma em Hong Kong.



ponte Akashi Kaikyo no Japão



ponte Tsing Ma em Hong Kong

Figura 3.6 – Antenas GPS instaladas em pontes suspensas (<http://www.leica-geosystems.com>).

É importante salientar que, para além da observação dos deslocamentos das estruturas a longo prazo, com a tecnologia actual dos sistemas de satélites de navegação global, é possível efectuar a observação de deslocamentos em regime dinâmico com frequências de amostragem de 10 Hz, o que já é suficiente para estruturas com longos períodos naturais de vibração.

Em termos da precisão que actualmente é possível obter com esta tecnologia, referem-se os valores indicados por Kijewski-Correa e Kareem (2003) de 3 mm para observações estáticas e de 5 mm para observações dinâmicas com frequências de amostragem de 10 Hz.

Um dos factores que afecta a fiabilidade da determinação da posição dum ponto, a partir dos sistemas de satélites de navegação global, é o número de satélites que estão em linha de vista com o ponto em questão. Quanto maior for esse número, mais fiável é a determinação da posição do ponto.

Em consequência, actualmente, alguns dos fabricantes de equipamentos para topografia ou para a observação de deslocamentos em estruturas, têm já receptores que permitem captar os sinais dos satélites de ambos os sistemas GPS e GLONASS, o que aumenta muito a probabilidade de em cada instante haver um maior número de satélites em linha de vista com o ponto cuja posição se pretende determinar.

Uma outra técnica que tem sido investigada (Barnes *et al.*, 2003) com vista a aumentar a precisão das medições de deslocamentos com base nos sistemas de satélites de navegação global, é a utilização dos chamados PL (*pseudolites*) que são transmissores colocados em Terra, em pontos fixos, que emitem sinais semelhantes aos dos satélites. É até possível, utilizando um número suficiente de PLs (pelo menos 4), dispensar totalmente a análise dos sinais emitidos pelos satélites.

3.2.1.7 Transdutores baseados em interferometria de micro-ondas

Nos estudos efectuados na ponte I-40 em Albuquerque, nos EUA, Farrar *et al.* (1998) testaram transdutores baseados em interferometria de micro-ondas. Trata-se de transdutores de deslocamento cujo princípio de funcionamento é semelhante ao dos transdutores laser de velocidade anteriormente apresentados, mas em que é efectuada uma interferometria de micro-ondas e não óptica.

Os transdutores testados por Farrar *et al.* (1998) são constituídos por um prato parabólico (no caso, com 61 cm de diâmetro) com um emissor/receptor de micro-ondas montado no alinhamento do seu foco. O eixo destes transdutores deve ser orientado de modo a ficar perpendicular à superfície da estrutura cujos deslocamentos se pretendem medir, sendo também vantajoso que essa superfície seja plana e não curva. Um dos aspectos que é apresentado como uma vantagem deste tipo de transdutores, é o facto de, para os materiais estruturais mais comuns (por exemplo, betão ou aço), não ser necessário colocar alvos reflectores na estrutura a observar. Teoricamente estes transdutores podem ser utilizados a várias centenas de metros, no entanto Farrar *et al.* (1998) referem ter efectuado testes apenas até distâncias de 65 m. Em termos da resolução que é possível obter com estes tipos de transdutores, os mesmos autores indicam o valor de 0,1 mm para respostas com frequências inferiores a 10 Hz.

Para além dos testes efectuados por Farrar *et al.* (1998), não é do conhecimento do autor deste trabalho, que tenham sido efectuadas outras aplicações práticas com este tipo de transdutores.

3.2.1.8 Extensómetros

Uma grandeza da resposta das estruturas que também pode ser medida experimentalmente é a extensão, através de transdutores apropriados designados por extensómetros. Note-se que de facto, com estes transdutores não se medem extensões mas sim deformações que, sendo referidas à base de medida de cada extensómetro, são imediatamente transformadas em extensões médias nessa base.

Os extensómetros são em geral mais adequados para efectuar observações localizadas em determinadas zonas do que para observar o comportamento global duma estrutura. Para este último fim é preferível medir deslocamentos, velocidades ou acelerações.

Na observação do comportamento dinâmico de estruturas de engenharia civil, os extensómetros podem ser utilizados para efectuar a avaliação dos efeitos dinâmicos de determinadas acções, como por exemplo o tráfego rodoviário ou ferroviário, permitindo quantificar os factores de amplificação dinâmica (DAF) associados a essas acções. Esta aplicação dos extensómetros tem sido efectuada pelo LNEC em diversos ensaios de recepção de estruturas de pontes e viadutos, sendo também de referir o trabalho de doutoramento de Calçada (2003).

Em termos de identificação modal de estruturas de engenharia civil, a maioria dos estudos têm sido efectuados com base na medição da resposta em aceleração, no entanto, é também possível desenvolver estudos de identificação modal com base em registos de extensões. Neste domínio é de referir o projecto de investigação que está actualmente em desenvolvimento nas Universidades de *Ghent* e de *Leuven* na Bélgica (Fib, 2003), onde estão a ser utilizados extensómetros de fibra óptica (do tipo rede de *Bragg*) com vista a aplicar técnicas de identificação modal e de detecção de danos.

Existem diversos tipos de extensómetros que podem ser aplicados na observação do comportamento de estruturas, nomeadamente:

- *Extensómetros mecânicos* ou *alongâmetros*: Trata-se de aparelhos de leitura manual com uma grande tradição na observação de obras, nomeadamente no LNEC. A sua utilização implica a colocação de bases próprias que definem a base de medida dos extensómetros nas zonas das estruturas onde se pretendem medir as extensões. Em Rosa (1974) faz-se uma descrição de vários aparelhos deste tipo, indicando-se também algumas regras gerais relativas à sua utilização. O facto de serem aparelhos de leitura manual, impossibilita a sua utilização com sistemas automáticos de aquisição de dados ou na observação do comportamento dinâmico de estruturas.
- *Extensómetros de corda vibrante*: São transdutores constituídos por uma corda vibrante de aço tensionada e solidamente presa entre as extremidades do extensómetro. A corda é forçada a vibrar através de um electroímã excitado por um impulso eléctrico e, após um período de estabilização, a frequência de vibração da corda é medida. Como esta frequência de vibração depende da tensão na corda, ou seja, é proporcional ao deslocamento entre as extremidades do extensómetro, torna-se possível avaliar a extensão média entre essas extremidades. No LNEC existe uma larga experiência na aplicação deste tipo de transdutores na observação a longo prazo do comportamento de estruturas de betão, quer em pontes quer em barragens. Note-se ainda que, dado o tempo de estabilização que é necessário para

efectuar a leitura da frequência de vibração da corda, os transdutores deste tipo não permitem efectuar leituras com frequências de amostragem rápidas, não sendo por isso adequados para a medição do comportamento dinâmico de estruturas.

- *Extensómetros eléctricos*: Neste tipo de extensómetros a deformação é convertida num sinal eléctrico resultante duma alteração na capacitância, indutância ou resistência do transdutor. Há assim os vários tipos de extensómetros eléctricos que se indicam em seguida:
 - *Extensómetros indutivos*. Em vários dos ensaios dinâmicos efectuados pelo LNEC em estruturas de pontes, cujos relatórios são indicados nas referências bibliográficas deste trabalho, foram utilizados extensómetros deste tipo. Fundamentalmente, são constituídos por um transdutor indutivo de deslocamento com uma base de medida.
 - *Extensómetros de resistência eléctrica*: São os extensómetros mais utilizados e que têm tido um maior campo de aplicações. O seu princípio de funcionamento baseia-se no facto de que num fio metálico, quando comprimido ou traccionado, verifica-se uma alteração de resistência eléctrica em função da alteração no seu comprimento, na sua secção e da sua resistividade específica.

Os extensómetros de resistência eléctrica são constituídos por uma resistência metálica, por uma base de material isolante adequado (de matéria plástica, papel ou pano) e pelos terminais de ligação. Há extensómetros de resistência eléctrica numa vasta gama de dimensões e de configurações, cada uma adequada a uma aplicação específica. Na figura 3.7 ilustram-se algumas das configurações existentes.

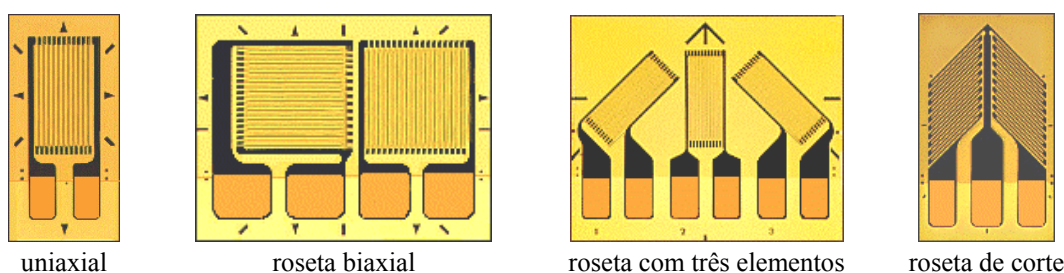


Figura 3.7 – Exemplos de extensómetros eléctricos de resistência (<http://www.vishay.com>).

Como num extensómetro sujeito a uma deformação, a variação relativa de resistência eléctrica é muito pequena, utiliza-se um circuito eléctrico, designado por ponte de *Wheatstone*, que permite transformar as variações de resistência em variações de potencial no circuito, as quais são, portanto, proporcionais às extensões que se pretendem medir.

Um aspecto particular da utilização dos extensómetros de resistência eléctrica, tem a ver com a sua fixação à superfície dos elementos estruturais onde se pretendem medir extensões, a qual deve ser efectuada utilizando colas adequadas e com um tratamento apropriado dessas superfícies. A protecção dos extensómetros após a sua

colocação é também um factor importante a ter em conta. Algumas recomendações relativas a estes aspectos são apresentadas em Rosa (1974).

- *Extensómetros piezoeléctricos*: Um extensómetro deste tipo é o modelo 740A02 da *PCB Piezotronics*. Trata-se de um transdutor constituído por um sensor de quartzo, com circuitos integrados, colocado num invólucro de titânio.

Para além dos extensómetros eléctricos dos tipos acima indicados, há ainda os *extensómetros capacitivos* (Fib, 2003) e os *extensómetros de semicondutores* (Dally *et al.*, 1993; Fib, 2003).

A maioria dos extensómetros eléctricos podem ser utilizados tanto para a observação do comportamento estático como dinâmico dos sistemas estruturais. A excepção são os extensómetros piezoeléctricos que apenas são adequados para medir a resposta dinâmica das estruturas.

- *Extensómetros de fibra óptica*: Recentemente, em virtude dos desenvolvimentos na tecnologia da fibra óptica, tem havido um aumento na aplicação de transdutores de fibra óptica, nomeadamente, de extensómetros, os quais estão a começar a ser uma alternativa relativamente aos extensómetros de resistência eléctrica, embora mais dispendiosa.

As grandes vantagens dos extensómetros de fibra óptica estão na sua sensibilidade e na sua capacidade de suportar condições ambientais adversas (humidade, temperatura elevada, ambiente corrosivo, interferências electromagnéticas) com o consequente bom desempenho a longo prazo. São também transdutores que podem ser aplicados tanto para a observação da resposta estática como da resposta dinâmica dos sistemas estruturais.

Em Portugal, é de referir o trabalho desenvolvido na FEUP e no INESC do Porto (Félix *et al.*, 2000) com vista a explorar as capacidades dos extensómetros de fibra óptica na área das estruturas de engenharia civil.

O funcionamento dos extensómetros de fibra óptica pode basear-se na alteração de fase, de amplitude (intensidade), de frequência ou de polaridade da luz, quando esta se propaga numa fibra óptica sujeita a uma deformação. Há assim diversos tipos de extensómetros de fibra óptica, os quais são indicados em seguida, sem se fazer a sua descrição detalhada, a qual pode ser consultada, por exemplo, em Dally *et al.* (1993) e Fib (2003):

- Extensómetros de interferometria (fase modulada):
 - Interferómetro de *Mach-Zehnder*.
 - Interferómetro de *Michelson*.
 - Interferómetro de *Fabry-Perot*.
 - Interferómetro de *Fabry-Perot* extrínseco.

- Interferómetro de *Sagnac*.
- Extensómetros de intensidade modulada.
- Extensómetros de frequência modulada:
 - Rede de *Bragg* (*Bragg grating*).
- Extensómetros de *Raman*.
- Extensómetros de *Brillouin*.

3.2.2 Sistemas de aquisição de dados

Um aspecto comum à maioria dos transdutores anteriormente descritos é o de que as grandezas de resposta dos sistemas estruturais, que com eles são medidas, são transformadas em sinais eléctricos a elas proporcionais. Assim, uma parte importante de qualquer equipamento que seja utilizado para medir a resposta dinâmica de estruturas é a que permite efectuar o registo desses sinais eléctricos, se possível, já em unidades físicas da grandeza correspondente. Conforme já referido, actualmente essa operação é efectuada através de sistemas de aquisição de dados, com placas de conversão analógica/digital (ADC), ligados a computadores digitais com unidades de memória (disco rígido) onde é efectuado o armazenamento das respostas observadas, sob a forma de séries discretas por amostragem.

No domínio da análise modal *clássica*, com controlo e medição das forças de excitação, é também muito comum a utilização de *analísadores*, que para além da conversão analógica/digital dos sinais de entrada e resposta, efectuam desde logo a análise necessária à avaliação de estimativas das funções de resposta em frequência (FRF), a qual envolve, essencialmente, a aplicação de janelas de processamento de sinal, a utilização do algoritmo da FFT e o cálculo de médias.

No campo da identificação modal estocástica, tem sido mais comum a utilização de sistemas de aquisição de dados, com os quais, as respostas medidas são armazenadas sob a forma de séries temporais discretas por amostragem. Uma vantagem em armazenar a informação experimental nessa forma não processada, tem a ver com a possibilidade de, posteriormente, se poder efectuar a sua análise através de métodos diferentes. Não é no entanto de pôr de lado a hipótese de utilizar sistemas que, tal como os analisadores referidos no parágrafo anterior, façam imediatamente, logo após a aquisição dos sinais de resposta, uma parte do processamento, como por exemplo a avaliação das estimativas das funções de densidade espectral dos sinais de resposta medidos. De facto, para uma das aplicações que será brevemente apresentada no capítulo 6, a identificação experimental das frequências de vibração de tirantes com vista a avaliar as forças neles instaladas, desenvolveu-se um programa de aquisição/processamento em que se procede dessa forma.

A operação mais importante que é efectuada num sistema de aquisição de dados é a conversão analógica/digital, por intermédio da qual os sinais contínuos analógicos provenientes dos transdutores e circuitos de condicionamento, são transformados em séries discretas por amostragem. Esta operação de conversão deve decorrer de modo a que as características dos sinais analógicos sejam representadas nas respectivas séries discretas, com suficiente precisão em termos de frequência, amplitude e fase.

O processo de conversão analógica/digital envolve dois conceitos importantes: a *amostragem*, que é a parte do processo relacionada com o intervalo de tempo entre os valores digitais discretos que são extraídos dos sinais analógicos; e a *quantização*, que é a parte do processo relacionada com a representação digital da amplitude dos sinais analógicos. A precisão da representação discreta em termos de frequência é apenas influenciada pela amostragem, enquanto que a precisão em termos de amplitude e fase é influenciada tanto pela amostragem como pela quantização.

Para que a representação discreta dum sinal contínuo seja correcta em termos de frequência, é necessário ter em conta o teorema de amostragem de *Shannon* (por vezes designado por teorema de *Nyquist*), segundo o qual, a frequência de amostragem f_s deve ser pelo menos igual ao dobro da máxima frequência $f_{máx}$ das componentes do sinal:

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} = 2 \times f_{Nyq} \geq 2 \times f_{máx} \quad (3.1)$$

O teorema de *Shannon* está portanto relacionado com a máxima frequência que é possível descrever correctamente numa série discreta por amostragem. O valor dessa máxima frequência é designado por frequência de *Nyquist*, f_{Nyq} . Se a condição expressa no teorema de *Shannon* não for respeitada, ocorre o erro de *aliasing* que se traduz no facto de uma componente com uma frequência superior a f_{Nyq} surgir, incorrectamente, na série discreta como tendo uma frequência mais baixa (ver figura 3.8).

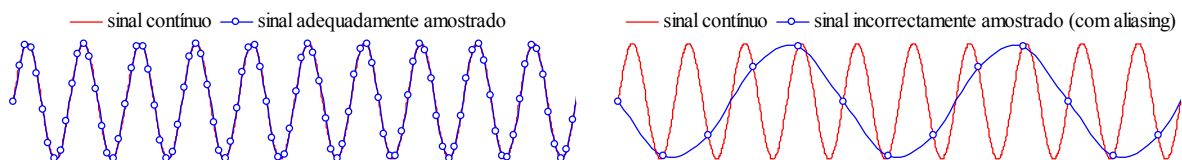


Figura 3.8 – Efeito de *aliasing* dum sinal devido a amostragem com uma frequência muito baixa.

Ao definir a frequência de amostragem a utilizar na aquisição dos sinais de resposta dum sistema estrutural, é necessário ter em conta as características de todo o equipamento utilizado, desde os transdutores, condicionadores de sinal, até ao próprio sistema de aquisição, onde poderão estar incluídos filtros, de modo a evitar o efeito de *aliasing*.

Na situação dos filtros analógicos existentes no equipamento terem uma frequência de corte muito elevada para as frequências de interesse da estrutura em causa, dever-se-á efectuar a aquisição de dados com a frequência de amostragem adequada para as características do equipamento, procedendo-se posteriormente a operações de processamento digital das séries de resposta adquiridas (essencialmente, filtragem passa-baixo e decimação dessas séries), conforme se descreverá mais adiante quando se abordarem as operações de pré-processamento que devem ser efectuadas nas séries de resposta registadas experimentalmente.

A operação de quantização referida anteriormente consiste na conversão da amplitude de um determinado valor analógico para o valor inteiro mais próximo, disponível no conversor analógico/digital. Esta operação envolve a representação de uma gama de valores que os sinais analógicos, à entrada do sistema de aquisição, podem assumir, por um número inteiro de níveis. Este número discreto de níveis depende da resolução, ou número de bits, do conversor analógico/digital (ver figura 3.9). Um conversor com uma resolução de m bits tem capacidade para discretizar a gama de valores dos sinais analógicos, em 2^m níveis.

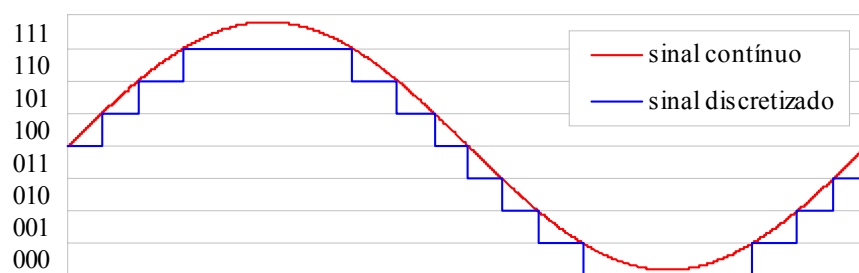


Figura 3.9 – Sinal sinusoidal discretizado com uma resolução de 3 bits ($2^3 = 8$ níveis).

Em aplicações no domínio da identificação modal, é importante que a amostragem dos sinais de resposta seja efectuada de forma simultânea relativamente a todos os transdutores que estiverem a ser utilizados. Nos equipamentos de aquisição de dados há duas formas de conseguir essa simultaneidade da amostragem. A primeira consiste na utilização de circuitos de amostragem-retenção independentes para cada canal e na sua ligação a um único circuito de conversão analógica/digital; neste caso os sinais são capturados simultaneamente pelos circuitos de amostragem-retenção e seguidamente, o circuito de conversão percorre todos os canais, efectuando a conversão da amplitude eléctrica, retida em cada um, para um valor digital. A segunda opção, consiste na utilização de circuitos de amostragem e de conversão analógica/digital independentes para cada canal; é uma opção mais dispendiosa, uma vez que o número de circuitos de conversão multiplica-se pelo número de canais, mas que tem uma performance melhor.

No sistema de instrumentação referido anteriormente, que foi utilizado em vários dos exemplos apresentados no capítulo 6, foram adoptadas duas soluções para a aquisição de dados, utilizando-se em ambas equipamento da *National Instruments*.

Nos ensaios efectuados na estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira e na ponte Salgueiro Maia em Santarém, utilizou-se uma placa de aquisição SCXI-1200 com conversão analógica/digital a 12 bits, ligada a um chassis SCXI-1000DC de 24 canais com placas SCXI-1140 de amostragem-retenção. A placa de aquisição foi por sua vez ligada a um computador portátil, através da porta paralela, com o qual se efectuou a aquisição de dados, utilizando *software* desenvolvido em *LabView*.

Nos ensaios efectuados depois do da ponte Salgueiro Maia (que no capítulo 6 são também apresentados depois desse estudo), utilizou-se uma placa de aquisição DAQ Card AI-16XE-50, com conversão analógica/digital a 16 bits, ligada a um chassis SCXI-1000DC de 32 canais com placas SCXI-1140 de amostragem-retenção. Essa placa de aquisição foi instalada na porta PCMCIA de um computador portátil, a partir do qual se efectuou a aquisição de dados, nalguns estudos com *software* desenvolvido em *LabView* e noutros com o programa *VirtualBench Logger* da *National Instruments*.

Na figura 3.10 representa-se o sistema de instrumentação desenvolvido para os acelerómetros ES-U, incluindo já o sistema de aquisição de dados. Actualmente, dispõe-se apenas de 15 acelerómetros ES-U, no entanto o sistema pode ser facilmente expandido para um maior número de transdutores, bastando para tal, aumentar o número de unidades de alimentação e condicionamento de sinal dos acelerómetros, pois, no sistema de aquisição há já um total de 32 canais. Como o sistema de aquisição de dados é de aplicação perfeitamente geral, pode também ser utilizado com transdutores de outro tipo (o que já foi feito nalguns estudos, em que, para além dos acelerómetros ES-U também se utilizaram extensómetros).

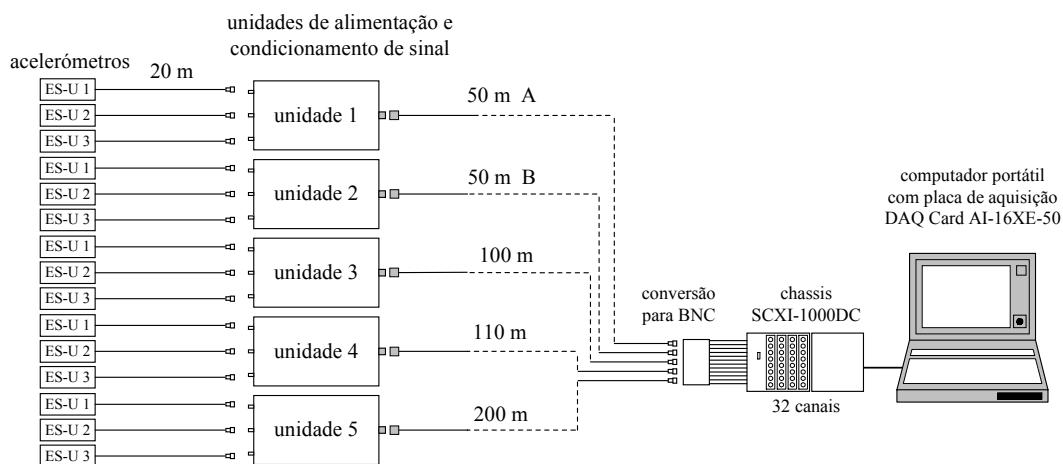


Figura 3.10 – Configuração actual do sistema de instrumentação desenvolvido para os acelerómetros ES-U.



3.2.3 Macro-sismógrafos

Os macro-sismógrafos são um equipamento cuja principal aplicação é o registo de acelerações induzidas pela acção dos sismos, quer ao nível do solo quer em quaisquer outros locais. Obviamente, podem também ser utilizados para registar as acelerações induzidas por outro tipo de eventos, tais como explosões, a passagem de veículos pesados, de comboios, etc.

Os macro-sismógrafos englobam, numa única unidade independente, os diversos componentes dum sistema de medição de acelerações, incluindo os transdutores (normalmente 3 acelerómetros de tipo *force balance*, orientados de modo a registarem as acelerações em três direcções ortogonais entre si), um sistema de alimentação e condicionamento desses transdutores, uma placa de conversão analógica/digital, um processador que controla as condições de funcionamento do aparelho e ainda unidades de memória onde são armazenados os registos.

No quadro 3.8 indicam-se as características gerais de alguns macro-sismógrafos disponíveis actualmente no mercado.

Quadro 3.8 – Características gerais de alguns macro-sismógrafos.

	<p>Marca: GeoSig (http://www.geosig.ch) Modelo: GSR-24 Resolução da placa de ADC: 24 bits Memória: 16 Mbytes (expansível a 64 Mbytes) Transdutor: Guralp CMG-5T ou GeoSig AC-63 (ver quadro 3.3)</p>
	<p>Marca: Kinemetrics (http://www.kinemetrics.com) Modelo: Etna Resolução da placa de ADC: 18 bits Memória: 16 Mbytes (expansível) Transdutor: Kinemetrics EpiSensor ES-T (ver quadro 3.3)</p>

A forma mais usual de utilizar os macro-sismógrafos consiste em configurá-los de modo a que guardem os registos de acelerações, quando no sinal de um dos transdutores se verifica uma determinada condição pré-definida (ou através dum valor máximo, ou por intermédio duma relação que reflecte a existência de um aumento global do nível das acelerações). Nos modelos de algumas marcas, essa forma de utilizar os macro-sismógrafos é mesmo a única possível.

Alguns macro-sismógrafos, como é o caso dos GSR-16 da GeoSys (actualmente GeoSig), podem ser configurados de modo a que o início do armazenamento dos registos se verifique a uma determinada hora e data, pré-programadas. Com esta forma de funcionamento, compreende-se o interesse que pode haver na utilização de macro-sismógrafos para aplicações no domínio da identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil. De facto, dispondo de vários

aparelhos e desde que todos tenham os respectivos relógios acertados pela mesma referência, é possível programá-los de modo a que iniciem todos o armazenamento dos registos no mesmo instante, possibilitando assim a medição simultânea da resposta duma estrutura em diversos dos seus pontos.

A ideia de aplicar macro-sismógrafos em estudos de identificação modal de estruturas de engenharia civil, foi utilizada nos ensaios efectuados na ponte da Arrábida (LNEC - Rodrigues *et al.*, 1997) e na ponte da Figueira da Foz e seus viadutos de acesso (LNEC - Campos Costa *et al.*, 1997) e ainda em vários outros estudos realizados posteriormente (ver capítulo 6). Essa ideia foi também adoptada com sucesso, nos estudos efectuados na ponte Vasco da Gama (Cunha *et al.*, 1998), na ponte Luiz I (Cunha e Calçada, 1999) e também na nova ponte Hintze Ribeiro (Caetano e Cunha, 2003).

Em vários dos casos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6, foram utilizados macro-sismógrafos GSR-16, cujas características gerais são apresentadas em seguida.

Os macro-sismógrafos GSR-16 estão equipados com acelerómetros de tipo servo, de modelo SSA-320 (triaxial) da *Terra Technology* (uma marca que entretanto desapareceu do mercado, conforme já referido). Estes acelerómetros têm uma gama dinâmica de 120 dB, uma resposta dinâmica de DC a 50 Hz e um campo de medida de ± 2 g, sendo no entanto possível definir factores de ganho dum circuito de amplificação, com valores de 1, 2 ou 4, o que permite aumentar a sensibilidade dos GSR-16.

O sistema de conversão analógica/digital dos GSR-16 é de 16 bits.

Em condições normais de operação, os GSR-16 encontram-se continuamente a amplificar, filtrar e digitalizar os sinais dos três transdutores que os equipam. Sempre que se cumprem determinadas condições pré-definidas, o sistema armazena em memória, as acelerações dos respectivos transdutores. Cada canal possui um filtro analógico passa-baixo de tipo Butterworth de 6 pólos com frequência de corte de 100 Hz. A frequência de amostragem efectivamente utilizada na conversão analógica/digital é sempre de 1000 Hz, no entanto, o utilizador pode escolher que os registos sejam armazenados com frequências de amostragem que podem ir desde os 50 Hz até aos 1000 Hz (de entre um conjunto de 9 valores). Para tal, é efectuado o processamento digital adequado, incluindo a aplicação de filtros digitais passa-baixo, que garantem a ausência de erros de *aliasing* nos sinais armazenados.

A capacidade de memória dos GSR-16 é de 1 Mbyte. A configuração destes macro-sismógrafos é efectuada através de um computador, utilizando um programa, *FieldView*, desenvolvido pelo fabricante do equipamento, o qual fornece também um outro programa, *CloseView*, que tem disponíveis algumas funções para análise dos registos obtidos com os GSR-16.

Na figura 3.11 podem-se observar alguns aspectos da utilização dos GSR-16, em alguns dos casos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6.



Figura 3.11 – Alguns aspectos da utilização dos macro-sismógrafos GSR-16.

3.3 Técnicas de ensaio *in situ* para a caracterização dinâmica de estruturas

Podem-se distinguir fundamentalmente três tipos de técnicas de ensaio *in situ* para a caracterização dinâmica de estruturas:

- ensaios de vibração forçada, com controlo e medição das forças de excitação;
- ensaios de medição da resposta das estruturas em regime livre;
- ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente, às quais elas estão normalmente sujeitas em condições usuais de serviço.

3.3.1 Ensaios de vibração forçada

Os ensaios de vibração forçada consistem essencialmente na aplicação duma excitação controlada num ponto ou em vários pontos duma estrutura e na medição da resposta (normalmente em aceleração) em vários pontos dessa mesma estrutura. Uma vez que nestes ensaios, as forças de excitação são medidas, torna-se possível efectuar a avaliação das funções de resposta em frequência (FRF) que relacionam as respostas medidas nos diversos pontos com as forças aplicadas. Neste caso, a análise de identificação modal é efectuada com base nessas FRF avaliadas experimentalmente ou nas funções a elas correspondentes no domínio do tempo, as funções de resposta impulsiva (IRF).

Os ensaios de vibração forçada exigem a utilização de equipamentos adequados para a aplicação das forças de excitação, tais como geradores de vibrações servo-hidráulicos, ou mecânicos de massas excêntricas, ou ainda equipamentos de aplicação de impulsos. As forças de excitação que são utilizadas podem ser de diversos tipos, nomeadamente, excitações de variação harmónica, ou com características de ruído branco numa determinada gama de frequências, ou ainda de tipo impulsivo.

No caso de sistemas estruturais de pequena dimensão, não é muito difícil desenvolver equipamentos adequados para aplicação das forças de excitação, havendo vários fabricantes que os

têm disponíveis comercialmente. Já no que se refere às estruturas de grandes dimensões, como é o caso das estruturas de engenharia civil, torna-se extremamente difícil e dispendioso dispor de equipamentos de aplicação das forças de excitação com características adequadas para as propriedades dinâmicas dessas estruturas. Esses equipamentos, para além dos próprios excitadores, envolvem ainda unidades de potência hidráulica e geradores móveis que têm de ter capacidades consideráveis; por exemplo, Felber e Cantieni (1996) referem que os geradores móveis a utilizar em ensaios dinâmicos de estruturas de grandes dimensões, têm de ter potências de 50 a 100 kW. Todos estes equipamentos têm de ser transportados para o local da estrutura a ensaiar, exigindo também a disponibilidade de um meio de transporte para o fazer.

Verifica-se ainda que com os equipamentos de excitação actualmente existentes, servo-hidráulicos ou mecânicos de massas excêntricas, na gama das baixas frequências (abaixo de 1 Hz) é extremamente difícil conseguir níveis de força capazes de excitar adequadamente as estruturas de grandes dimensões (Felber e Cantieni, 1996). No caso das pontes de grande vão (pontes suspensas e pontes atirantadas) há normalmente um número considerável de modos de vibração com frequências inferiores a 1 Hz e que, portanto, dificilmente serão identificados com um ensaio de vibração forçada.

Uma outra desvantagem dos ensaios de vibração forçada em estruturas de pontes que já estejam em serviço, relaciona-se com a necessidade de interromper a passagem do tráfego durante os períodos de realização dos ensaios. Em muito casos de pontes sujeitas a tráfego muito intenso, como por exemplo a ponte da Arrábida ou a ponte suspensa sobre o rio Tejo (cujos ensaios de medição da resposta às acções ambiente, serão apresentados no capítulo 6), é praticamente impossível efectuar uma interrupção do tráfego, em virtude dos transtornos que tal medida provocaria nas regiões servidas por essas pontes.

Apesar das dificuldades em aplicar os ensaios de vibração forçada em estruturas de grandes dimensões, há vários trabalhos em que têm sido efectuados ensaios desse tipo. Por exemplo, no laboratório federal Suíço *EMPA*, há uma larga experiência na realização de ensaios de vibração forçada, tanto em estruturas de pontes como de barragens, sendo este último caso ilustrado na figura 3.12 onde se pode observar um excitador servo-hidráulico (Cantieni, 2001) utilizado nesses ensaios.



Figura 3.12 – Excitador servo-hidráulico utilizado no *EMPA* (Cantieni, 2001).

No LNEC, têm também sido efectuados vários ensaios de vibração forçada em estruturas de barragens, utilizando um excitador de massas excêntricas (ver figura 3.13).



Figura 3.13 – Excitador de massas excêntricas utilizado no Departamento de Barragens de Betão do LNEC.

Nas figuras 3.14 e 3.15 apresentam-se os excitadores servo-hidráulicos utilizados nos ensaios efectuados, respectivamente, na ponte de *Yeongjong* na Coreia do Sul (ponte suspensa com um vão central de 300 m) e na ponte de *Tatara* no Japão (ponte de tirantes com um vão central de 890 m).



Figura 3.14 – Ensaio de vibração forçada da ponte de *Yeongjong* (<http://www.yeongjongbridge.com>).



Figura 3.15 – Ensaio de vibração forçada da ponte de *Tatara* (<http://www.hsba.go.jp>).

No domínio dos ensaios de vibração forçada de estruturas de engenharia civil, referem-se também os ensaios de impacto que têm sido efectuados por diversos autores (Askegaard e Mossing, 1988; Agardh, 1991; Lenett *et al.*, 2000) utilizando um dispositivo apropriado para aplicação de impulsos (*Swedish hammer* ou *drop weight*). Na figura 3.16, ilustra-se este tipo de dispositivos, apresentando o desenvolvido na Universidade Católica de *Leuven* na Bélgica. Este tipo de ensaios é aplicável em estruturas com frequências de vibração com valores não muito baixos, por exemplo em estruturas de viadutos com vãos com algumas dezenas de metros (com cerca de 20 m a 50 m) como é o caso das aplicações efectuadas pelos autores referidos.



Figura 3.16 – Dispositivo de aplicação de impulsos da Universidade Católica de *Leuven*
(<http://www.kuleuven.ac.be>).

3.3.2 Ensaio de medição da resposta em regime livre

Neste tipo de ensaios é imposta uma deformação inicial à estrutura, que é repentinamente libertada, deixando-a a vibrar em regime livre. Medindo e analisando essa resposta em regime livre podem-se identificar as características dinâmicas da estrutura, incluindo frequências, configurações modais e coeficientes de amortecimento.

Um dos maiores interesses da realização de ensaios deste tipo é a avaliação dos coeficientes de amortecimento, uma vez que, exclusivamente com ensaios com as acções ambiente, os valores estimados correspondem a níveis de resposta muito baixos e é por vezes difícil efectuar essa avaliação.

Estes ensaios podem ser efectuados através de um cabo que é ancorado ao solo, a uma estrutura vizinha que seja suficientemente rígida, ou puxado por uma grua, um camião ou um rebocador. Esse cabo é tensionado até ao valor limite duma ligação fusível, altura a partir da qual

ocorre a sua libertação repentina deixando a estrutura a vibrar em regime livre. Esta técnica foi utilizada, por exemplo, nos ensaios efectuados na ponte suspensa sobre o rio Tejo (LNEC - Marecos *et al.*, 1967), ou nos ensaios efectuados na ponte sobre o rio Colquitz no Canadá (Ventura *et al.*, 1996).

Uma outra forma de efectuar estes ensaios (semelhante à indicada no parágrafo anterior) é através da suspensão de um peso que é libertado repentinamente. Esta libertação pode ser conseguida por diversos meios, por exemplo através de explosivos ou através do corte a maçarico de um elemento do sistema de suspensão do peso. Esta técnica foi utilizada, por exemplo, nos ensaios efectuados nas pontes atirantadas do Guadiana e do Arade (Corrêa e Campos Costa, 1992), nos ensaios efectuados na ponte Vasco da Gama (Cunha *et al.*, 1998) ou ainda nos ensaios dinâmicos da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira, que serão apresentados no capítulo 6 (ver figura 3.17).



Figura 3.17 – Peso de 608 kN utilizado nos ensaios da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.

Este tipo de ensaios exige meios (cabos, pesos, etc.) que são razoavelmente acessíveis para o empreiteiro encarregue da construção duma obra de engenharia civil, sendo, sob esse ponto de vista, aceitável que se pondere a sua realização no caso de ensaios de recepção, efectuados imediatamente após o fim da construção duma estrutura. A realização destes ensaios numa estrutura em serviço implica obviamente a interrupção da sua utilização normal, apresentando portanto essa desvantagem, tal como os ensaios de vibração forçada.

Farrar *et al.* (1999) chamam a atenção para algumas questões relacionadas com este tipo de ensaios. Em primeiro lugar, não se podem descurar as questões de segurança relacionadas com o corte repentino dum cabo tensionado (normalmente com forças elevadas). Em segundo lugar, deve-se ter em conta que ao proceder-se ao seu corte repentino, o cabo ou cabos, podem vir a embater na estrutura, o que acaba por constituir um ruído adicional que, portanto, pode surgir nos registos da resposta em regime livre que se pretende medir. Finalmente, deve-se escolher bem o ponto onde deve ser aplicada

a força para impor a deformação inicial na estrutura, pois os modos de vibração que tenham esse ponto como um nodo, não serão excitados e, conseqüentemente, não será possível identificar as suas características.

3.3.3 Ensaio de medição da resposta às acções ambiente

Os ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente consistem na medição da resposta das estruturas (usualmente em aceleração) às acções a que elas normalmente estão sujeitas, tais como o vento, o tráfego de veículos que circulem sobre as estruturas ou na sua vizinhança, o tráfego de peões, sismos de muito baixa intensidade (microsismicidade), o efeito da ondulação marítima ou do escoamento dum rio (por exemplo em estruturas *offshore* ou nos pilares duma ponte), etc. Estes ensaios podem também ser designados por ensaios com excitação natural (*natural input*).

A identificação modal, efectuada com os registos de resposta obtidos em ensaios deste tipo, é o principal tema deste trabalho, para o qual se optou pela designação *identificação modal estocástica*, conforme referido no capítulo 1, em virtude da hipótese que é assumida para as características das acções ambiente.

Em termos dos procedimentos de ensaio e dos meios necessários para a sua execução, os ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente são consideravelmente mais simples do que os ensaios dinâmicos dos outros tipos anteriormente descritos. Estes ensaios podem ser efectuados sem qualquer interrupção do funcionamento normal das estruturas, pois são as próprias acções decorrentes desse funcionamento que constituem as fontes de excitação dinâmica que induzem as respostas que são medidas.

Verifica-se também que com os ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente, é possível identificar as características de modos de vibração com frequências muito baixas (abaixo de 1 Hz) o que, conforme já se referiu, é difícil de conseguir na prática com os ensaios de vibração forçada.

Salienta-se também que têm sido efectuados alguns estudos em que foi possível comparar os resultados obtidos em ensaios de vibração forçada com os resultantes da análise da resposta às acções ambiente, verificando-se haver uma boa concordância entre eles (Trifunac, 1972; Felber e Cantieni, 1996; Kramer *et al.*, 1999; Lamarche *et al.*, 2004).

Os ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente têm obviamente as suas exigências específicas:

- A primeira relaciona-se com a sensibilidade dos transdutores e a resolução dos sistemas de aquisição de dados que devem ser utilizados nesse tipo de ensaios, pois nalgumas situações

de estruturas mais rígidas, as respostas induzidas pelas acções ambiente podem ter amplitudes muito baixas, sendo necessário utilizar transdutores com capacidade para as medir e sistemas de aquisição de dados que as permitam registar com uma resolução adequada;

- A segunda exigência está relacionada com os procedimentos de ensaio, que também têm as suas particularidades, embora com aspectos em comum com os ensaios com medição e controlo das forças de excitação;
- Uma terceira especificidade tem a ver com os métodos de identificação, ou de análise dos registos de resposta com vista a avaliar as características dinâmicas dos sistemas, os quais têm que ser apropriados para a situação em que apenas se medem as respostas dos sistemas.

As questões relacionadas com a primeira exigência dos ensaios com excitação natural foram já analisadas quando se descreveram os equipamentos de medição da resposta dos sistemas. Os aspectos relativos aos procedimentos de ensaio, tanto em termos da sua preparação como da sua execução em si, serão abordados em seguida. Quanto aos métodos de identificação modal estocástica, serão objecto de análise detalhada no capítulo 4, apresentando-se no entanto, ainda neste capítulo, os procedimentos de pré-processamento dos registos de resposta obtidos experimentalmente.

Planeamento, preparação e execução dos ensaios:

Uma vez tomada a decisão de efectuar um estudo de identificação modal de uma estrutura de engenharia civil, com base em ensaios com excitação natural, deve-se ter em conta que o sucesso desse trabalho depende em grande parte do seu planeamento e preparação. Procuram-se salientar em seguida alguns aspectos desse planeamento e preparação que se considera serem importantes.

Um primeiro aspecto a ter em conta é o de procurar ter acesso ou desenvolver um modelo de elementos finitos da estrutura que permita ter, desde logo, uma estimativa das frequências e configurações dos seus modos naturais de vibração. Em geral, esse modelo já existe, nomeadamente o que foi utilizado no projecto da estrutura ou, no caso de uma obra já com alguns anos de utilização, o que eventualmente foi desenvolvido num estudo de avaliação dessa obra e no qual se integram os ensaios a realizar. Nalguns casos, no entanto, torna-se necessário efectuar o trabalho de elaboração desse modelo, o que deve ser feito recorrendo à informação disponível no seu projecto e em eventuais ensaios que tenham sido efectuados no sentido de caracterizar os seus materiais.

Sempre que os ensaios tenham como objectivo a identificação de configurações modais, é necessário medir a resposta das estruturas num número suficiente de pontos que permita definir essas configurações duma forma clara. Esse número de pontos deverá ser ajustado às características da estrutura (por exemplo, ao n.º de pisos num edifício ou ao n.º de tramos numa ponte) e ao grau de

refinamento com o qual se pretendem identificar as configurações. É necessário então definir uma malha de pontos experimentais, onde, nos ensaios, é medida a resposta das estruturas. O número total de pontos dessa malha é normalmente superior ao número de transdutores disponíveis, sendo então necessário adoptar técnicas em que são efectuados vários ensaios, mantendo sempre alguns transdutores nos mesmos pontos (pontos de referência) enquanto que os restantes transdutores vão sendo sucessivamente colocados nos restantes pontos até se medir a resposta do sistema em toda a malha de pontos experimentais. Os pontos de referência devem ser escolhidos de modo a evitar nodos dos modos de vibração que se pretende identificar.

Considerando como exemplo uma viga contínua de dois tramos, relativamente à qual se pretende identificar as configurações dos modos verticais de vibração, ilustram-se nas figuras 3.18 e 3.19, duas técnicas de ensaio que podem ser adoptadas em ensaios de medição da resposta de estruturas com vista à aplicação de métodos de identificação modal estocástica. Para ambos os casos, considera-se que se dispõe apenas de 4 transdutores, e que se pretende identificar as componentes modais em 5 pontos em cada tramo, ou seja, num total de 10 pontos. Na primeira técnica, os pontos de referência são fixos para todos os ensaios, enquanto que na segunda os pontos de referência vão avançando sucessivamente, mas havendo pontos comuns em cada dois ensaios sucessivos.

Em ambas as figuras 3.18 e 3.19, são ilustradas duas hipóteses, uma primeira só com um transdutor de referência e uma segunda com dois transdutores de referência. Nesta segunda hipótese, há a necessidade de efectuar um maior número de ensaios, mas há também uma maior segurança, pelo facto de se considerarem dois pontos de referência, em termos de, pelo menos um deles, não ser um nodo dos modos de vibração que se pretende identificar. Como recomendação geral pode-se considerar que é preferível adoptar mais do que um ponto de referência, havendo no entanto que ter também em conta que tal implica um maior número de ensaios e portanto um trabalho experimental que leva mais tempo a ser efectuado.

A técnica de ensaio com pontos de referência fixos (figura 3.18) é a que normalmente é adoptada, uma vez que a análise de identificação modal com a informação assim obtida, pode ser efectuada de forma mais imediata, em virtude dos pontos de referência serem comuns a todos os ensaios.

A técnica de ensaio com avanço dos pontos de referência (figura 3.19) é designada por Kramer *et al.* (1999) como *jumping frog method*, tendo sido adoptada nos ensaios efectuados na ponte Miguel Torga sobre o rio Douro na Régua, que serão apresentados no capítulo 6. Ao utilizar esta técnica de ensaio, há o risco de, para dois ensaios sucessivos, os respectivos pontos comuns serem nodos de alguns modos de vibração, o que inviabiliza a identificação adequada das suas configurações.

Como recomendação geral, pode-se considerar que é preferível adoptar a técnica de ensaio com pontos de referência fixos.

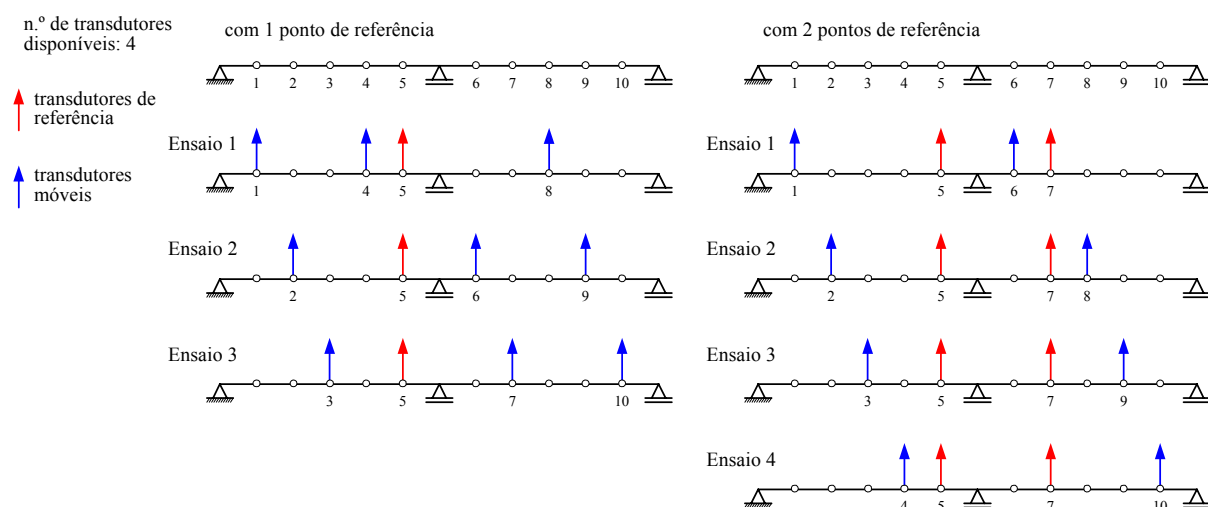


Figura 3.18 – Técnica de ensaio com pontos de referência fixos.

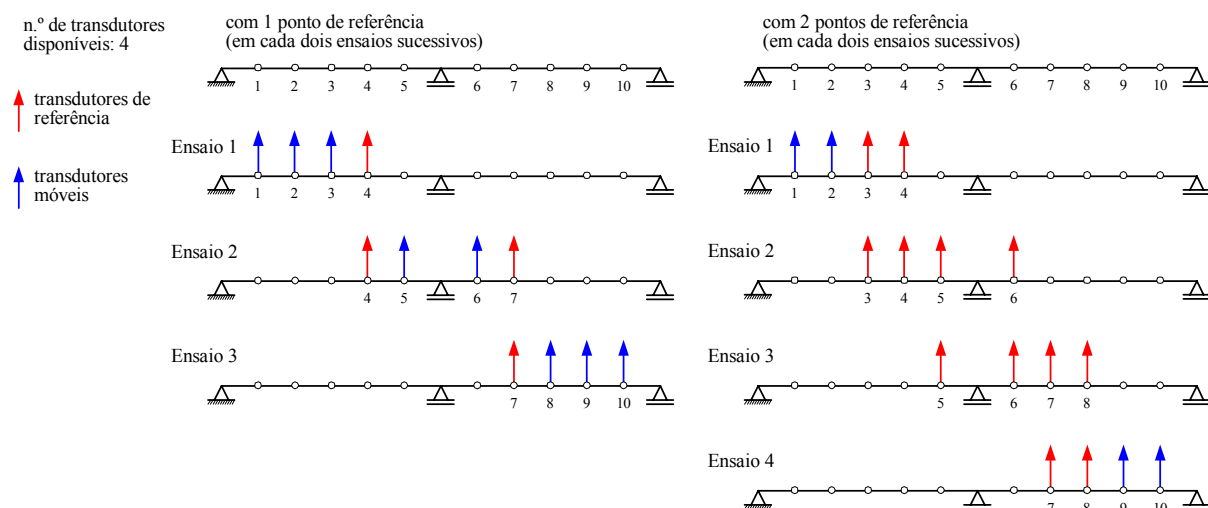


Figura 3.19 – Técnica de ensaio com avanço dos pontos de referência.

A escolha dos pontos numa estrutura onde devem ser colocados os transdutores e da orientação destes (ou seja a escolha dos graus de liberdade experimentais) pode ser efectuada com base, simplesmente, numa ideia prévia das configurações dos modos de vibração que se pretende identificar, bem como na experiência anterior obtida em ensaios efectuados em estruturas semelhantes. De preferência, essa escolha deve basear-se também nas configurações modais calculadas com um modelo de elementos finitos. Para tal, existem técnicas apropriadas para, a partir das configurações calculadas, efectuar a escolha dos graus de liberdade experimentais e de entre estes, escolher os que são mais adequados para serem considerados como referências.

Na *Structural Dynamics Toolbox* (Balmès e Leclère, 2002) do *MatLab* estão implementadas técnicas baseadas no *algoritmo da independência efectiva* (Kammer, 1992) e nos *algoritmos da sequência máxima*, que podem ser utilizadas para a escolha dos graus de liberdade experimentais. Para estes graus de liberdade, deve-se verificar se a matriz dos coeficientes MAC (cuja definição será apresentada no capítulo 5) calculada com as correspondentes componentes modais relativamente a si próprias (auto-MAC), tem valores próximos de 1,0 na diagonal principal e não superiores a 0,1 fora da diagonal principal, para os modos de vibração que se pretende identificar. Tal significa que com esses graus de liberdade é possível distinguir claramente esses modos de vibração.

Conforme já referido, a escolha dos graus de liberdade de referência também pode ser baseada num modelo de elementos finitos, havendo também na citada *Toolbox* do *MatLab*, algumas funções para efectuar essa escolha. Note-se que, na identificação modal estocástica, a escolha dos graus de liberdade de referência é equivalente, na identificação modal *clássica*, à escolha dos graus de liberdade onde são aplicadas as forças de excitação (Peeters, 2000). Fundamentalmente, os graus de liberdade de referência devem ser escolhidos de maneira a que pelo menos um deles não seja um nodo, para cada um dos modos de vibração que se pretende identificar.

Mesmo que na escolha dos graus de liberdade experimentais e dos graus de liberdade de referência, não se utilizem as técnicas acima referidas, que permitem efectuar essa escolha duma forma mais objectiva, na fase de planeamento dos ensaios é sempre vantajoso analisar as configurações modais calculadas com um modelo de elementos finitos.

Na escolha dos pontos a instrumentar nos ensaios numa estrutura, deve-se também ter em conta que nalguns pontos os registos obtidos podem traduzir mais a resposta de elementos locais e não propriamente a resposta global da estrutura que, em princípio, é a que se pretende observar. Nomeadamente em estruturas metálicas formadas por barras independentes ligadas entre si em nós, é necessário ter um cuidado especial na escolha dos pontos onde se colocam os transdutores.

Antes de realizar os ensaios e se possível durante a fase do seu planeamento, é conveniente efectuar uma visita preliminar à estrutura que vai ser ensaiada, com o objectivo de ver as condições existentes no local e de analisar desde logo os procedimentos que deverão ser seguidos. Em geral, um dos aspectos que é conveniente ter em conta é o da existência na estrutura, ou na sua proximidade, de ligações a uma rede de corrente eléctrica para alimentação dos equipamentos que serão utilizados nos ensaios. Se não existir a possibilidade de efectuar facilmente essa ligação (o que é a situação mais comum, sobretudo em estruturas situadas fora de zonas urbanas), deverão prever-se soluções alternativas, como por exemplo a utilização de equipamentos totalmente alimentados por baterias ou a utilização de geradores.

Antes da realização dos ensaios, é também conveniente ter uma ideia razoável de quais os níveis de resposta que vão ser medidos, para que todo o equipamento seja previamente configurado para esses níveis. Este aspecto pode ter alguma importância visto que nalguns equipamentos, como por exemplo os acelerómetros ES-U utilizados em vários dos ensaios que serão apresentados no capítulo 6, há operações de configuração que devem ser efectuadas em laboratório (num ambiente limpo) não sendo conveniente efectua-las no local dos ensaios. A experiência obtida em ensaios efectuados em estruturas semelhantes sob o efeito de acções similares pode ter aqui uma importância relevante para a escolha da configuração do equipamento a adoptar nos ensaios numa determinada estrutura. Pode também ser conveniente, no âmbito da visita preliminar referida no parágrafo anterior, efectuar alguns registos prévios (utilizando, por exemplo, um macro-sismógrafo triaxial) que permitam verificar quais os níveis de resposta que vão ser medidos e também ter uma primeira ideia de quais os valores das frequências dos modos naturais de vibração da estrutura em causa. Para esclarecimento de eventuais dúvidas, deve-se também tentar obter esses registos preliminares em diversos pontos da estrutura no sentido de verificar quais os melhores em termos de avaliação das suas características dinâmicas globais.

Os pontos onde é medida a resposta numa estrutura durante os ensaios devem ser previamente marcados utilizando a numeração que para eles for definida. É também conveniente preparar esquemas e/ou quadros que traduzam de forma clara toda a sequência de ensaios a efectuar, indicando os números dos pontos onde cada transdutor deve ser colocado. Tais esquemas devem ser distribuídos a todas as pessoas envolvidas nos ensaios de maneira a que durante a sua realização não haja dúvidas quanto aos procedimentos a seguir.

Para a identificação modal estocástica, os ensaios consistem apenas na medição da resposta dos sistemas estruturais. Na maioria das situações, com os transdutores e sistemas de aquisição de dados actualmente existentes, a resposta das estruturas à excitação natural que sobre elas actua é suficiente para obter registos dessa resposta com uma discretização que já permite alcançar bons resultados em termos de identificação modal. No entanto, em casos em que se verifique que o equipamento não tem sensibilidade suficiente, poder-se-á procurar aumentar o nível da resposta, *criando* acções que excitem a estrutura em causa. Nesses casos, é importante que essas acções sejam razoavelmente aleatórias (Brincker *et al.*, 2003) tanto no tempo (excitando uma vasta gama de frequências) como no espaço (actuando em diversos pontos da estrutura). A situação prática em que é relativamente fácil proceder dessa maneira, é em estruturas de pontes em que é possível pôr a circular no tabuleiro diversos veículos (de preferência com características diferentes, velocidades diferentes e passando em diversas vias de circulação no tabuleiro).

Um aspecto importante a ter em conta na realização dos ensaios é o da frequência de amostragem com que são adquiridos os registos da resposta das estruturas. A sua escolha depende das características dinâmicas da estrutura em causa (até que frequências é importante e se pretende efectuar a identificação modal) e também da resposta em frequência dos transdutores e da frequência de corte de filtros analógicos passa-baixo que estejam incluídos nos equipamentos de condicionamento e aquisição de sinal. Para evitar erros de *aliasing* nos registos obtidos, a relação entre a frequência de amostragem e a frequência de corte dos filtros analógicos passa-baixo deve ser superior a 2; por exemplo, Allemang (1999) indica um valor de 2,56 para essa relação, Ventura e Brincker (2000) referem um valor de 2,5. Pode ainda haver alguma vantagem, traduzida num nível de ruído mais baixo, em fazer a conversão analógica-digital dos sinais, com algum grau de sobre-amostragem relativamente à frequência mínima que respeita esta condição, procedendo-se depois ao tratamento digital dos sinais (filtragem passa-baixo e decimação) para a banda de frequências de interesse para o sistema estrutural em análise.

Outro ponto importante da realização dos ensaios de medição da resposta das estruturas, para aplicação de métodos de identificação modal estocástica é o da duração total dos registos que são obtidos em cada ensaio. Em primeiro lugar importa salientar que nos ensaios com excitação natural, uma vez que não há controlo sobre as forças de excitação, torna-se conveniente registar a resposta dos sistemas durante um tempo longo como forma de assegurar que durante esse período todos os modos do sistema, na banda de frequências em análise, são suficientemente excitados pelas acções ambiente.

No caso dos métodos de identificação no domínio da frequência, baseados na análise de estimativas das funções de densidade espectral da resposta dos sistemas, avaliadas com utilização do algoritmo da FFT, a resolução em frequência dessas estimativas é directamente dependente da duração das diversas amostras extraídas dos registos de resposta, bem como a variância dessas estimativas é tanto menor quanto maior for o número dessas amostras.

No caso dos métodos de identificação no domínio do tempo ou métodos paramétricos que consistem no ajuste de modelos às estimativas das funções de correlação da resposta ou às próprias séries de resposta, apesar de não haver uma relação directa entre a duração dos registos e a resolução com que são identificadas as frequências dos modos de vibração dum sistema, é também conveniente dispor de registos com uma duração que permita ajustar bem os modelos aos dados experimentais.

Portanto, quer devido às características dos ensaios (sem controlo sobre as forças de excitação), quer em termos da aplicação dos métodos de identificação modal estocástica, é conveniente que em cada ensaio sejam obtidos registos com uma duração suficientemente longa. Essa duração deve ser ajustada às características dinâmicas da estrutura em análise, tendo em conta os

modos com frequências mais baixas e se é de esperar (com base num modelo de elementos finitos ou em resultados obtidos em estruturas semelhantes) que existam modos com frequências próximas.

Uma regra empírica que pode ser tida em conta para definir a duração total dos registos a obter em cada ensaio é a de considerar uma duração de 2000 ciclos do modo com período mais longo (frequência mais baixa). Esta regra dá apenas uma primeira indicação devendo ser encarada com algum bom senso, tendo sempre em conta o que é razoável fazer em termos do envolvimento de pessoas, de equipamentos e de outros meios, na realização dos ensaios.

Pensando especificamente nos métodos no domínio da frequência, é possível definir as durações dos registos a efectuar nos ensaios duma forma mais objectiva do que a regra empírica indicada no parágrafo anterior. Assim, definindo a resolução em frequência bem como o erro aleatório normalizado (ver o capítulo 4) que se pretendem para as estimativas das funções de densidade espectral da resposta, é possível definir claramente qual a duração total dos registos que devem ser adquiridos experimentalmente (Bendat e Piersol, 2000). Por exemplo, para uma resolução de 0,1 Hz, cada amostra deverá ter uma duração de 10 seg. Supondo que se pretende obter estimativas espectrais com um erro aleatório normalizado de 10 %, deverão ser adquiridas 100 amostras (admitindo que não se fazem sobreposições nas amostras consideradas para a avaliação dos espectros), o que resulta numa duração total de 1000 seg. (cerca de 17 minutos).

Nos equipamentos em que os transdutores estão ligados por um sistema de cabos a um sistema de aquisição e este, por sua vez, a um computador, que o controla, deve-se ter o cuidado de, antes de iniciar o registo da informação de um determinado ensaio, verificar se não existem problemas nos sinais provenientes de todos os transdutores, originados eventualmente por uma má configuração de um transdutor ou má ligação de um cabo. Noutros equipamentos, constituídos por unidades independentes (macro-sismógrafos), não é tão prático fazer este tipo de verificação prévia, no entanto deve-se, pelo menos, ter o cuidado de verificar se, em cada ensaio, todos os aparelhos utilizados estão a fazer o armazenamento da informação. Com estes últimos equipamentos é também conveniente efectuar um ensaio prévio com todos os aparelhos colocados no mesmo ponto da estrutura, de modo a verificar as relações entre as respostas registadas com cada um.

Importa ainda salientar que, sempre que possível, deve-se tentar fazer no local de realização dos ensaios alguma análise prévia dos dados obtidos, no sentido de verificar a sua qualidade e a eventual necessidade de repetir algum ensaio. Note-se que com os métodos no domínio da frequência, dada a sua rapidez de execução, é mesmo possível efectuar no local, uma análise de identificação modal completa (ainda que prévia). Mas mesmo que tal não seja possível, é recomendável efectuar uma verificação rápida dos espectros dos sinais de resposta obtidos nos diversos ensaios realizados, o que permite desde logo verificar mais facilmente a qualidade da informação experimental obtida.

Pré-processamento dos registos de resposta:

A primeira fase da análise dos registos de resposta obtidos em ensaios com excitação natural deve consistir em operações de verificação da qualidade e de pré-processamento dos dados, para posterior aplicação dos métodos de identificação modal estocástica.

Em termos da verificação da qualidade dos registos de resposta obtidos experimentalmente, importa detectar situações de *anomalia* nos sinais, ponderando a possibilidade da sua correcção ou simplesmente a não consideração dessa parte da informação na análise de identificação modal. Alguns dos problemas que se enunciam adiante devem ser detectados ainda antes de se efectuar o registo da resposta dos sistemas, na fase de configuração e verificação do equipamento, pois, à posteriori, em relação a alguns deles, pouco se pode fazer para os corrigir após os sinais estarem digitalizados.

Os meios que podem ser utilizados na verificação da existência de anomalias nos sinais são a simples inspecção visual dos gráficos das séries de resposta no domínio do tempo, a análise dos gráficos das funções de densidade de probabilidade das séries de resposta e a análise dos gráficos dos auto-espectros das séries de resposta (Bendat e Piersol, 2000; Ventura e Brincker, 2000).

As *anomalias* que normalmente podem ser encontradas nos sinais de resposta são (Ventura e Brincker, 2000):

- *Saturação dos sinais*, traduzida no facto dos sinais aparecerem cortados nos valores correspondentes à entrada máxima ou mínima no sistema de aquisição (usualmente ± 5 Volt ou ± 10 Volt). Este problema pode surgir devido a diversos motivos, incluindo uma sensibilidade excessiva dos transdutores ou um ganho excessivo nos condicionadores de sinal, para as amplitudes de resposta que estão a ser medidas, ou ainda, por exemplo no caso de acelerómetros de tipo servo, devido a um inadequado ajuste do *zero* dos acelerómetros para a posição em que se encontram. A saturação dos sinais pode ser verificada por inspecção visual dos seus gráficos no tempo, sendo relativamente fácil de constatarla em sinais de tipo aleatório ou periódico e um pouco mais difícil em sinais transientes. Os gráficos das funções de densidade de probabilidade também são um bom indicador da existência de saturação nos sinais, no caso destes serem estacionários. É importante ter em atenção que, num sinal saturado filtrado digitalmente, perde-se a percepção de que o sinal inicial estava saturado, pelo que a verificação relativamente a este problema deve ser efectuada antes de qualquer filtragem digital.
- *Baixa relação sinal/ruído*, resultante da utilização de transdutores com pouca sensibilidade, de ganhos muito baixos nos condicionadores de sinal ou devido a ruído proveniente de algum dos componentes do sistema de medição. Em geral é conveniente avaliar qual o nível

de ruído nesse sistema, efectuando registos com todo ele ligado e colocando os transdutores em pontos que praticamente não têm movimentos. Em sinais de tipo periódico ou transientes, a simples observação dos gráficos das séries no tempo pode permitir detectar a existência de um nível de ruído excessivo; no que se refere a sinais de tipo aleatório, já é mais difícil ter essa percepção. Neste último caso, é conveniente analisar os auto-espectros dos sinais, verificando se existem picos de ressonância bem evidentes e se os *vales* entre esses picos têm um aspecto *arredondado* (situação em que o nível de ruído é baixo).

- *Ruído intermitente*, que se traduz no facto de, quando em quando, surgirem nos sinais alguns picos. Esses picos podem corresponder a uma ocorrência com significado físico em termos da resposta duma estrutura ou serem simplesmente o efeito de ruído que, neste caso, deve ser devido a deficiências de contacto nas fichas de ligação dos cabos entre os transdutores e os condicionadores de sinal, ou entre estes e o sistema de aquisição.
- *Influência da frequência da rede de distribuição de energia eléctrica*, que se pode reflectir numa *contaminação* dos sinais com uma oscilação periódica (de 50 Hz em Portugal e em muitos outros países ou de 60 Hz na América do Norte), devido a um mau isolamento ou má ligação à terra do sistema de medição. Em princípio, é possível detectar este problema analisando os gráficos das séries no tempo ou dos seus auto-espectros, onde é nítido um pico muito aguçado na referida frequência e normalmente também nas suas harmónicas. A utilização de equipamentos alimentados exclusivamente a baterias é uma solução possível para ultrapassar este problema.
- *Tendências espúrias*, que se traduzem no facto dos sinais apresentarem variações lentas do seu valor médio, muitas vezes com um período mais longo do que a própria duração total dos registos. Nalgumas situações, se o equipamento utilizado tiver uma resposta que abranja as componentes estáticas ou de DC, pode haver um significado físico para essas variações lentas dos sinais de resposta, no entanto, em muitos casos, elas são de facto espúrias, resultando de um mau funcionamento do equipamento de medição.
- *Perdas de sinal*, que consistem numa quebra rápida dos sinais que pode ser momentânea ou até permanente. No primeiro caso, o motivo pode ser um mau funcionamento devido a uma saturação dos transdutores, enquanto que o segundo pode corresponder a uma ficha que se desligou, a uma falha na alimentação dos transdutores e/ou condicionadores ou mesmo a algum problema mais grave.
- *Pontos singulares*, que correspondem a uma situação algo semelhante à acima referida como ruído intermitente. Trata-se de valores que surgem nas séries digitalizadas em resultado de algum erro no conversor ADC e que não correspondem claramente a um fenómeno físico da resposta duma estrutura. Os pontos singulares podem traduzir-se em apenas um único valor que se destaca do restante sinal, ou mesmo num grupo de valores.

A primeira fase do pré-processamento dos registos da resposta duma estrutura, obtidos experimentalmente, é portanto a verificação da qualidade desses registos, detectando problemas como os acima enunciados. Em seguida, é, em geral, necessário proceder ainda a diversas operações, cuja necessidade depende um pouco da forma como os registos foram obtidos e da existência ou não dos referidos problemas nos sinais registados. O pré-processamento pode então envolver ainda as seguintes operações:

- *Correcção de pontos singulares*, que no caso de ser um único ponto destacado do restante sinal pode ser corrigido por uma simples interpolação entre os valores vizinhos. Já na situação de haver um grupo de valores que se destacam do restante sinal, a correcção não é tão simples sendo talvez preferível anular nessa zona todos os valores de todos os sinais, colocando antes e depois dela, uma janela com uma transição suave (*taper*) para evitar descontinuidades bruscas nos sinais corrigidos.
- *Junção de amostras com colocação de janelas de transição*, esta operação é necessária se o equipamento utilizado permitir apenas a aquisição contínua de amostras com uma duração limitada (por exemplo 4096 valores) e sem garantia de continuidade entre as sucessivas amostras. Neste caso, as diversas amostras podem ser juntas num único registo, sendo no entanto necessário colocar janelas de transição no princípio e no fim de cada amostra, pelo motivo já referido para a operação anterior.
- *Introdução de factores de escala nos registos*, esta operação consiste na passagem dos registos, na forma em que foram armazenados, para séries de valores em unidades físicas das grandezas que foram medidas, tendo em conta a sensibilidade dos transdutores e os factores de ganho nos condicionadores de sinal. Actualmente, é bastante fácil efectuar esta operação logo no programa de aquisição de dados, armazenando-se a informação já nas unidades físicas correctas. No entanto pode haver situações em que, na fase de pré-processamento, é necessário fazer a conversão dos sinais digitalizados armazenados em Volt, ou mesmo em níveis do conversor ADC (o armazenamento neste último formato pode ser vantajoso porque implica uma menor dimensão dos correspondentes ficheiros, uma vez que se trata apenas de valores inteiros).
- *Correcção dos registos tendo em conta a resposta em frequência dos equipamentos utilizados* (Paultre e Proulx, 1997). Os equipamentos utilizados na observação experimental da resposta dinâmica de estruturas têm as suas próprias características de resposta em frequência, o que faz com que as respostas medidas estejam por elas influenciadas, não correspondendo de forma perfeita aos movimentos dos sistemas estruturais. Assim, pode ser necessário efectuar uma operação de pré-processamento que consiste na correcção dos registos tendo em conta a resposta em frequência dos equipamentos utilizados. De preferência, os equipamentos devem ter, na gama de frequências de interesse para a estrutura

em análise, uma resposta em frequência tão constante quanto possível, tanto em termos de amplitude como de fase, o que de facto evita a necessidade de efectuar esta operação de pré-processamento. Note-se ainda que na identificação de configurações modais, os resultados são expressos em termos de relações de amplitude e fase entre as respostas medidas em diversos pontos duma estrutura, pelo que, desde que todos os equipamentos tenham respostas em frequência muito semelhantes, esta operação de pré-processamento não é muito importante. Por outro lado, se forem utilizados equipamentos com características de resposta em frequência bastante diferentes (uns para uns pontos e outros para outros pontos), já é imprescindível efectuar esta operação de pré-processamento, sob pena de se cometerem erros na avaliação das componentes modais.

- *Remoção de média, de tendências lineares e filtragem passa-alto.* Em geral, nomeadamente se forem utilizados acelerómetros de tipo servo, os sinais de resposta apresentam um valor médio não nulo, devido à impossibilidade de acertar completamente o zero dos transdutores, pelo que esse valor médio deve ser removido dos sinais. Devem-se corrigir também os sinais com as tendências espúrias já referidas, que poderão ser de tipo linear ou corresponder a sinais de muito baixa frequência. Essa correcção pode consistir no ajuste de uma recta que depois é retirada aos sinais, e/ou numa filtragem passa-alto para remover as componentes de muito baixa frequência.
- *Filtragem passa-baixo,* operação esta que é utilizada para remover componentes de alta frequência que não têm interesse para a banda de frequências que se pretende analisar. É ainda necessário efectuar esta operação, no caso de se pretender fazer a *decimação* dos sinais de modo a evitar erros de *aliasing*, conforme se indica em seguida.
- *Decimação,* que consiste na reamostragem ou passagem das séries de resposta digitalizadas para uma frequência de amostragem mais baixa. Para efectuar esta operação é necessário filtrar as séries com um filtro passa-baixo com uma frequência de corte de cerca de 0,4 da nova frequência de amostragem, para evitar erros de *aliasing* nas séries decimadas. Com esta operação consegue-se reduzir o número de valores nas séries de resposta consideradas para a análise de identificação modal, tornando mais rápidos todos os cálculos necessários para essa análise e sem que haja qualquer perda de informação na banda de frequências de interesse para a estrutura em causa.

Refere-se finalmente que, na fase de pré-processamento, pode-se verificar a existência de alguns sinais defeituosos que, por algum motivo, não foi possível detectar e/ou corrigir antes da aquisição dos sinais, podendo-se chegar à conclusão que é melhor nem sequer os considerar para a fase da análise de identificação modal. Dessa forma, podem-se obter melhores resultados, embora, evidentemente, perdendo a informação relativa aos correspondentes graus de liberdade experimentais.

3.4 Considerações finais

Neste capítulo apresentaram-se os aspectos relacionados com a realização prática de ensaios *in situ* de caracterização dinâmica de estruturas.

Descreveram-se os diversos tipos de equipamentos que podem ser utilizados na medição da resposta das estruturas, salientando-se os aspectos que se consideram mais importantes para a medição da resposta de estruturas de engenharia civil em ensaios com excitação natural. Descreveram-se com maior pormenor os equipamentos que foram utilizados nos exemplos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6.

Referiram-se diversas técnicas de ensaio dinâmico de estruturas, abordando-se mais pormenorizadamente os procedimentos a adoptar em ensaios com excitação natural, onde apenas é medida a resposta dos sistemas estruturais.

Focaram-se também diversas questões relacionadas com o planeamento dos ensaios, o qual pode envolver a utilização de modelos de elementos finitos para a definição dos pontos a instrumentar e escolha dos graus de liberdade de referência.

Finalmente, abordaram-se ainda os procedimentos de pré-processamento que normalmente é necessário aplicar aos registos de resposta obtidos experimentalmente.

Capítulo 4

Métodos de Identificação Modal Estocástica

4.1 Considerações gerais

Após se terem apresentado, no capítulo 2, os fundamentos analíticos da identificação modal estocástica e de, no capítulo 3, se terem abordado os aspectos relacionados com os equipamentos e os procedimentos a utilizar em ensaios de medição da resposta dinâmica das estruturas quando sujeitas às acções que normalmente sobre elas actuam (ensaios de medição de vibrações ambiente), no presente capítulo descrevem-se e aplicam-se diversos métodos de identificação modal apropriados para a análise da informação obtida nessa situação.

Tal como se indicou no capítulo 2, o facto de que nos ensaios de medição de vibrações ambiente, não há controlo sobre as forças de excitação (ou entrada dos sistemas) nem é possível conhecê-las (medi-las) duma forma determinística, leva a que, para efeitos de identificação modal, se assuma uma hipótese quanto às suas características – as forças de excitação são consideradas como uma realização de um processo estocástico gaussiano de tipo ruído branco com média nula. A designação *identificação modal estocástica* advém precisamente dessa hipótese, conforme referido no capítulo 1 deste trabalho.

Em face da hipótese admitida, é imediato colocar-se a questão sobre a aplicabilidade das técnicas de identificação modal estocástica no caso das acções ambiente sobre os sistemas estruturais não terem características de um processo de tipo ruído branco. Uma forma adequada de encarar esta questão é ilustrada na figura 4.1 (SVS, 2002) que exprime um importante conceito de base dos métodos de identificação modal estocástica.

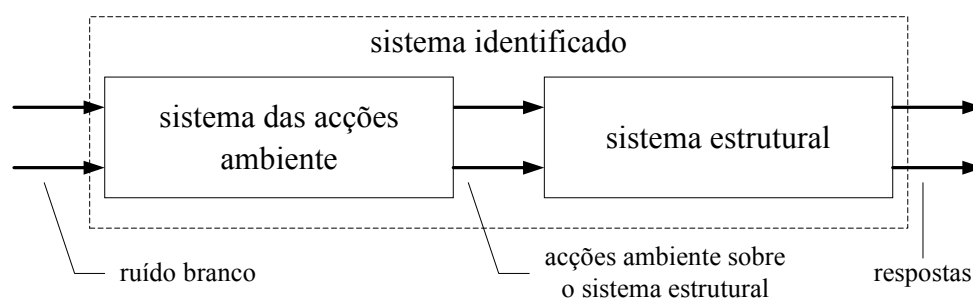


Figura 4.1 – Esquema do conceito de base dos métodos de identificação modal estocástica.

De acordo com o conceito expresso na figura 4.1, as acções ambiente sobre o sistema estrutural são encaradas como a resposta dum sistema virtual que é excitado por um processo de ruído branco. Os métodos de identificação modal estocástica são assim aplicados à resposta dum sistema total que engloba o sistema virtual das acções ambiente e o sistema estrutural em si. Relativamente a esse sistema total é perfeitamente válida a hipótese de ser excitado por um processo de ruído branco, no entanto, a sua resposta reflecte tanto as características do sistema estrutural como as do sistema virtual das acções ambiente. O sistema total apresenta portanto pólos (traduzidos em picos da amplitude das funções de densidade espectral da sua resposta) devidos ao sistema estrutural e também pólos devidos ao sistema das acções ambiente.

Um aspecto importante nos métodos de identificação modal estocástica é portanto a capacidade de, entre os pólos (em correspondência com picos da amplitude das funções de densidade espectral) identificados, distinguir aqueles que correspondem efectivamente ao sistema estrutural. À primeira vista, pode parecer que será difícil efectuar essa distinção, no entanto, em virtude das características dos sistemas estruturais (nomeadamente o facto de, em geral, terem amortecimentos com valores muito pequenos) e das características das acções ambiente (vento, tráfego, etc.), que não sendo perfeitamente idealizáveis através de processos de ruído branco são-no através de processos de banda larga (as suas funções de densidade espectral não são constantes mas são suficientemente uniformes numa banda larga de frequências, não apresentando, em geral, picos da amplitude muito acentuados), torna-se possível distinguir quais os pólos que correspondem ao sistema estrutural que se pretende identificar. Podem no entanto existir situações em que as acções ambiente têm frequências claramente dominantes, o que dificulta a utilização dos métodos de identificação modal estocástica. No caso dos sistemas estruturais a identificar terem modos de vibração com frequências muito próximas ou amortecimentos com valores elevados, também se torna mais difícil a utilização desses métodos de identificação modal.

Para a identificação modal de estruturas de grandes dimensões, como é o caso das estruturas de engenharia civil, e mesmo para estruturas de menores dimensões, para as quais é importante conhecer as suas características dinâmicas em condições de serviço (Hermans e Van der Auweraer, 1998), a identificação modal estocástica é de grande utilidade e apresenta algumas vantagens relativamente à identificação modal *clássica* com controlo e medição das forças de excitação. Essas vantagens relacionam-se sobretudo com a maior economia resultante de não se utilizarem equipamentos de excitação e de não ser necessário introduzir alterações no funcionamento normal das estruturas (por exemplo, interrupções de tráfego numa ponte). As acções ambiente acabam por ter também um carácter de multi-entrada, excitando os sistemas em diferentes pontos simultaneamente, o que é vantajoso em termos de excitar os diversos modos dos sistemas. No entanto, em geral, as respostas induzidas pelas acções ambiente têm amplitudes pequenas (mais pequenas do que as que

seria possível induzir com ensaios de vibração forçada), o que exige que se utilizem equipamentos de grande sensibilidade, conforme se referiu no capítulo 3.

Podem-se considerar, fundamentalmente, dois grupos de métodos de identificação modal estocástica: o primeiro grupo compreende os métodos de análise de sinal, também denominados métodos não paramétricos; o segundo grupo corresponde aos métodos de ajuste de modelos, também designados por métodos paramétricos. Nos métodos do primeiro grupo, as séries de resposta medidas em diferentes pontos dos sistemas estruturais são analisadas e relacionadas entre si, tendo por base a sua transformação para o domínio da frequência, normalmente através do algoritmo da FFT (Cooley e Tukey, 1965) – estes métodos são por isso também designados por métodos no domínio da frequência. No segundo grupo de métodos, são utilizadas diferentes técnicas para ajustar modelos, ou com base nas funções de correlação da resposta dos sistemas estruturais ou mesmo directamente nas próprias séries temporais de resposta – estes métodos são assim também designados por métodos no domínio do tempo.

Os métodos paramétricos utilizados na identificação modal estocástica envolvem, de forma mais directa, a utilização de metodologias desenvolvidas no domínio da *identificação de sistemas*, proveniente da engenharia electrotécnica e da engenharia de sistemas de controlo. Nesse domínio são, em geral, distinguidas as seguintes fases na identificação dum sistema (Ljung, 1999):

- obtenção experimental da informação de base para aplicar os métodos de identificação;
- escolha do tipo de modelo que se considera adequado para descrever os sistemas; para os métodos paramétricos aplicáveis na identificação modal estocástica referiram-se no capítulo 2 três tipos de modelos que são considerados em diversos métodos de identificação modal; trata-se de modelos sob a forma da representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto, de modelos ARMAV e de modelos ARV;
- aplicação dos métodos de identificação em si, ou seja, dos procedimentos através dos quais são determinados os parâmetros associados ao tipo de modelo escolhido, de modo a *ajustá-lo o melhor possível* aos dados obtidos experimentalmente; esta fase envolve assim a definição de um critério que *mede* o ajuste do modelo aos dados experimentais, e em cuja satisfação se baseia o procedimento de identificação.

Para além destas três fases, na identificação de sistemas poder-se-á ainda considerar uma fase de validação, na qual o modelo identificado é testado considerando dados experimentais diferentes dos utilizados na identificação em si. Conforme se referirá adiante, um bom procedimento de validação dos resultados da identificação modal estocástica consiste também na comparação entre os resultados obtidos com diversos métodos.

Há fundamentalmente três formas de definir o critério com base no qual é efectuado o ajuste dos modelos aos dados experimentais. Designando por *erro de predição* dum modelo, a diferença entre a resposta observada experimentalmente e a resposta estimada (prevista) com esse modelo, o referido critério pode ser estabelecido através das metodologias seguintes (Ljung, 1999):

- imposição da condição do erro de predição ser independente da resposta observada, ou seja, o erro de predição não deve estar correlacionado com a resposta observada; este critério dá origem ao método das variáveis instrumentais (IV), a partir do qual podem-se definir os métodos de identificação modal estocástica que se baseiam na análise das funções de correlação da resposta dos sistemas (Peeters, 2000);
- o método de projecção em subespaços para estimar modelos no espaço de estado, utilizado no método de identificação estocástica em subespaços (SSI);
- minimização do erro de predição avaliado através duma norma; é este critério que é utilizado no chamado método do erro de predição (PEM) aplicado no ajuste de modelos ARMAV.

As séries discretas de resposta dos sistemas estruturais constituem a informação de base comum a todos os métodos de identificação modal estocástica; no entanto, conforme indicado anteriormente, para alguns métodos é ainda necessário efectuar transformações nessa informação. Existem então três tipos de dados de base dos métodos de identificação modal estocástica:

- as próprias séries temporais de resposta;
- as funções de correlação das séries temporais de resposta;
- as funções de densidade espectral das séries temporais de resposta.

Os métodos em que se utilizam directamente as séries temporais de resposta podem ser designados por *métodos de uma fase*; enquanto que os métodos que se baseiam na análise das funções de correlação ou na análise das funções de densidade espectral da resposta podem ser designados por *métodos de duas fases*, uma vez que envolvem uma primeira fase de avaliação das funções de correlação ou de avaliação das funções de densidade espectral e uma segunda fase de análise dessas funções com vista à identificação das características dinâmicas dos sistemas.

A ideia de base dos *métodos de duas fases* é a de efectuar uma transferência da informação mais importante contida nas séries de resposta no tempo, para funções características da resposta dos sistemas, tais como as funções de correlação ou as funções de densidade espectral. Estas funções características funcionam como funções de interface. Elas contém, duma forma sintética, a informação mais importante sobre os sistemas, que está presente nas séries de resposta no tempo sob uma forma menos evidente, e como tal podem servir de base a métodos de identificação modal. A vantagem em

utilizar essas funções de interface está na síntese que é efectuada à informação, com a correspondente redução do volume de dados que é necessário tratar directamente na fase de identificação modal.

Pode no entanto haver alguns inconvenientes associados à síntese da informação, que é conseguida com a avaliação das funções de caracterização da resposta dos sistemas, tais como, alguma perda de informação ou a introdução de erros de viés. É o que se passa com as estimativas das funções de densidade espectral da resposta, determinadas com o algoritmo da FFT. Essas estimativas são determinadas em valores discretos de frequência, o que só permite avaliar as frequências naturais de vibração dos sistemas, com uma resolução finita em frequência. Devido ao efeito de escorregamento (*leakage*) essas estimativas são também enviesadas o que constitui uma fonte adicional de erro nos parâmetros modais delas identificados, nomeadamente nos coeficientes de amortecimento.

Em geral, pode-se considerar que os métodos de identificação modal estocástica, que consistem no ajuste de modelos directamente às séries temporais de resposta, permitem obter uma maior precisão na identificação das características dinâmicas dos sistemas, do que os métodos que se baseiam na análise das funções de caracterização da resposta. No entanto, os primeiros métodos exigem também mais tempo de processamento do que os segundos (Brincker *et al.*, 1992).

Em seguida, descrevem-se e aplicam-se diversos métodos de identificação modal estocástica, organizando-os em dois grupos: métodos no domínio da frequência; métodos no domínio do tempo. Embora também se pudessem utilizar as designações: métodos não paramétricos; métodos paramétricos; conforme se explicou anteriormente.

4.2 Métodos no domínio da frequência

4.2.1 Estimativa das funções de densidade espectral da resposta

Na avaliação das funções de densidade espectral da resposta dos sistemas estruturais medida experimentalmente, é necessário ter presentes diversas noções de processamento digital e análise espectral de sinais. Neste trabalho, não se abordam em pormenor vários aspectos de base desse domínio, tratando-se apenas da sua aplicação na identificação modal estocástica. Os trabalhos de Bendat e Piersol (1993, 2000) constituem referências de base na área do processamento digital e análise espectral de sinais, referindo-se ainda Carvalhal *et al.* (1989) e Caetano (1992) como dois bons trabalhos, escritos em Português, que abordam essa temática.

A maneira mais eficiente de avaliar as funções de densidade espectral da resposta dum sistema estrutural envolve a determinação das transformadas discretas de Fourier (DFT) dos sinais de resposta. Esta forma de efectuar o cálculo das funções de densidade espectral é devida a Welch (1967), sendo

por isso também utilizada a designação de *periodograma de Welch* (Ljung, 1999; Peeters, 2000) para referir as funções de densidade espectral assim determinadas.

Para reduzir os efeitos de escorregamento (*leakage*), antes do cálculo da DFT, devem-se aplicar janelas de processamento de sinal, ou janelas de dados, aos sinais de resposta. No caso de sinais de tipo aleatório (que é a situação dos sinais de resposta registados em ensaios de medição de vibrações ambiente) a janela de *Hanning* é a que é normalmente utilizada (Brown *et al.* 1999).

As transformadas discretas de Fourier dos sinais de resposta discretos no tempo y_k , aos quais foi aplicada uma janela de dados w_k , são dadas por (Bendat e Piersol, 2000):

$$Y(\omega, T) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k e^{-j\omega k \Delta t} \quad (4.1)$$

em que: N é o número de valores discretos dos sinais y_k ;

Δt é o intervalo de tempo entre os valores discretos dos sinais y_k ;

ω é uma frequência arbitrária;

T é a duração total dos sinais y_k .

A escolha usual de valores discretos de frequência para o cálculo de (4.1) é:

$$\omega_m = \frac{m}{N} \frac{2\pi}{\Delta t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.2)$$

A resolução em frequência na transformada discreta de Fourier é portanto igual ao inverso da duração total dos sinais, ou seja:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N \Delta t} \quad [rad.s^{-1}] \Leftrightarrow \Delta f = \frac{1}{N \Delta t} \quad [Hz] \quad (4.3)$$

Nas frequências discretas ω_m os valores transformados fornecem as componentes de Fourier, definidas através de:

$$Y_m = \frac{Y(\omega_m)}{\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k e^{-j\frac{2\pi m k}{N}}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.4)$$

Uma forma eficiente de efectuar a determinação da DFT é através do algoritmo da transformada rápida de Fourier, FFT (Cooley e Tukey, 1965).

A estimativa da matriz de funções de densidade espectral das respostas y_k pode então ser calculada a partir das suas DFT, $Y(\omega_m)$, através da expressão seguinte:

$$\hat{\mathbf{S}}_y(\omega_m) = \frac{1}{N \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \mathbf{Y}^*(\omega_m) \mathbf{Y}^T(\omega_m) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

Conforme se referiu no capítulo 2, os elementos da diagonal principal da matriz de funções de densidade espectral das respostas (4.5) são designados por auto-espectros, enquanto que os restantes elementos são designados por espectros cruzados.

Na expressão (4.5), a frequência de *Nyquist* (metade da frequência de amostragem dos sinais discretos y_k) verifica-se para $m = N/2$. Assim, os primeiros $N/2 + 1$ valores espectrais correspondem à gama de frequências entre 0 e a frequência de *Nyquist*, enquanto que os últimos $N/2 - 1$ valores espectrais podem ser interpretados como correspondentes a frequências negativas entre a frequência de *Nyquist* negativa e 0. Atendendo às propriedades de simetria e anti-simetria das funções de densidade espectral (4.5) e por ser mais cómodo trabalhar apenas com frequências positivas (Caetano, 1992), são normalmente utilizadas as estimativas seguintes das funções de densidade espectral (*one-sided spectral density functions*):

$$\hat{\mathbf{G}}_y(\omega_m) = \begin{cases} \frac{2}{N \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \mathbf{Y}^*(\omega_m) \mathbf{Y}^T(\omega_m) & , \quad m = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \frac{1}{N \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \mathbf{Y}^*(\omega_m) \mathbf{Y}^T(\omega_m) & , \quad m = 0, N/2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Na forma apresentada na expressão (4.6), as funções de densidade espectral são avaliadas a partir das transformadas discretas de Fourier dos registos totais de resposta, no entanto, ao proceder assim obtêm-se estimativas com uma elevada variância. Para reduzir essa variância, os registos de resposta são divididos em n_d amostras, é aplicada uma janela de dados a cada uma, são calculadas as correspondentes transformadas discretas de Fourier, e finalmente é determinada a sua média para obter estimativas alisadas (*smoothed*) das funções de densidade espectral. Este procedimento corresponde a, em vez da expressão (4.6), utilizar a expressão seguinte:

$$\tilde{\mathbf{G}}_y(\omega_m) = \begin{cases} \frac{2}{n_d N \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \sum_{i=1}^{n_d} \mathbf{Y}_i^*(\omega_m) \mathbf{Y}_i^T(\omega_m) & , \quad m = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \frac{1}{n_d N \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2} \sum_{i=1}^{n_d} \mathbf{Y}_i^*(\omega_m) \mathbf{Y}_i^T(\omega_m) & , \quad m = 0, N/2 \end{cases} \quad (4.7)$$

O erro aleatório normalizado (erro de variância) na estimativa das funções de densidade espectral da resposta de um sistema estrutural pode ser avaliado através de:

$$\varepsilon_r [\tilde{G}_y(\omega_m)] = \frac{1}{\sqrt{n_d}} \quad (4.8)$$

A expressão (4.8) é válida para a situação em que os registos totais são subdivididos em n_d amostras independentes. Um procedimento usual na subdivisão dos registos é considerar amostras sobrepostas; tal justifica-se porque as janelas de dados reduzem significativamente a amplitude nas extremidades das amostras e portanto, ao sobrepor as amostras procura-se aproveitar bem toda a informação contida nos registos. No caso da janela de *Hanning*, uma sobreposição de 66,7 % é a que optimiza o aproveitamento da informação dos registos; no entanto, é também muito comum utilizar-se uma sobreposição de 50 %. Neste último caso (sobreposição de 50 %), o erro aleatório normalizado na estimativa das funções de densidade espectral pode ser avaliado através de (Delaunay *et al.*, 1999):

$$\varepsilon_r [\tilde{G}_y(\omega_m)] = \sqrt{\frac{6n_d - 1}{8n_d^2}} \quad (4.9)$$

em que: n_d é o número de amostras independentes (não sobrepostas).

As estimativas das funções de densidade espectral da resposta dos sistemas estruturais, avaliadas de acordo com (4.7), constituem os dados de base dos métodos de identificação modal estocástica no domínio da frequência que serão apresentados em seguida.

Exemplo: Num dos modelos físicos de edifícios de 4 pisos, já considerado no capítulo 2 para ilustrar os fundamentos analíticos dos métodos de identificação modal estocástica, efectuou-se um ensaio de medição de vibrações ambiente. Nesse ensaio, foram colocados 3 acelerómetros em cada piso do modelo, de modo a medir os seus movimentos nas direcções longitudinal e transversal (x e y, ver figura 2.1) e também de torção em torno do eixo vertical. A análise completa dessa informação, relativamente aos 3 graus de liberdade de cada piso, será apresentada no capítulo 6. Neste capítulo, para exemplificação dos métodos de identificação modal estocástica, só serão considerados como graus de liberdade do sistema, os deslocamentos horizontais de cada piso na direcção longitudinal, tal como já se considerou no capítulo 2.

No ensaio efectuado, os acelerómetros *Kinematics ES-U* foram configurados para uma sensibilidade de 80 Volt/g; foi ainda utilizado um factor de ganho de 50 nas unidades de alimentação e condicionamento de sinal; desta forma, e uma vez que se utilizou uma placa de conversão analógica/digital de 16 bits com entrada de ± 10 Volt, a amplitude mínima de aceleração que foi possível discretizar foi de 0,076 μg . Os registos foram obtidos com uma frequência de amostragem de 1000 Hz e foram pré-processados digitalmente com remoção de média, filtragem passa-baixo com frequência de corte a 25 Hz com um filtro de tipo *Butterworth* de ordem 8 e decimação para uma frequência de 62,5 Hz.

A duração total dos registos obtidos no ensaio foi de cerca de 30 minutos (114688 valores a 62,5 Hz).

O ensaio foi realizado com o modelo colocado no interior da sala de ensaios do edifício Ferry Borges no LNEC. As acelerações registadas foram assim de amplitude bastante pequena (ver o quadro 4.1 onde se indicam os valores máximos e rms das acelerações longitudinais), no entanto, suficiente para ser medida com uma boa discretização, com os acelerómetros *Kinematics ES-U* na configuração acima indicada.

Quadro 4.1 – Valores máximos e rms das acelerações longitudinais.

	máx. (mg)	rms (mg)
piso 1 - y_1	0,32	0,038
piso 2 - y_2	0,39	0,043
piso 3 - y_3	0,22	0,039
piso 4 - y_4	0,23	0,042

Na figura 4.2 apresentam-se amostras simultâneas dos registos de aceleração longitudinal nos 4 pisos do modelo.

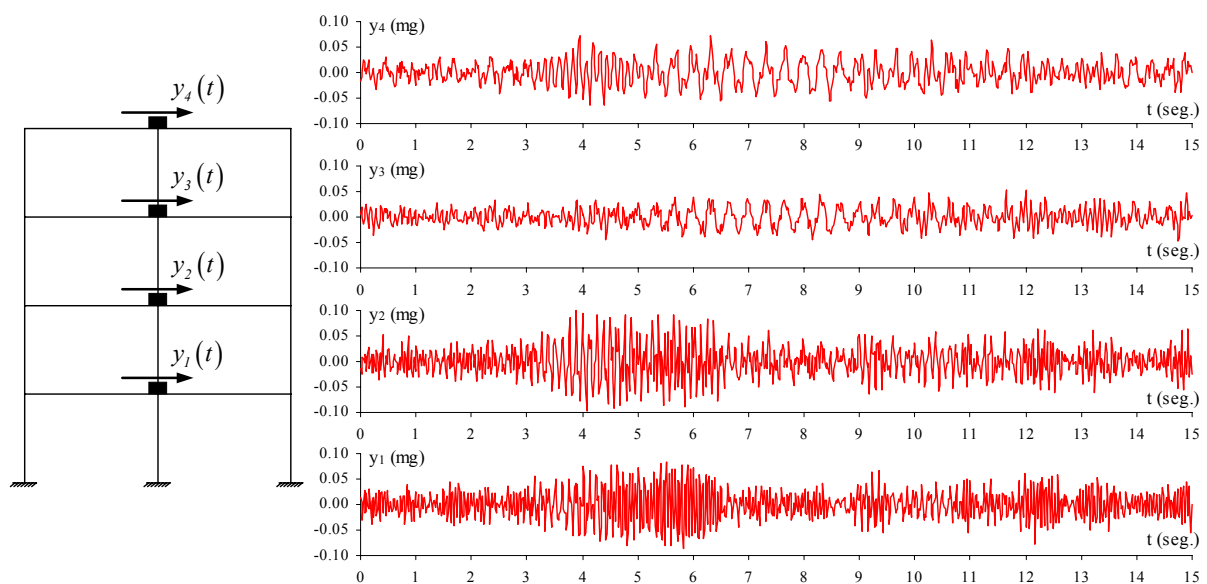


Figura 4.2 – Amostras dos registos de aceleração longitudinal nos 4 pisos do modelo.

A partir dos registos de acelerações obtidos nos ensaios de medição de vibrações ambiente, avaliaram-se as estimativas das funções de densidade espectral da resposta em aceleração do sistema estrutural. Esta avaliação foi efectuada de acordo com (4.7), considerando 56 amostras independentes ($n_d = 56$) de 2048 valores, com uma sobreposição de 50 % e utilizando uma janela de *Hanning* para reduzir os efeitos de escorregamento; para a frequência de amostragem de 62,5 Hz, obtiveram-se assim estimativas das funções de densidade espectral com uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,031$ Hz.

Na figura 4.3, representam-se as estimativas da amplitude e fase de toda a matriz de funções de densidade espectral da resposta em aceleração, do sistema estrutural considerado para exemplo.

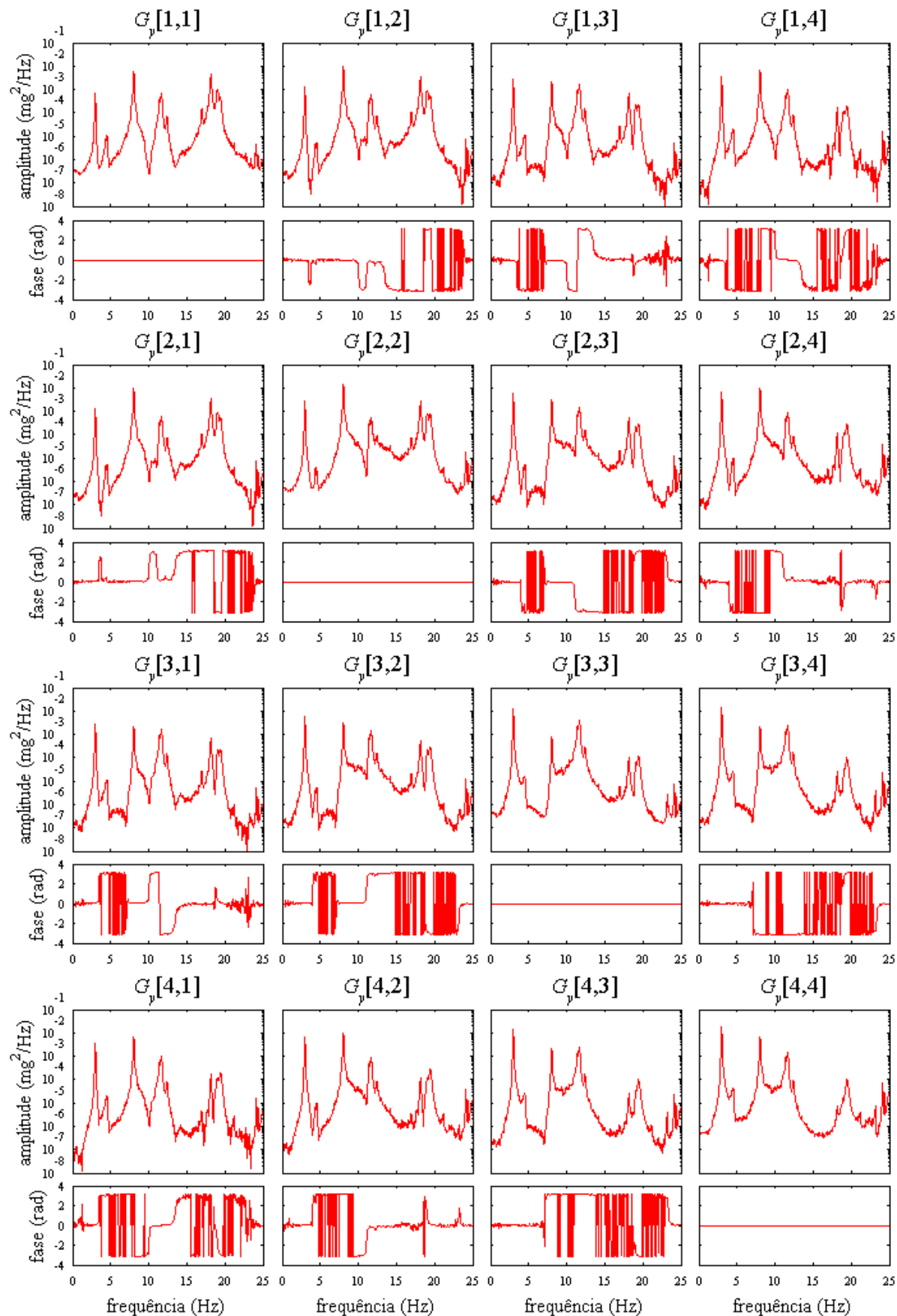


Figura 4.3 – Estimativas das funções de densidade espectral da resposta em aceleração do sistema de exemplo.

4.2.2 Método básico no domínio da frequência

O método básico no domínio da frequência (BFD), ou método de selecção de picos, é o método de identificação modal estocástica de que há maior experiência de utilização no domínio da avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil, quer a nível geral, quer em termos das aplicações desenvolvidas no âmbito deste trabalho e que serão apresentadas no capítulo 6.

Como primeiras aplicações do método BFD, embora ainda não na forma que adiante será descrita, referem-se: Crawford e Ward (1964) que avaliam as frequências naturais de vibração de um edifício de 19 pisos a partir da análise dos auto-espectros de registos de velocidade obtidos em ensaios de medição de vibrações ambiente, estimando também a configuração do 1º modo de translação numa das direcções; Mc Lamore *et al.* (1971) que avaliam as frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração de duas pontes suspensas, a *Newport Bridge* em *Rhode Island* e a *William Preston Lane Memorial Bridge* em *Maryland*, utilizando técnicas de análise espectral dos registos de vibrações induzidas pelos efeitos do tráfego e vento; Trifunac (1972) que avalia as frequências e configurações dos modos naturais de vibração de dois edifícios, utilizando os espectros de Fourier (amplitude e fase) de registos de velocidades obtidos em ensaios de medição de vibrações ambiente; Abdel-Ghaffar (1978) que avalia as frequências dos modos naturais de vibração duma ponte suspensa, a *Vicent Thomas Bridge* em *Los Angeles*, analisando os espectros de amplitude de Fourier de registos de velocidades e deslocamentos na estrutura sob o efeito do vento e tráfego rodoviário.

Para além dos trabalhos indicados no parágrafo anterior, vários outros poderiam ser referidos, em que o método de identificação modal utilizado se baseia na análise dos espectros dos registos da resposta das estruturas às acções ambiente. Sob um ponto de vista da apresentação dos fundamentos do método BFD, refere-se também Bendat e Piersol (1993). É no entanto devido a Felber (1993) o trabalho de desenvolvimento do método numa forma mais sistematizada que permitiu a sua automatização através de programas de análise e de visualização gráfica das configurações modais identificadas (EDI, 1995). Na sequência deste trabalho, verificou-se um grande incremento na aplicação dos ensaios de medição de vibrações ambiente para a identificação modal de estruturas de engenharia civil, nomeadamente na *UBC - University of British Columbia* (Ventura *et al.*, 1996; Black *et al.*, 1997; Dyck e Ventura, 1998) e no *EMPA - Swiss Federal Laboratory for Materials Testing and Research* (Felber e Cantieni, 1995, 1996).

Os fundamentos do método BFD foram já delineados no capítulo 2, quando se analisou a representação analítica das funções de densidade espectral da resposta dos sistemas estruturais. Verificou-se então que sob a hipótese das acções ambiente serem assumidas como um processo

estocástico gaussiano de ruído branco com média nula, as funções de densidade espectral da resposta dos sistemas, apresentam picos de amplitude nas suas frequências naturais de vibração (não exactamente nessas frequências, mas, conforme se salientou no capítulo 2, em frequências muito próximas para os valores usuais dos coeficientes de amortecimento e para modos de vibração com frequências bem separadas). Referiu-se também no capítulo 2, ainda que brevemente, que as componentes modais nos diversos graus de liberdade onde é observada a resposta dos sistemas, estão também expressas nas funções de densidade espectral. Os coeficientes de amortecimento reflectem-se também na largura dos picos de ressonância das funções de densidade espectral.

Do que foi referido no parágrafo anterior, pode-se depreender que as características dinâmicas dos sistemas estruturais (frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração) podem ser extraídas da análise das funções de densidade espectral, estimadas a partir das respostas medidas experimentalmente (tal como apresentado em 4.2.1). Indica-se em seguida, como é efectuada essa análise no método BFD.

Espectros normalizados médios - ANPSD:

Conforme se indicou no capítulo 3, os ensaios de identificação modal com medição apenas da resposta dos sistemas estruturais podem exigir a obtenção de registos em dezenas ou centenas de pontos das estruturas. A análise espectral desses registos conduzirá a igual número de auto-espectros e ainda a espectros cruzados que relacionam entre si os registos de resposta obtidos nos diferentes pontos instrumentados. A análise dessas funções de densidade espectral, para identificação de todas as frequências onde se verificam picos de ressonância que podem corresponder a modos naturais de vibração dos sistemas estruturais, pode tornar-se extremamente trabalhosa. Uma forma de sintetizar toda essa informação é através dos espectros normalizados médios – ANPSD (Felber, 1993). Estes espectros são calculados a partir dos auto-espectros² dos registos através do procedimento seguinte:

- a) Cálculo dos auto-espectros normalizados (NPSD) dos registos de resposta obtidos em cada ensaio dos vários ensaios efectuados, através de:

$$\text{NPSD}_i(\omega_m) = \frac{\tilde{G}_y[i, i](\omega_m)}{\sum_{m=1}^{N/2} \tilde{G}_y[i, i](\omega_m)} \quad (4.10)$$

esta normalização corresponde a tornar igual a área sob cada um dos auto-espectros.

² Também é possível incluir os espectros cruzados na avaliação dos ANPSD, embora não seja essa a metodologia adoptada neste trabalho, nomeadamente, nas aplicações que serão apresentadas no capítulo 6.

Alternativamente a (4.10), em (LNEC - Rodrigues, 2000) propõe-se um processo de normalização ligeiramente diferente, que tem por objectivo dar um peso menor aos auto-espectros dos registos com uma menor relação sinal-ruído (obtidos em pontos dos sistemas estruturais onde os movimentos são de menor amplitude). Nesse processo de normalização, cada auto-espectro é multiplicado por um factor proporcional à sua área a dividir pela soma das áreas de todos os auto-espectros correspondentes a um mesmo ensaio, ou seja:

$$\text{NPSD}_i(\omega_m) = \tilde{\mathbf{G}}_y[i, i](\omega_m) \frac{\sum_{m=1}^{N/2} \tilde{\mathbf{G}}_y[i, i](\omega_m)}{\sum_{i=1}^{n_e} \left[\sum_{m=1}^{N/2} \tilde{\mathbf{G}}_y[i, i](\omega_m) \right]} \quad (4.11)$$

em que n_e é o número de respostas observadas em cada ensaio.

- b) Cálculo da média dos auto-espectros normalizados (ANPSD) correspondentes a todos os pontos instrumentados e a todos os ensaios efectuados. Para o 1º processo de normalização, traduzido em (4.10), tal corresponde a aplicar a expressão seguinte:

$$\text{ANPSD}(\omega_m) = \frac{1}{n^\circ \text{ ensaios}} \sum_{j=1}^{n^\circ \text{ ensaios}} \left[\frac{1}{n_e} \sum_{i=1}^{n_e} \text{NPSD}_i(\omega_m) \right] \quad (4.12)$$

Para o 2º processo de normalização, expresso em (4.11), o cálculo da média dos auto-espectros normalizados pode ser traduzido através da expressão seguinte:

$$\text{ANPSD}(\omega_m) = \frac{1}{n^\circ \text{ ensaios}} \sum_{j=1}^{n^\circ \text{ ensaios}} \left[\sum_{i=1}^{n_e} \text{NPSD}_i(\omega_m) \right] \quad (4.13)$$

O aspecto mais importante dos espectros normalizados médios é o facto de constituírem uma forma de sintetizar a informação contida nos espectros calculados com os registos obtidos nos diferentes pontos instrumentados. Devido ao facto de resultarem do cálculo duma média de diferentes espectros, os ANPSD apresentam bem evidenciados os picos de ressonância que se verificam em todos os auto-espectros, enquanto que os picos que se verificam só num auto-espectro são suavizados. Os ANPSD facilitam portanto o trabalho de identificação das frequências que devem corresponder a modos globais de vibração dos sistemas estruturais.

Para facilitar a análise e a distinção entre os modos de vibração dum sistema estrutural, a nível do pré-processamento dos registos é recomendável efectuar algumas operações simples (semi-soma, semi-diferença), que permitem obter séries de resposta que salientam os modos de vibração de determinados tipos. Os ANPSD devem portanto ser calculados também com essas séries, obtendo-se

assim os ANPSD correspondentes a diferentes tipos de modos de vibração. Em geral (embora haja situações, a analisar caso a caso, em que se deve proceder doutra forma), devem-se calcular os ANPSD separadamente para as séries indicadas em seguida:

- a) Em estruturas de pontes e viadutos: Semi-soma de registos verticais nos extremos de cada secção do tabuleiro (modos verticais); Semi-diferença de registos verticais nos extremos de cada secção do tabuleiro (modos de torção); Registos transversais (modos transversais); Registos longitudinais (modos longitudinais).
- b) Em estruturas de edifícios (assumindo os pisos como diafragmas rígidos no seu próprio plano): Semi-soma de registos horizontais numa direcção X nos extremos de cada piso (modos de translação segundo X); Semi-diferença de registos horizontais numa direcção X nos extremos de cada piso (modos de torção); Registos horizontais numa direcção Y ortogonal a X (modos de translação segundo Y).

No método BFD, uma vez que se trabalha com uma resolução finita em frequência, estes procedimentos de separação de séries no cálculo dos ANPSD têm bastante importância para que se consiga distinguir mais facilmente os modos de vibração com frequências muito próximas (desde que sejam de tipos diferentes).

Após o cálculo dos ANPSD, é necessário efectuar uma análise de selecção dos picos de ressonância mais importantes. As frequências onde ocorrem esses picos devem corresponder a modos naturais de vibração dos sistemas estruturais, no entanto é necessário confirmá-lo tendo em conta as funções de coerência entre os registos de resposta obtidos nos diferentes pontos instrumentados e também as configurações modais correspondentes a essas frequências; estes dois aspectos serão precisamente abordados em seguida. Note-se que se as acções ambiente fossem exactamente um ruído branco e se os registos não tivessem qualquer ruído, ou seja, se os equipamentos fossem perfeitos, os picos de ressonância dos ANPSD corresponderiam de certeza a modos de vibração dos sistemas estruturais, conforme se mostrou no capítulo 2.

Exemplo: Considerando as funções de densidade espectral anteriormente calculadas e apresentadas na figura 4.3, determinou-se o espectro normalizado médio (ANPSD) das acelerações longitudinais registadas no ensaio efectuado. Este espectro é apresentado na figura 4.4 e corresponde à média dos auto-espectros da figura 4.3 normalizados de acordo com o segundo procedimento acima descrito, (4.11) e (4.13). Note-se que neste caso, em que só foi feito um ensaio, não seria muito importante efectuar a normalização dos espectros, bastando determinar o espectro médio para sintetizar a informação contida nos quatro auto-espectros correspondentes a cada um dos pisos do modelo do edifício.

Na figura 4.4, são também indicados os valores das frequências correspondentes aos quatro picos de ressonância mais evidentes. Em princípio, essas frequências devem corresponder a modos naturais de vibração do modelo do edifício, no entanto, é necessário confirmá-lo, conforme se salientou anteriormente, através da análise das funções de coerência e das configurações modais correspondentes a essas frequências.

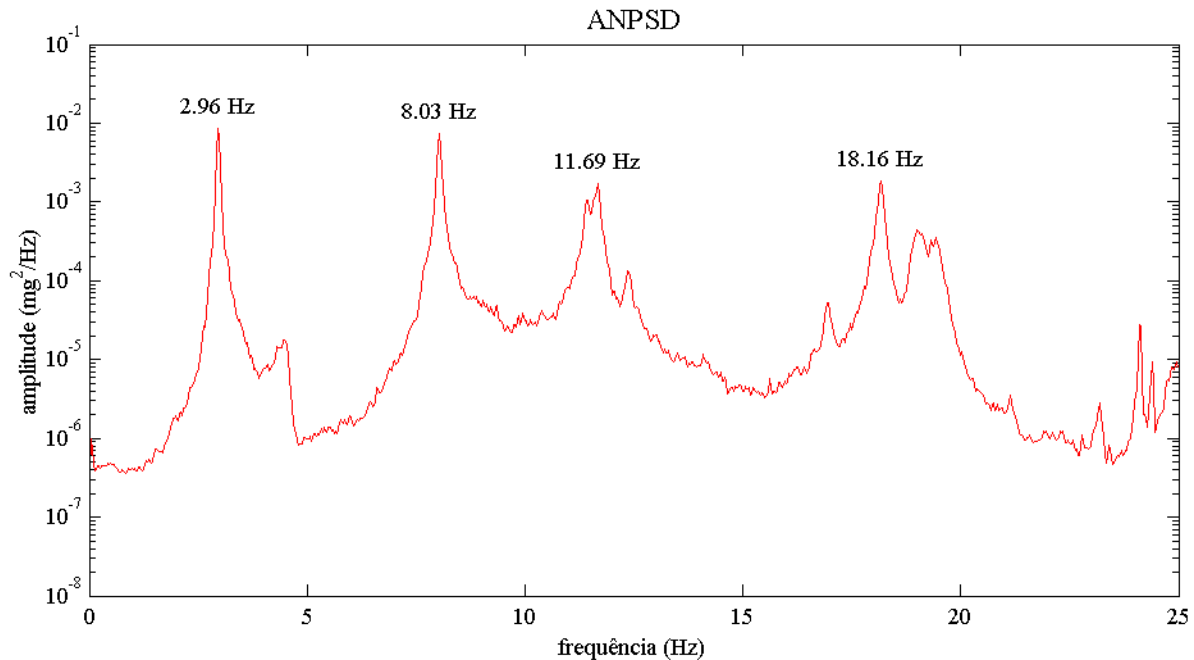


Figura 4.4 – Espectro normalizado médio dos registos de acelerações longitudinais.

Chama-se a atenção para o facto de que o modelo físico em que foi feito o ensaio de medição de vibrações ambiente, para ilustrar neste capítulo a aplicação dos métodos de identificação modal estocástica, tinha alguns danos (fendas visíveis, principalmente junto aos nós viga-pilar). Acresce ainda que devido a um acidente durante o transporte do modelo, a base de um dos pilares entre o 2º e o 3º pisos, e a extremidade de uma das vigas do 3º piso, tinham sofrido danos importantes, posteriormente reparados com argamassa. Uma vez que o modelo estava danificado, é natural que as frequências identificadas experimentalmente (ver figura 4.4) sejam inferiores às calculadas analiticamente considerando o modelo como estando intacto (ver capítulo 2). Um outro efeito, resultante do modelo estar danificado, é o de se verificar que nas estimativas das funções de densidade espectral, avaliadas com os registos longitudinais, surgem também, ainda que com menor energia (ver figuras 4.3 e 4.4), alguns picos de ressonância que devem corresponder a modos de torção do modelo – dos danos no modelo parece assim ter resultado um desvio dos centros de rigidez dos pisos relativamente aos seus centros de massa.

Funções de coerência:

Conforme se referiu na introdução deste capítulo, um aspecto importante nos métodos de identificação modal estocástica é a capacidade de, entre os picos identificados nas funções de densidade espectral, distinguir aqueles que correspondem efectivamente a modos de vibração dos

sistemas estruturais. No método BFD, as funções de coerência são um elemento importante para efectuar essa distinção.

A estimativa da função de coerência entre dois sinais de resposta y_i e y_j é dada por:

$$\gamma_{i,j}^2(\omega_m) = \frac{|\tilde{\mathbf{G}}_y[i,j](\omega_m)|^2}{\tilde{\mathbf{G}}_y[i,i](\omega_m) \tilde{\mathbf{G}}_y[j,j](\omega_m)} \quad (4.14)$$

A função de coerência (4.14) é uma função escalar que pode ter valores entre 0 e 1, traduzindo, no domínio da frequência, o grau de linearidade da relação entre o sinal y_i e o sinal y_j . Valores de coerência próximos de 1 mostram que há uma forte relação de linearidade entre os dois sinais. A função de coerência tem um significado análogo ao quadrado do coeficiente de correlação utilizado em estatística (Bendat e Piersol, 2000).

Nas frequências dos modos globais de vibração dos sistemas estruturais, a função de coerência entre os sinais de resposta observados em diversos pontos deve apresentar valores próximos de 1. Nos picos de ressonância, detectados nos auto-espectros, que sejam devidos a modos locais de elementos dos sistemas estruturais ou a frequências das forças de excitação que não induzam movimentos globais nas estruturas, a função de coerência entre os sinais de resposta tem valores baixos (Paultre *et al.*, 1995). A função de coerência também pode ter valores baixos nas frequências de modos de vibração que sejam pouco excitados pelas acções ambiente, ou naquelas em que pelo menos um dos sinais analisados tenha sido obtido num ponto que esteja próximo de um nodo dos correspondentes modos de vibração.

A análise da função de coerência entre os sinais de resposta nos diversos pontos instrumentados em ensaios de medição de vibrações ambiente e os pontos considerados para referência, é assim bastante importante para confirmar se as frequências dos picos de ressonância identificados nos ANPSD correspondem de facto a modos naturais de vibração dos sistemas estruturais. A função de coerência pode ainda ser considerada para estabelecer intervalos de confiança nas estimativas das relações de amplitude e fase entre os sinais de resposta observados em diferentes pontos das estruturas, conforme se verá mais adiante.

Refere-se ainda que, a partir da função de coerência, pode-se definir uma outra função, designada por relação sinal-ruído entre dois sinais, através da expressão indicada em seguida (embora não seja muito comum utilizar essa função no âmbito da identificação modal estocástica):

$$SNR_{i,j}(\omega_m) = \frac{\gamma_{i,j}^2(\omega_m)}{1 - \gamma_{i,j}^2(\omega_m)} \quad (4.15)$$

Exemplo: Considerando as funções de densidade espectral anteriormente calculadas e apresentadas na figura 4.3, determinaram-se as funções de coerência (4.14) entre as acelerações longitudinais registadas no ensaio efectuado. Estas funções de coerência são apresentadas na figura 4.5 sob a forma de uma matriz. Como se pode verificar nessa figura, as funções de coerência dum sinal consigo próprio (elementos da diagonal principal da matriz) têm sempre um valor unitário. Em relação às restantes funções de coerência, pode-se verificar que em diversas frequências, assumem valores de 1 ou muito próximos de 1, indiciando que nessas frequências há uma forte relação de linearidade entre os sinais de resposta.

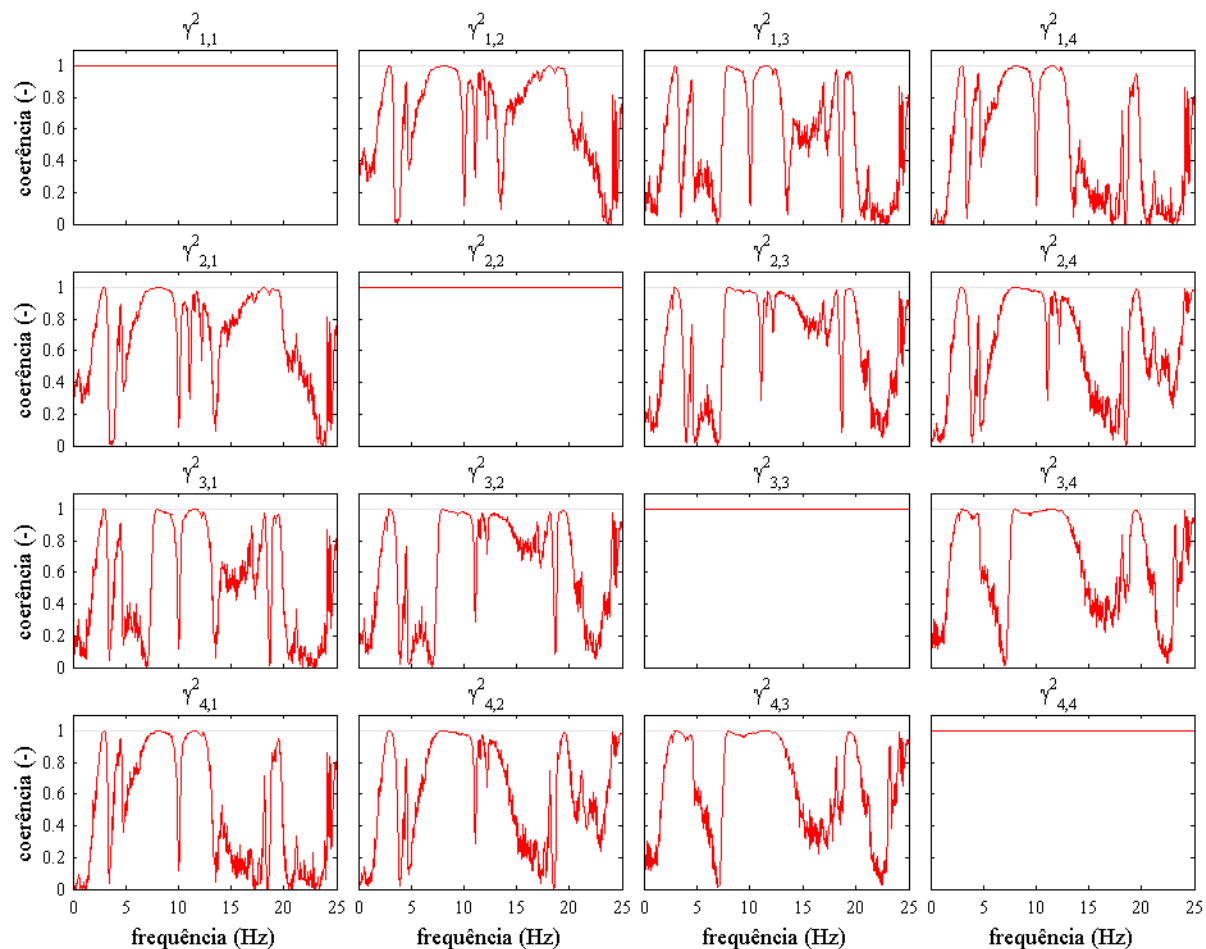


Figura 4.5 – Funções de coerência avaliadas com os registos de acelerações longitudinais.

Avaliação das configurações modais:

Na exposição efectuada no capítulo 2 e no exemplo aí apresentado, salientou-se que em sistemas com frequências bem separadas e com amortecimentos pequenos, sujeitos a forças de excitação com características de ruído branco, a resposta na frequência de um dos seus modos de vibração e na sua vizinhança é claramente dominada por esse modo de vibração. Nessa situação, as funções de densidade espectral da resposta dum sistema, na frequência ω_i de um dos seus modos de vibração i , podem ser aproximadas através da expressão seguinte (Peeters, 2000):

$$\mathbf{S}_y(\omega_i) = \mathbf{S}_{yi} \approx \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci} \end{bmatrix}^T \mathbf{\Pi}_u \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci}^* \end{bmatrix}^T}{(\xi_i \omega_i)^2} \quad (4.16)$$

Definindo um escalar complexo α_i através de:

$$\alpha_i = \frac{\begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci} \end{bmatrix}^T \mathbf{\Pi}_u \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ci}^* \end{bmatrix}}{(\xi_i \omega_i)^2} \quad (4.17)$$

e introduzindo-o em (4.16), a expressão aproximada para as funções de densidade espectral na situação de ressonância é dada por:

$$\mathbf{S}_{yi} \approx \alpha_i \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{ci}^* \end{bmatrix}^T \quad (4.18)$$

Para a interpretação da equação (4.18), recorda-se que a matriz \mathbf{V}_c contém a parte observada dos modos de vibração, ou seja, as componentes modais segundo os graus de liberdade onde é observada a resposta; $[\mathbf{v}_{ci}]$ é assim a coluna de \mathbf{V}_c correspondente ao modo de vibração i . Portanto, a expressão (4.18) indica que na ressonância, as colunas (ou as linhas) da matriz de funções de densidade espectral da resposta podem ser consideradas como uma estimativa das componentes observadas do correspondente modo de vibração, a menos de um factor de escala comum.

Considerando os elementos numa linha da matriz \mathbf{S}_{yi} correspondente a um grau liberdade r ($1 \leq r \leq n_e$) escolhido para referência, pode-se normalizá-los relativamente ao termo da diagonal principal da matriz nessa mesma linha, eliminando assim factores comuns a todos os elementos. Essa operação pode ser traduzida através de:

$$\left[\frac{\mathbf{S}_{yr}[r,1]}{\mathbf{S}_{yr}[r,r]} \quad \cdots \quad \frac{\mathbf{S}_{yr}[r,r]}{\underbrace{\mathbf{S}_{yr}[r,r]}_1} \quad \cdots \quad \frac{\mathbf{S}_{yr}[r,n_e]}{\mathbf{S}_{yr}[r,r]} \right] \approx \left[\frac{\mathbf{v}_{ci}^*[1]}{\mathbf{v}_{ci}^*[r]} \quad \cdots \quad \frac{\mathbf{v}_{ci}^*[r]}{\underbrace{\mathbf{v}_{ci}^*[r]}_1} \quad \cdots \quad \frac{\mathbf{v}_{ci}^*[n_e]}{\mathbf{v}_{ci}^*[r]} \right] \quad (4.19)$$

Os termos do lado esquerdo da expressão (4.19) são relações entre espectros cruzados e o auto-espectro da resposta no grau de liberdade de referência, o que corresponde à função de resposta em frequência (FRF) de transmissibilidade (Schultze e Hunter, 2002) entre o grau de liberdade de referência e os diversos graus de liberdade observados. Utiliza-se a designação *FRF de transmissibilidade*, uma vez que se trata de relações entre espectros que apenas envolvem as respostas dum sistema e não propriamente de relações entre espectros que envolvem as forças de excitação e as respostas, situação essa em que a designação *FRF* seria correcta.

Os termos do lado direito da expressão (4.19) são as componentes modais nos diversos graus de liberdade observados, relativas ao grau de liberdade considerado para referência.

A expressão (4.19) indica então que as configurações modais de sistemas estruturais com frequências bem separadas e amortecimentos pequenos, sujeitos a forças de excitação com características de ruído branco, podem ser estimadas através das FRF de transmissibilidade, entre um grau de liberdade considerado como referência e os diversos graus de liberdade observados, avaliadas nas frequências de ressonância.

As componentes modais são portanto estimadas relativamente ao grau de liberdade de referência, em termos de amplitude e fase, uma vez que as FRF de transmissibilidade são funções complexas, exprimindo no domínio da frequência, esses dois aspectos das relações entre as respostas dum sistema. Como é óbvio, se um modo de vibração tiver um nodo no grau de liberdade escolhido para referência, então não é possível estimar a correspondente configuração.

No método BFD, as funções de densidade espectral da resposta são estimadas através de (4.7), e, tendo em conta (4.19), as estimativas H_1 das FRF de transmissibilidade, entre uma resposta de referência r e as restantes respostas observadas j , permitem avaliar as componentes modais Φ_{ji} nas frequências de ressonância ω_i , ou seja:

$$\Phi_{ji} \approx H_{1i}(r \rightarrow j) = \frac{\tilde{G}_{yi}[r, j]}{\tilde{G}_{yi}[r, r]} \quad (4.20)$$

As relações de fase nas funções H_1 são coincidentes com as relações de fase nos correspondentes espectros cruzados. Conforme se verificou no exemplo apresentado no capítulo 2, em sistemas com amortecimento proporcional e de valores pequenos, as relações de fase assumem sempre valores de 0 ou de $\pm\pi$ (*rad*). Este facto pode também ser tido em conta para distinguir os picos de ressonância que correspondem efectivamente a modos naturais de vibração dos sistemas (Bendat e Piersol, 1993).

Um outro aspecto importante, que ajuda a esclarecer se um determinado pico de ressonância corresponde ou não a um modo natural de vibração dum sistema, é a própria configuração modal avaliada de acordo com a técnica acima descrita. Nalguns casos, em face da irregularidade da configuração obtida em correspondência com um determinado pico de ressonância, deve-se considerar que o mesmo não corresponde a um modo natural de vibração ou, ainda que corresponda, a qualidade da informação obtida experimentalmente não o permite concluir. Em muitas situações, é conveniente que em paralelo com a análise das respostas medidas em ensaios, se desenvolvam modelos de elementos finitos para, através da comparação com as configurações modais calculadas, facilitar a

interpretação das configurações avaliadas experimentalmente. Em várias aplicações apresentadas no capítulo 6, seguiu-se uma metodologia deste tipo.

Conforme se referiu anteriormente, podem-se avaliar intervalos de confiança nas estimativas das componentes modais, tendo em conta os valores das funções de coerência e o número de amostras independentes n_d consideradas na avaliação das funções H_1 . No caso de não se utilizarem sobreposições das n_d amostras, os erros aleatórios normalizados ε_r na avaliação da amplitude das estimativas H_1 , podem ser determinados através de (Bendat e Piersol, 2000):

$$\varepsilon_r [H_1(\omega)] = \sqrt{\frac{1 - \gamma_{i,j}^2(\omega)}{\gamma_{i,j}^2(\omega)}} \frac{1}{\sqrt{2 n_d}} \quad (4.21)$$

Se forem utilizadas sobreposições de 50 % das n_d amostras independentes, os erros aleatórios normalizados ε_r na avaliação da amplitude das estimativas H_1 , podem ser determinados através de (Delaunay *et al.*, 1998; Bendat e Piersol, 2000):

$$\varepsilon_r [H_1(\omega)] = \sqrt{\frac{1 - \gamma_{i,j}^2(\omega)}{\gamma_{i,j}^2(\omega)}} \sqrt{\frac{6 n_d - 1}{16 n_d^2}} \quad (4.22)$$

Os erros aleatórios normalizados, avaliados de acordo com (4.21) ou (4.22), têm o significado de coeficientes de variação nas estimativas da amplitude das funções H_1 , ou seja, representam a relação entre o desvio padrão e o valor médio dessas estimativas. O estabelecimento dos intervalos de confiança nas estimativas das componentes modais é assim imediato a partir desses erros aleatórios normalizados.

Exemplo: Nas 4 frequências de ressonância identificadas no espectro normalizado médio, apresentado na figura 4.4, analisaram-se os valores das funções de coerência (ver figura 4.5) e determinaram-se as estimativas H_1 das FRF de transmissibilidade, relacionando as acelerações longitudinais medidas num dos pisos, escolhido para referência, com as registadas nos restantes pisos.

No quadro 4.2 indicam-se para cada uma das frequências de ressonância, os valores de: amplitude de H_1 ; fase de H_1 ; coerência entre registos longitudinais no piso de referência e nos registos obtidos nos restantes pisos; erro aleatório normalizado na estimativa da amplitude de H_1 ; componente modal em cada piso, dada pela amplitude de H_1 com sinal positivo se a fase de H_1 é próxima de 0, ou negativo se a fase de H_1 é próxima de 180 °; e intervalo de confiança a 99 % na estimativa da componente modal.

Como se pode verificar no quadro 4.2, para cada modo de vibração, escolheu-se como piso de referência, aquele que tem maior componente modal nesse modo de vibração.

Nos valores apresentados no quadro 4.2, pode observar-se que os valores da função de coerência nas frequências de ressonância, são sempre muito próximos de 1, o único valor que é um pouco mais baixo verifica-se no 4º modo de vibração, na relação entre o 4º piso e o piso de referência, porque o 4º piso é praticamente um nodo desse modo de vibração. Tal significa que a informação obtida no ensaio efectuado é de muito boa qualidade em termos de relação sinal/ruído (ainda que as vibrações ambiente registadas tivessem amplitudes muito pequenas, conforme se referiu anteriormente). Foi assim possível obter estimativas das componentes modais, nos graus de liberdade observados, com um elevado grau de confiança, o que é expresso nos valores muito pequenos dos erros aleatórios normalizados e dos intervalos de confiança a 99 %.

Quadro 4.2 – Componentes modais avaliadas com o método BFD.

1º modo f = 2,96 Hz	piso i	$ H_i $	$\phi(H_i)$	$\gamma_{4,i}^2$	$\varepsilon_r[H_i]$	Φ_{i1}	i.c. 99 %
	1	0,189	2,7 °	1,00	0,32 %	+0,189	0,0018
	2	0,385	1,5 °	1,00	0,16 %	+0,385	0,0018
	3	0,811	0,1 °	1,00	0,06 %	+0,811	0,0016
	4 ref.	1	0	1	0	+1,000	0
2º modo f = 8,03 Hz	piso i	$ H_i $	$\phi(H_i)$	$\gamma_{2,i}^2$	$\varepsilon_r[H_i]$	Φ_{i2}	i.c. 99 %
	1	0,662	0,7 °	1,00	0,07 %	+0,662	0,0015
	2 ref.	1	0	1	0	+1,000	0
	3	0,230	-1,5 °	1,00	0,23 %	+0,230	0,0016
	4	0,708	-179,2 °	1,00	0,07 %	-0,708	0,0015
3º modo f = 11,69 Hz	piso i	$ H_i $	$\phi(H_i)$	$\gamma_{3,i}^2$	$\varepsilon_r[H_i]$	Φ_{i3}	i.c. 99 %
	1	0,410	-179,3 °	1,00	0,16 %	-0,410	0,0020
	2	0,351	170,4 °	0,98	1,27 %	-0,351	0,0134
	3 ref.	1	0	1	0	+1,000	0
	4	0,587	-179,3 °	1,00	0,15 %	-0,587	0,0026
4º modo f = 18,16 Hz	piso i	$ H_i $	$\phi(H_i)$	$\gamma_{1,i}^2$	$\varepsilon_r[H_i]$	Φ_{i4}	i.c. 99 %
	1 ref.	1	0	1	0	+1,000	0
	2	0,750	-178,3 °	1,00	0,30 %	-0,750	0,0068
	3	0,149	3,2 °	0,97	1,37 %	+0,149	0,0061
	4	0,034	-177,2 °	0,72	5,12 %	-0,034	0,0052

O facto dos valores da função de coerência, nas frequências de ressonância identificadas no ANPSD, serem muito próximos de 1, leva desde logo a concluir que essas frequências correspondem a modos naturais de vibração do modelo ensaiado. No entanto, para confirmar essa conclusão, também é conveniente analisar a representação gráfica das componentes modais avaliadas.

Nas figuras 4.6 e 4.7 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas. Na figura 4.6 essas componentes são representadas em simples gráficos XY , em que as configurações são representadas através de uma linha *suavizada* ajustada às componentes modais avaliadas com o método BFD; nesses gráficos estão também representados os intervalos de confiança a 99 % nas componentes modais, embora, devido aos seus valores muito pequenos, não seja possível visualizá-los bem.

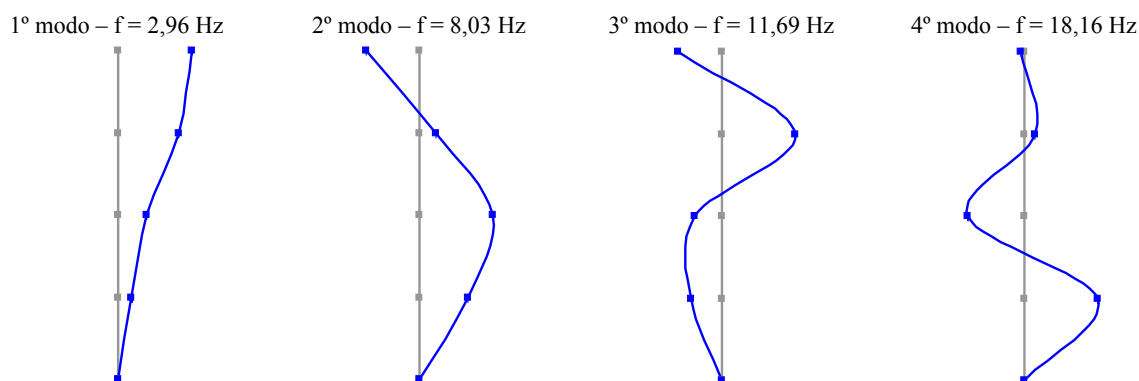


Figura 4.6 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método BFD.

As configurações apresentadas na figura 4.7, correspondem às deformadas do modelo de elementos finitos já considerado no capítulo 2, resultantes da imposição de deslocamentos longitudinais nos diversos pisos, com valores iguais às componentes modais identificadas com o método BFD.

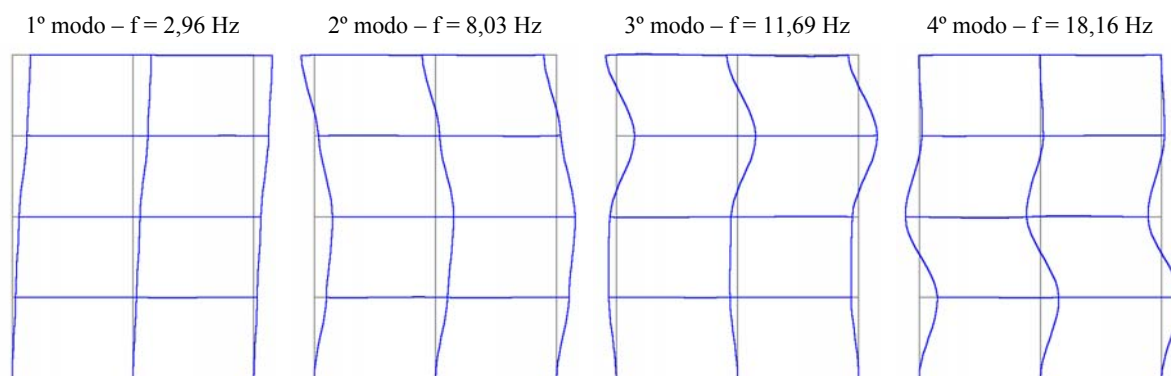


Figura 4.7 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método BFD.

Estimativa dos coeficientes de amortecimento:

Em associação com os procedimentos acima descritos para identificar as frequências e configurações dos modos naturais de vibração dum sistema estrutural, no método BFD podem-se também estimar os coeficientes de amortecimento, utilizando técnicas apropriadas para analisar os auto-espectros da resposta dum sistema. Referem-se em seguida duas dessas técnicas, o método da meia potência e um método de ajuste dum espectro analítico correspondente à resposta em aceleração dum sistema de um grau de liberdade.

Para se identificarem bem as frequências e configurações dos modos dum sistema através do método BFD, é importante que as forças de excitação tenham densidade espectral aproximadamente constante e que os modos tenham frequências bem separadas e amortecimentos com valores pequenos. Estas condições devem ser satisfeitas de forma ainda mais estrita no que se refere à avaliação dos coeficientes de amortecimento. Bendat e Piersol (1993) quantificam mesmo as condições a satisfazer

para que seja possível obter estimativas razoáveis dos coeficientes de amortecimento, a partir das funções de densidade espectral da resposta dum sistema, indicando as regras seguintes:

- a) As forças de excitação devem ter densidade espectral constante ou suficientemente uniforme na vizinhança da frequência de cada modo de vibração do sistema a identificar, $S_u(\omega) \approx \text{constante}$, no intervalo $[\omega_i - 3B_i \leq \omega \leq \omega_i + 3B_i]$, em que B_i é a largura de meia potência do pico de ressonância correspondente ao modo de vibração com frequência ω_i ;
- b) Os modos de vibração devem ter frequências bem separadas, $\omega_i - \omega_{i-1} > 2(B_i + B_{i-1})$;
- c) Os coeficientes de amortecimento devem ter valores pequenos, $\xi_i < 5\%$;
- d) A resolução em frequência deve ser bastante mais pequena do que largura de meia potência dos picos de ressonância das estimativas das funções de densidade espectral, $\Delta\omega < 0,2 B_i$.

Se as condições acima indicadas forem claramente desrespeitadas, dificilmente se conseguirão obter boas estimativas dos coeficientes de amortecimento, utilizando as duas técnicas que se descrevem em seguida.

O método da meia potência é referido em diversos livros de dinâmica de estruturas, por exemplo, Clough e Penzien (1993). Para a sua aplicação a um auto-espectro da resposta dum sistema, há que seleccionar, no pico de ressonância de cada modo de vibração, os dois pontos com ordenada espectral igual a metade da ordenada máxima na frequência de ressonância ω_i , designem-se as frequências desses dois pontos por ω_2 e ω_1 . O coeficiente de amortecimento do modo de vibração i , pode então ser estimado através da expressão seguinte:

$$\xi_i = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} \quad (4.23)$$

Uma das questões na aplicação da expressão (4.23) é a precisão com que é possível seleccionar os pontos de meia potência, com frequências ω_2 e ω_1 , uma vez que as ordenadas espectrais estão definidas com uma resolução em frequência finita $\Delta\omega$, inversamente proporcional à duração das amostras consideradas para o cálculo das funções de densidade espectral. Tal significa que, na maioria das situações (a menos que $\Delta\omega$ tenha de facto valores muito pequenos), seja necessário interpolar entre os pontos discretos dos auto-espectros, para determinar os valores das frequências ω_2 e ω_1 . O método mais imediato é utilizar uma simples interpolação linear, no entanto também se podem utilizar outras técnicas que envolvem o ajuste de funções polinomiais às ordenadas espectrais, determinando-se as frequências ω_2 e ω_1 a partir dessas funções, cujos valores podem ser avaliados com uma resolução em

frequência muito fina. Por exemplo, em (Corrêa e Campos Costa, 1992) utiliza-se uma parábola ajustada aos 3 pontos de maior amplitude em cada pico de ressonância; em (LNEC - Rodrigues e Campos Costa, 1999) utiliza-se uma *spline* ajustada às ordenadas espectrais em torno de cada pico de ressonância.

Embora seja possível, em muitas situações, estimar os coeficientes de amortecimento através da aplicação do método da meia potência aos auto-espectros da resposta dum sistema (desde que as condições acima referidas sejam razoavelmente satisfeitas), os valores obtidos são em geral uma sobre-estimativa, ou seja, têm um erro de viés por excesso. Este erro deve-se fundamentalmente ao efeito de escorregamento (*leakage*) associado à resolução finita em frequência das estimativas das funções de densidade espectral avaliadas através da transformada discreta de *Fourier*. O efeito de escorregamento existe sempre nessas estimativas, ainda que se utilizem janelas de dados (por exemplo a janela de *Hanning*), com as quais apenas se consegue reduzi-lo.

Alternativamente ao método da meia potência, pode-se utilizar um outro método para estimar os coeficientes de amortecimento a partir das funções de densidade espectral da resposta de um sistema. Esse método consiste no ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto-espectros da resposta, sendo utilizado por diversos autores (Brownjohn *et al.*, 1989; Littler, 1995; Delaunay *et al.*, 1999). Littler (1995) considera mesmo que esse método é mais adequado do que o método da meia potência, para estimar os coeficientes de amortecimento a partir da análise dos registos de ensaios de medição de vibrações ambiente. Na forma que será apresentada em seguida, o método foi utilizado em (LNEC - Rodrigues e Campos Costa, 1999) e em diversos trabalhos realizados desde então, cujos resultados serão apresentados no capítulo 6.

O espectro analítico, que é ajustado aos picos de ressonância das funções de densidade espectral, corresponde ao espectro da resposta em aceleração dum sistema de um grau de liberdade sujeito a uma entrada de densidade espectral constante (ruído branco). Considerando então que a densidade espectral da entrada é constante e igual a Π_u , a função de densidade espectral da resposta em aceleração de um sistema de um grau de liberdade é dada por:

$$S_y(\omega) = \frac{\Pi_u}{k^2} \left| \frac{\omega^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j 2 \xi (\omega/\omega_n)} \right|^2 \quad (4.24)$$

em que: k é a rigidez do sistema de um grau de liberdade;

ω_n é a frequência natural não amortecida do sistema de um grau de liberdade;

ξ é o coeficiente de amortecimento do sistema de um grau de liberdade.

Para o ajuste aos picos de ressonância dos auto-espectros das acelerações registadas em ensaios de medição de vibrações ambiente, na expressão (4.24) pode-se incluir ainda uma constante C para ter em conta a influência dos modos que estão fora da zona do pico de ressonância que está a ser analisado. A expressão do espectro analítico a ajustar aos espectros experimentais, é assim:

$$S_y(\omega) = \frac{\Pi_u}{k^2} \left| \frac{\omega^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j 2 \xi (\omega/\omega_n)} \right|^2 + C \quad (4.25)$$

O ajuste da expressão (4.25) aos valores experimentais pode ser efectuado através duma técnica de mínimos quadrados apropriada para funções não-lineares, que é normalmente designada por método de *Levenberg-Marquardt* (Levenberg, 1944; Marquardt, 1963). Este método está disponível, por exemplo em *LabView* (National Instruments, 1998) ou na *System Identification Toolbox* (Ljung, 2001) do *MatLab* (MathWorks, 2000). Da aplicação desta técnica de mínimos quadrados, resultam valores para os quatro parâmetros (ω_n , ξ , Π_u/k^2 , C) correspondentes ao melhor ajuste da expressão (4.25) aos valores experimentais retirados dos picos de ressonância dos auto-espectros. Ao aplicar o método de *Levenberg-Marquardt*, pode-se ter em conta o grau de confiança nas ordenadas espectrais obtidas experimentalmente (ver expressões (4.8) e (4.9)), pelo que se obtém também uma medida do grau de confiança nas estimativas de cada um dos parâmetros.

Em ambos os métodos acima apresentados (meia potência ou ajuste dum espectro analítico) os coeficientes de amortecimento são estimados a partir das ordenadas espectrais em torno dos picos de ressonância dos auto-espectros. Assim, na análise da informação obtida em ensaios em que a resposta duma estrutura é medida em vários pontos, para cada modo de vibração coloca-se a questão de escolher o auto-espectro, ou auto-espectros, a considerar para estimar o respectivo coeficiente de amortecimento. Uma hipótese, embora mais trabalhosa, é a de aplicar os métodos acima apresentados aos auto-espectros correspondentes a todos os registos e de tratar estatisticamente os resultados assim obtidos. Outra hipótese, que se considera razoável, é a de aplicar esses métodos ao auto-espectro correspondente ao grau de liberdade com maior componente no modo em análise.

Exemplo: Estimaram-se os coeficientes de amortecimento dos 4 modos de vibração identificados, com frequências de 2,96 Hz, 8,03 Hz, 11,69 Hz e 18,16 Hz, utilizando as duas técnicas acima referidas: o método da meia potência e o método de ajuste do espectro analítico correspondente à resposta em aceleração dum sistema de um grau de liberdade. Ambos os métodos foram aplicados aos picos isolados dos auto-espectros calculados com as acelerações registadas no ensaio efectuado, tendo-se escolhido, para cada modo de vibração, o auto-espectro correspondente ao grau de liberdade com maior componente no modo em causa. Na figura 4.8 ilustra-se a aplicação dos dois métodos utilizados para estimar os coeficientes de amortecimento. No quadro 4.3 apresentam-se os valores obtidos.

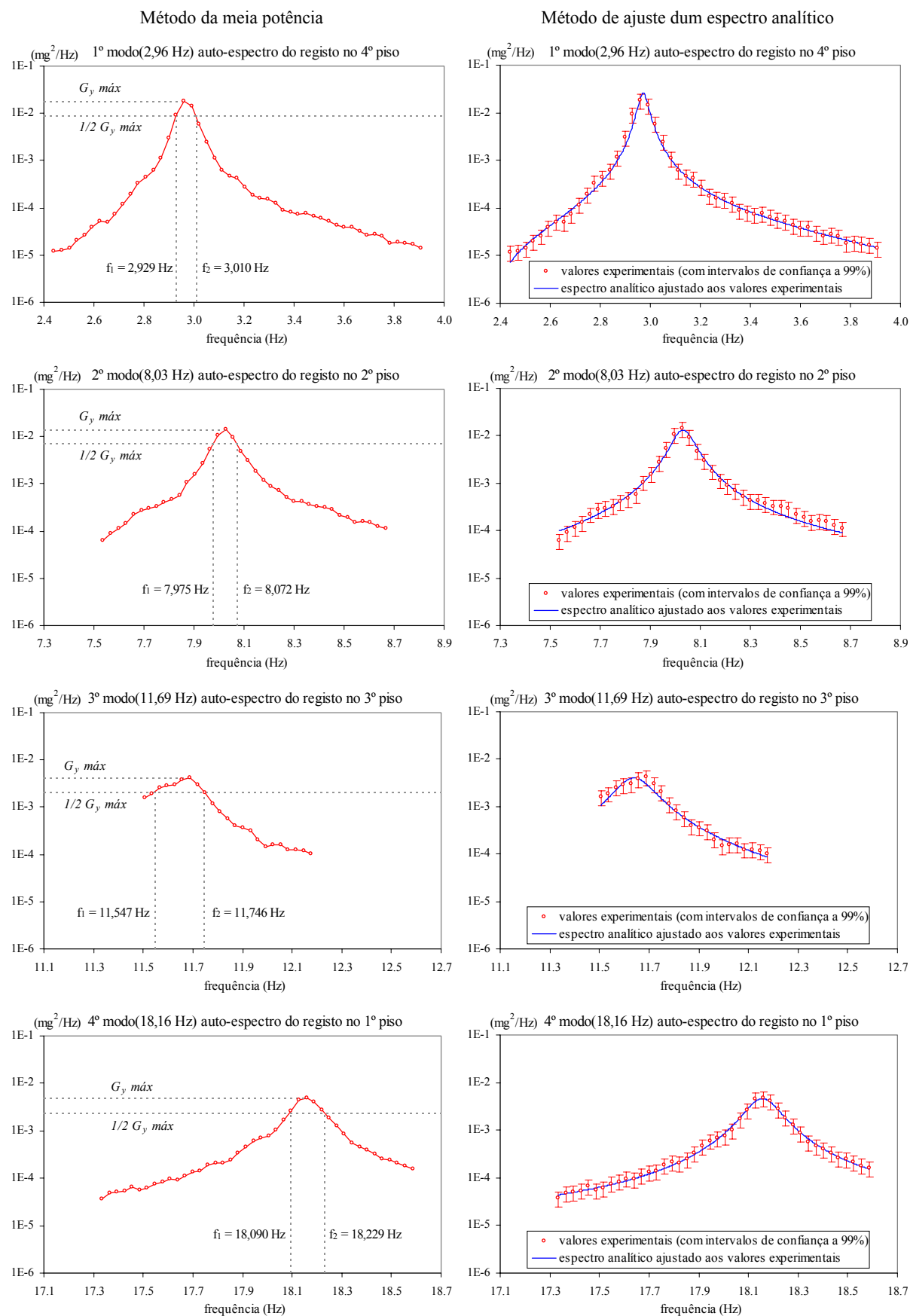


Figura 4.8 – Aplicação de dois métodos para estimar os coeficientes de amortecimento.

Quadro 4.3 – Estimativas dos coeficientes de amortecimento.

modo / frequência	piso <i>i</i>	método da meia potência	método de ajuste dum espectro analítico	
		ξ (%)	ξ (%)	coef. var. (%)
1º modo, $f = 2,96$ Hz	4	1,35	0,73	5,5
2º modo, $f = 8,03$ Hz	2	0,61	0,60	5,0
3º modo, $f = 11,69$ Hz	3	0,86	0,71	5,6
4º modo, $f = 18,16$ Hz	1	0,38	0,41	4,9

Analisando a figura 4.8 e os valores apresentados no quadro 4.3, importa comentar os aspectos seguintes:

- os valores obtidos com o método da meia potência são, em geral, superiores aos avaliados com o método de ajuste dum espectro analítico; estes resultados reflectem assim um problema já referido do método da meia potência, ou seja, com esse método obtêm-se, em geral, sobre-estimativas dos coeficientes de amortecimento; tal deve-se sobretudo ao carácter discreto das estimativas das funções de densidade espectral obtidas através da transformada discreta de Fourier, e ao efeito de escorregamento a ele associado;
- em relação ao 1º modo de vibração verifica-se mesmo uma diferença grande entre as estimativas do coeficiente de amortecimento, obtidas com os dois métodos utilizados;
- os coeficientes de variação, obtidos no método de ajuste dum espectro analítico, têm valores pequenos, cerca de 5 %, indiciando que os valores estimados com esse método podem ser encarados com alguma confiança; tal reflecte também a boa qualidade dos sinais obtidos no ensaio efectuado, em termos de relação sinal/ruído, pois, nas funções de densidade espectral, os picos de ressonância estão bem salientes relativamente ao nível de ruído, o que facilitou a aplicação do método de ajuste;
- as estimativas obtidas para os coeficientes de amortecimento têm valores bastante pequenos, entre cerca de 0,4 % e 0,7 % (considerando os valores obtidos com o método de ajuste dum espectro analítico); note-se que são estimativas obtidas para vibrações de amplitudes muito pequenas, sendo de esperar que se obteriam valores superiores para vibrações de maior amplitude.

Para além dos problemas já salientados, relacionados com a avaliação dos coeficientes de amortecimento a partir das estimativas das funções de densidade espectral determinadas com a transformada discreta de Fourier (via algoritmo da FFT), salienta-se ainda que outras questões podem ser colocadas relativamente à avaliação dos coeficientes de amortecimento a partir da resposta das estruturas, registada em ensaios de medição de vibrações ambiente. De facto, para níveis de vibração de pequena amplitude, verifica-se que os coeficientes de amortecimento são dependentes dessa mesma amplitude e podem também variar em função da temperatura (Ventura e Brincker, 2000). Este facto não é de estranhar, considerando que movimentos de diferentes amplitudes (ainda dentro do regime de funcionamento linear dos materiais) podem exigir a entrada em acção de diferentes mecanismos responsáveis pelo amortecimento dos sistemas estruturais. Tendo em conta este aspecto, acima de tudo, deve ter-se alguma precaução quanto à utilização dos coeficientes de amortecimento estimados a

partir da resposta das estruturas às acções ambiente, para a avaliação da sua resposta a acções de grande intensidade (por exemplo, sismos ou vento).

Uma outra questão, relacionada com a avaliação dos coeficientes de amortecimento a partir de registos de vibrações ambiente, verifica-se no caso da acção ambiente dominante ser o vento e tem a ver com a possibilidade de ocorrência de fenómenos de interacção aerodinâmica com as estruturas, que podem introduzir uma componente de amortecimento aerodinâmico nas respostas estruturais que são medidas. Os coeficientes de amortecimento estimados a partir dessas respostas, têm assim uma parcela devida ao amortecimento estrutural e outra devida ao amortecimento aerodinâmico. Esta dificuldade poderá surgir sobretudo em estruturas de maior flexibilidade, como é o caso de pontes de grande vão. Nessas situações, é recomendável que se efectue também o registo da velocidade do vento durante os períodos de registo da resposta estrutural, para que se possa inferir sobre a influência dos fenómenos de interacção aerodinâmica na resposta medida.

Alguns comentários ao método BFD:

O método básico no domínio da frequência (BFD) é um método de identificação modal estocástica em que se utilizam técnicas de análise de sinal baseadas nas estimativas das funções de densidade espectral da resposta, calculadas por intermédio do algoritmo da FFT. Na fundamentação deste método assumem-se determinadas hipóteses que deverão ser razoavelmente respeitadas para que se obtenham bons resultados. Fundamentalmente, as forças de excitação devem ter densidade espectral aproximadamente constante e os modos de vibração dos sistemas devem ter frequências bem separadas e amortecimentos com valores pequenos, caso contrário poderá ser difícil identificá-los.

Com o método BFD identificam-se de facto *modos operacionais de deformação* e não propriamente *modos de vibração*. Um *modo operacional de deformação* corresponde à deformada duma estrutura quando sujeita a uma excitação puramente harmónica; teoricamente, é portanto uma combinação de todos os *modos de vibração*, no entanto, apenas aqueles que têm uma frequência próxima da frequência da excitação é que contribuem significativamente para o *modo operacional de deformação*. Compreende-se assim que no caso dos modos de vibração terem frequências muito próximas, os modos operacionais de vibração acabem por reflectir a sobreposição de diversos modos de vibração, o que dificulta a obtenção de bons resultados com o método BFD.

Outros inconvenientes do método BFD estão relacionados sobretudo com a resolução finita em frequência das estimativas das funções de densidade espectral avaliadas através do algoritmo da FFT. Mesmo assim, alguma facilidade de compreensão dos seus fundamentos, de implementação e a rapidez de execução, fazem com que o método BFD seja aquele de que há maior experiência de

utilização no domínio da identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil, e que, eventualmente, deverá ser sempre utilizado para uma primeira análise da informação obtida em ensaios de identificação modal com base na medição de vibrações ambiente.

4.2.3 Método de decomposição no domínio da frequência

O método de decomposição no domínio da frequência (FDD) pode ser entendido como uma extensão do método BFD, na medida em que também utiliza como informação de base as estimativas das funções de densidade espectral da resposta, avaliadas de acordo com a metodologia apresentada em 4.2.1. No método FDD é introduzida uma operação de *diagonalização* da matriz de funções de densidade espectral, de modo a decompô-la nas contribuições modais que, em cada frequência, influenciam significativamente a resposta dum sistema. Essa operação de *diagonalização* consiste na aplicação de algoritmos de decomposição em valores próprios ou em valores singulares (SVD) que, no caso da matriz de funções de densidade espectral da resposta, são equivalentes, uma vez que se trata de uma matriz hermiteana³ (Peeters, 2000).

O método FDD terá sido apresentado e utilizado pela primeira vez em (Prevosto, 1982) já no contexto da identificação modal estocástica. Posteriormente, o mesmo princípio de diagonalização da matriz de funções de densidade espectral da resposta foi aplicado à matriz de funções de resposta em frequência, ou seja, no contexto da análise modal experimental com controlo e medição das forças de excitação; neste domínio, o método foi designado por *Complex Mode Indication Function*, de que resultou a abreviatura CMIF (Shih *et al.*, 1988), que também é adoptada em (Peeters, 2000) para referir o método FDD no contexto da identificação modal estocástica. Corrêa e Campos Costa (1992) utilizam também a decomposição em valores próprios da matriz de funções de densidade espectral da resposta em velocidade, para obter um espectro que designam por espectro principal de velocidade (correspondente, em cada frequência, ao maior valor próprio da matriz), a partir do qual identificam as frequências naturais de vibração, obtendo as componentes modais nos pontos instrumentados a partir do primeiro vector próprio.

O método FDD recebe apenas esta designação com o trabalho de Brincker *et al.* (2000), onde de facto esse método e os seus fundamentos são apresentados de forma mais sistematizada. Conforme se apresentará em seguida, a compreensão dos fundamentos do método FDD é praticamente imediata, uma vez entendida a fundamentação do método BFD. Em termos de tempo de execução, o método FDD também é bastante rápido, visto que, relativamente ao método BFD, há apenas adicionalmente o

³ Uma matriz diz-se hermiteana se for uma matriz quadrada igual à sua transconjugada; é o que se passa com a matriz das funções de densidade espectral da resposta dum sistema, que verifica as relações $\mathbf{S}_y = (\mathbf{S}_y^*)^T = (\mathbf{S}_y^T)^*$.

tempo necessário para efectuar a decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral em cada frequência. O método FDD pode assim ser considerado como sendo de utilização fácil e de execução rápida, tendo ainda algumas vantagens em relação ao método BFD, em termos de identificação de modos com frequências próximas. Uma vez que o método FDD não é de implementação muito difícil e o facto de que actualmente está disponível no programa ARTeMIS (SVS, 2002) leva a supor que a curto prazo haverá certamente uma experiência considerável da sua utilização na identificação modal estocástica de estruturas de diferentes tipos, quer de engenharia civil quer de engenharia mecânica.

Decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral:

O método FDD baseia-se no facto de que a matriz de funções de densidade espectral é, em cada frequência, influenciada significativamente por apenas alguns modos de vibração, cujo número determina a característica dessa matriz. Uma das utilizações do algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD) é precisamente a avaliação da característica de uma matriz, a qual corresponde ao número de valores singulares não nulos.

A matriz de funções de densidade espectral da resposta de um sistema, no caso das forças de excitação serem consideradas como um processo estocástico gaussiano com média nula e densidade espectral constante $\mathbf{S}_u(\omega) = \mathbf{\Pi}_u$, relaciona-se com a matriz de funções de resposta em frequência $\mathbf{H}_c(\omega)$ através da relação (já apresentada no capítulo 2):

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}_c(\omega) \mathbf{\Pi}_u \left(\mathbf{H}_c^* \right)^T(\omega) \quad (4.26)$$

Decompondo a matriz $\mathbf{\Pi}_u$ nos seus factores de Cholesky:

$$\mathbf{\Pi}_u = \mathbf{C}_u \mathbf{C}_u^T \quad (4.27)$$

pode-se definir um factor espectral $\mathbf{F}_y(\omega)$, através de:

$$\mathbf{F}_y(\omega) = \mathbf{H}_c(\omega) \mathbf{C}_u \quad (4.28)$$

e assim, a matriz de funções de densidade espectral da resposta de um sistema pode ser expressa através de:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{F}_y(\omega) \left(\mathbf{F}_y^* \right)^T(\omega) \quad (4.29)$$

Em cada frequência ω , a decomposição em valores singulares do factor espectral resulta em:

$$\mathbf{F}_y(\omega) = \mathbf{U}(\omega) \mathbf{\Sigma}(\omega) (\mathbf{V}^*)^T(\omega) \quad (4.30)$$

em que: $\mathbf{U}(\omega)$ e $\mathbf{V}(\omega)$ são matrizes ortogonais complexas;

$\mathbf{\Sigma}(\omega)$ é uma matriz diagonal que contém os valores singulares, reais e positivos, em ordem decrescente.

O factor espectral $\mathbf{F}_y(\omega)$ pode ser escrito de forma a salientar a contribuição de cada modo de vibração, através da expressão seguinte:

$$\mathbf{F}_y(\omega) = \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{-\omega^2 [\mathbf{v}_{ci}] [\mathbf{l}_{ci}]^T}{\lambda_i^2 (j\omega - \lambda_i)} \right) \mathbf{C}_u \quad (4.31)$$

Considerando que $2n > n_e$, a soma, expressa em (4.31), de $2n$ matrizes $(n_e \times n_e)$ de característica 1, resulta numa matriz que no máximo pode ter característica n_e . No entanto, em cada frequência apenas alguns dos modos de vibração são importantes, havendo assim termos matriciais do somatório de (4.31) que têm característica praticamente nula. Na ressonância, o factor espectral atinge um máximo local, para o qual só contribuem significativamente alguns modos de vibração (ou mesmo, no caso de modos com frequências bem separadas, apenas um modo de vibração). Em termos da decomposição em valores singulares, tal significa que apenas alguns dos valores singulares têm valores importantes, enquanto que os outros são próximos de zero. Assim, os espectros de valores singulares apresentam também máximos locais nas ressonâncias, uma vez que os vectores singulares são sempre unitários em qualquer frequência, e portanto o efeito de ressonância reflecte-se só nos valores singulares. Se dois ou mais modos de vibração têm frequências próximas, então há um número correspondente de valores singulares que apresentam máximos nessas frequências.

Na realidade não são os factores espectrais que são avaliados a partir dos registos de resposta dum sistema estrutural, mas sim as funções de densidade espectral. Assim, introduzindo a decomposição em valores singulares do factor espectral (4.30) na expressão (4.29), obtém-se a decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral, expressa através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_y(\omega) &= \mathbf{U}(\omega) \mathbf{\Sigma}(\omega) (\mathbf{V}^*)^T(\omega) \left(\left(\mathbf{U}(\omega) \mathbf{\Sigma}(\omega) (\mathbf{V}^*)^T(\omega) \right)^* \right)^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{S}_y(\omega) &= \mathbf{U}(\omega) \mathbf{\Sigma}(\omega) \underbrace{(\mathbf{V}^*)^T(\omega) \mathbf{V}(\omega)}_{\mathbf{I}} \mathbf{\Sigma}(\omega) (\mathbf{U}^*)^T(\omega) \quad (4.32) \\ \Leftrightarrow \mathbf{S}_y(\omega) &= \mathbf{U}(\omega) \mathbf{\Sigma}^2(\omega) (\mathbf{U}^*)^T(\omega) = \sum_{r=1}^{n_e} \sigma_r^2(\omega) [\mathbf{u}_r(\omega)] [\mathbf{u}_r^*(\omega)]^T \end{aligned}$$

O algoritmo de decomposição em valores singulares é portanto aplicado à matriz de funções de densidade espectral da resposta, obtendo-se então os factores indicados na expressão (4.32). A matriz diagonal $\Sigma^2(\omega)$ contém assim os valores singulares da matriz $S_y(\omega)$ e constitui um indicador do número de modos que, em cada frequência, contribuem significativamente para a resposta dum sistema. $U(\omega)$ é uma matriz ortogonal que contém os vectores singulares da matriz $S_y(\omega)$.

Se numa determinada frequência ω_i há apenas um modo que contribui de forma importante para a resposta dum sistema, a matriz de funções de densidade espectral da resposta é, aproximadamente, uma matriz de característica 1, que, tendo em conta a expressão (4.32), pode ser decomposta em:

$$S_y(\omega_i) \approx \sigma_r^2(\omega_i) [\mathbf{u}_r(\omega_i)] [\mathbf{u}_r^*(\omega_i)]^T \quad (4.33)$$

Comparando a expressão (4.33) com a expressão (4.18), pode-se verificar que o primeiro vector singular na situação de ressonância constitui uma estimativa das componentes modais nos graus de liberdade observados, para o modo de vibração na frequência correspondente.

Na situação de modos com frequências muito próximas ou mesmo coincidentes, cada vector singular correspondente a um valor singular não nulo, constitui uma boa estimativa das componentes desses modos, desde que os mesmos sejam geometricamente ortogonais entre si (Brincker *et al.*, 2000). No caso de modos com frequências muito próximas que não sejam geometricamente ortogonais entre si, as componentes modais correspondentes ao modo dominante são bem estimadas através do primeiro vector singular, no entanto, dificilmente se conseguem estimar bem as componentes modais dos outros modos que nunca são dominantes (Brincker *et al.*, 2000).

Exemplo: Considerando as funções de densidade espectral anteriormente calculadas e apresentadas na figura 4.3, determinaram-se os espectros de valores singulares, aplicando o algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD) à matriz de funções de densidade espectral em cada frequência. Obtiveram-se assim os espectros de valores singulares que são apresentados na figura 4.9. Note-se que o espectro do 1º valor singular tem um andamento muito semelhante ao do espectro normalizado médio (ANPSD) apresentado na figura 4.4.

Na figura 4.9 indicam-se também os valores das frequências dos quatro picos de ressonância mais evidentes no espectro do 1º valor singular. Neste caso, essas frequências coincidem com as identificadas no ANPSD da figura 4.4. Em princípio, essas frequências correspondem aos modos naturais de vibração na direcção longitudinal do modelo do edifício, sendo, no entanto, conveniente analisar também os correspondentes 1ºs vectores singulares, para, de acordo com o método FDD acima descrito, obter as estimativas das configurações modais. No espectro do 2º valor singular são também visíveis alguns picos de ressonância (embora com valores bastante mais pequenos do que os do espectro do 1º valor singular) que se considera serem devidos aos modos de torção e também aos modos na direcção transversal.

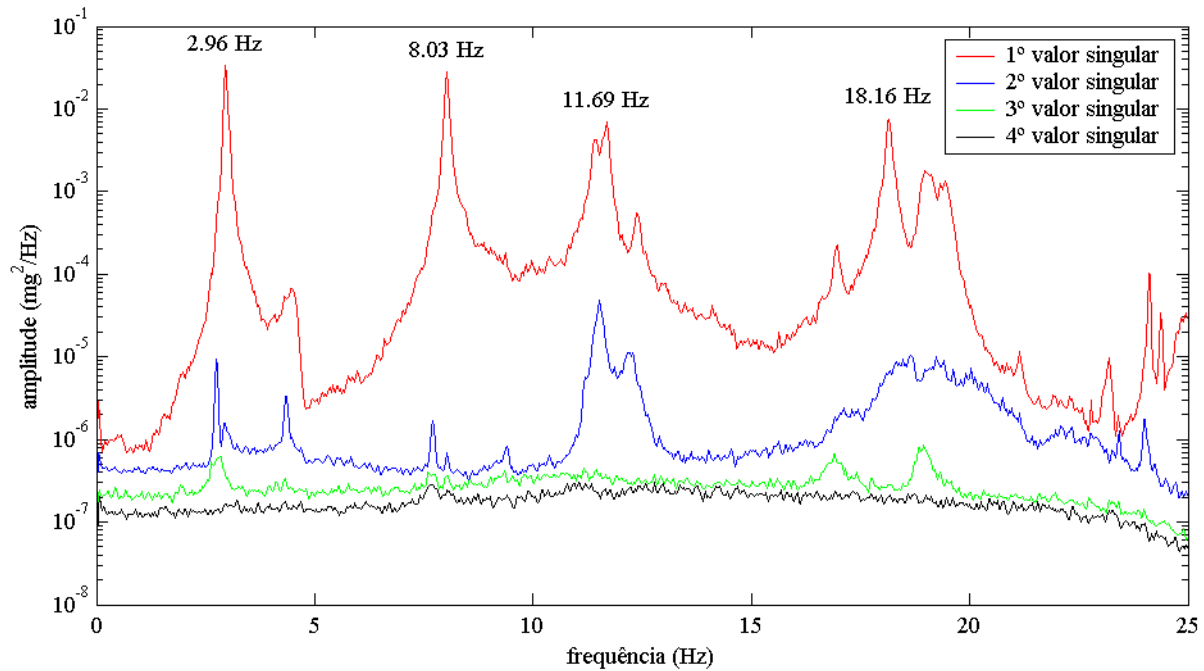


Figura 4.9 – Espectros de valores singulares correspondentes aos registos de acelerações longitudinais.

Com este exemplo, na forma adoptada neste capítulo, em que apenas se estão a analisar as acelerações registadas na direcção longitudinal, não se conseguem ilustrar bem os aspectos específicos do método FDD em termos de identificação de modos com frequências muito próximas, uma vez que os quatro modos longitudinais acabam por ter frequências bem separadas. No entanto, conforme já se referiu, no capítulo 6 será apresentada uma análise completa da informação obtida no ensaio efectuado, relativamente aos 3 graus de liberdade de cada piso do modelo, onde transparecem melhor esses aspectos do método FDD.

Nas 4 frequências de ressonância identificadas no espectro do 1º valor singular da matriz de funções de densidade espectral, analisaram-se os correspondentes 1ºs vectores singulares, os quais correspondem a uma estimativa das componentes modais segundo os graus de liberdade observados. No quadro 4.4, indicam-se as componentes modais avaliadas dessa forma. Como se pode verificar os valores assim obtidos são praticamente iguais aos avaliados com o método BFD, havendo apenas uma pequena diferença em 3 das componentes modais.

Relativamente à avaliação das configurações modais através dos vectores singulares, salienta-se que estes são vectores complexos. Assim, os valores apresentados no quadro 4.4 correspondem à amplitude das componentes de cada vector relativamente a uma delas considerada como referência, sendo o sinal dado pela fase relativa (sinal positivo para ângulos de fase próximos de 0 ou negativo para ângulos de fase próximos de $\pm\pi$ rad).

Quadro 4.4 – Componentes modais avaliadas com o método FDD.

piso i	1º modo (2,96 Hz) Φ_{i1}	2º modo (8,03 Hz) Φ_{i2}	3º modo (11,69 Hz) Φ_{i3}	4º modo (18,16 Hz) Φ_{i4}
1	+0,190	+0,662	-0,410	+1,000
2	+0,385	+1,000	-0,352	-0,750
3	+0,811	+0,230	+1,000	+0,150
4	+1,000	-0,708	-0,587	-0,034

Nas figuras 4.10 e 4.11, apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método FDD (já utilizadas nas figura 4.6 e 4.7 para representar as componentes modais identificadas com o método BFD).

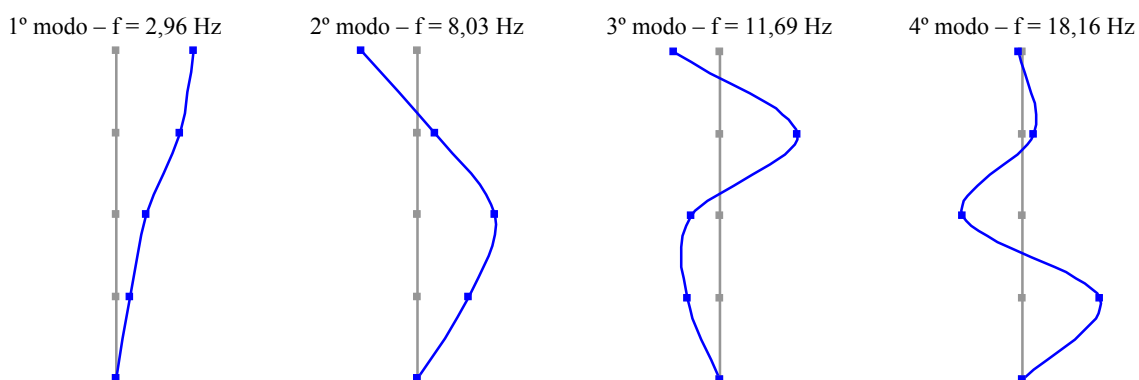


Figura 4.10 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método FDD.

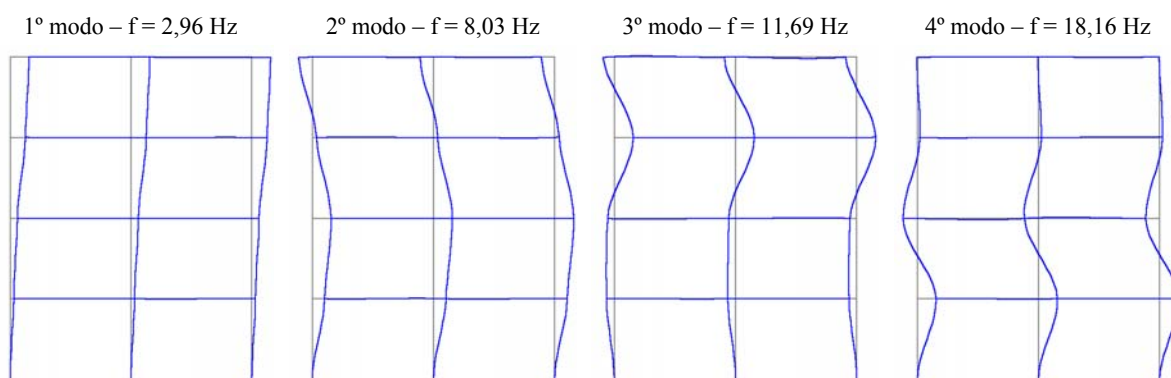


Figura 4.11 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método FDD.

Importa ainda salientar que, no caso de se efectuarem vários ensaios em que há transdutores que ficam sempre colocados segundo graus de liberdade de referência, enquanto que os restantes transdutores mudam de posição de ensaio para ensaio (ver capítulo 3), colocam-se duas questões na aplicação do método FDD:

- a primeira relaciona-se com a necessidade de normalizar os espectros de valores singulares correspondentes a cada ensaio, e de calcular um espectro médio desses valores singulares normalizados, de modo a sintetizar a informação obtida nos diversos ensaios; este procedimento pode ser efectuado numa forma semelhante à já apresentada para avaliação dos espectros normalizados médios (ANPSD) no método BFD;
- a segunda tem a ver com uma opção que pode ser seguida de calcular a matriz de funções de densidade espectral apenas com as linhas correspondentes aos graus de liberdade de referência; se estes forem escolhidos criteriosamente de modo a evitar nodos dos modos de vibração dos sistemas, as funções de densidade espectral assim calculadas têm toda a informação necessária para a efectuar a identificação modal do sistema (note-se que esta

opção também pode ser seguida no método BFD embora não lhe tenha sido feita referência em 4.2.2).

Ajuste das frequências e componentes modais e avaliação dos coeficientes de amortecimento:

No método FDD, ao aplicar-se o algoritmo de decomposição em valores singulares à matriz de funções de densidade espectral, está-se no fundo a decompô-la nas funções de densidade espectral dum conjunto de sistemas de um grau de liberdade, cada um correspondente a um modo de vibração do sistema. A função de densidade espectral de cada modo de vibração pode ser identificada nos espectros de valores singulares, e ser considerada para ajustar a estimativa da frequência e das componentes modais, obtidas por simples selecção dum pico de ressonância e do respectivo vector singular, e também para estimar o coeficiente de amortecimento. Esta análise pode ser feita, transformando para o domínio do tempo (através da inversa da transformada discreta de Fourier) a função de densidade espectral identificada para cada modo de vibração. Obtém-se assim uma função de auto-correlação da resposta dum sistema de um grau de liberdade, a qual, assumindo que as forças de excitação são idealizáveis por um processo de tipo ruído branco, é semelhante à resposta em regime livre desse sistema (ver, por exemplo, Clough e Penzien, 1993). Assim, a partir dessa função de auto-correlação pode-se estimar a frequência do sistema através dos instantes de passagem por zero, e o coeficiente de amortecimento através do decremento logarítmico.

A técnica, cuja ideia geral foi apresentada no parágrafo anterior, e que adiante será descrita com maior detalhe, pode ser considerada como um aperfeiçoamento do método FDD, e é por isso designada por método aperfeiçoado de decomposição no domínio da frequência EFDD (*enhanced frequency domain decomposition*), designação esta que é adoptada no programa ARTeMIS (SVS, 2002). Embora essa técnica já fosse referida em (Brincker *et al.*, 2000), é apenas um ano mais tarde (Brincker *et al.*, 2001) que ela é melhor explorada e apresentada de forma mais clara.

A primeira fase do método EFDD é exactamente igual ao método FDD, ou seja:

- avaliação das funções de densidade espectral da resposta;
- decomposição em valores singulares da matriz de funções de densidade espectral;
- análise dos espectros de valores singulares para selecção dos picos de ressonância correspondentes a modos de vibração;
- avaliação das componentes modais segundo os graus de liberdade observados, através dos vectores singulares.

Uma vez terminada a primeira fase do método EFDD, segue-se-lhe uma segunda fase, que consiste na identificação, nos espectros de valores singulares, das funções de densidade espectral dos

sistemas de um grau de liberdade correspondentes aos modos de vibração identificados. Essas funções são em seguida consideradas para ajustar as estimativas das frequências e das configurações modais e ainda para estimar os coeficientes de amortecimento.

A identificação das funções de densidade espectral dos sistemas de um grau de liberdade pode ser feita numa forma praticamente *manual*, com base na experiência e sensibilidade de quem efectuar a análise, ou, o que se considera preferível, tendo em conta a relação entre o vector singular num pico de ressonância e os vectores singulares nas frequências vizinhas desse pico, relação essa que pode ser quantificada através do coeficiente MAC (no capítulo 5 apresenta-se a definição desse coeficiente). Assim, sempre que um vector singular tem um coeficiente MAC, relativamente ao vector singular no pico de ressonância, com um valor elevado, o respectivo valor singular é considerado como fazendo parte da função de densidade espectral do sistema de um grau de liberdade correspondente ao modo de vibração em análise. Nas frequências que fiquem de fora da zona em que o coeficiente MAC tem um valor superior a um determinado limite (por exemplo $MAC > 0,8$) considera-se um valor de zero para a função de densidade espectral do sistema de um grau de liberdade. Assim, quanto menor for o valor limite considerado para o coeficiente MAC, maior será o número de valores singulares que fazem parte da função de densidade espectral do sistema de um grau de liberdade; no entanto, dessa forma está-se também a admitir um maior desvio relativamente ao vector singular de referência. É portanto necessário analisar, caso a caso, qual o valor limite do coeficiente MAC que deve ser considerado, de modo a seleccionar de facto a função de densidade espectral que é claramente dominada pelo vector modal que se verifica na ressonância.

No caso de sistemas com modos com frequências próximas, as funções de densidade espectral dos sistemas de um grau de liberdade envolvem contribuições de diversos espectros de valores singulares. Se os sistemas tiverem modos com frequências bem separadas, a selecção dessas funções de densidade espectral envolverá, em geral, apenas o espectro do 1º valor singular.

Para além da selecção dos valores singulares, para definir as funções de densidade espectral dos sistemas de um grau de liberdade correspondentes aos modos de vibração dum sistema, os respectivos vectores singulares são também considerados para avaliar uma estimativa média ponderada das componentes modais segundo os graus de liberdade observados. Para tal, os diversos vectores singulares são ponderados com os respectivos valores singulares e é calculado o seu valor médio. Portanto, quanto mais elevado for o valor singular, ou seja, quanto mais próximo estiver da ressonância, maior é o peso do respectivo vector singular nas componentes modais estimadas.

Transformando as funções de densidade espectral dos sistemas de um grau de liberdade para o domínio do tempo, através da inversa da transformada discreta de Fourier (com o algoritmo da IFFT),

obtêm-se as correspondentes funções de auto-correlação, a partir das quais avaliam-se estimativas ajustadas para as frequências e estimam-se os coeficientes de amortecimento.

Para avaliar os coeficientes de amortecimento, são inicialmente identificados os máximos positivos e negativos das funções de auto-correlação. O decremento logarítmico δ é então dado por:

$$\delta = \frac{2}{k} \ln \left(\frac{r_0}{|r_k|} \right) \Leftrightarrow \ln(|r_k|) = -\delta \frac{k}{2} + \ln(r_0) \quad (4.34)$$

em que: r_0 é o valor inicial da função de auto-correlação;

r_k é o k -ésimo máximo (positivo ou negativo) da função de auto-correlação.

Considerando a expressão (4.34), o decremento logarítmico δ e o valor inicial da função de auto-correlação r_0 podem ser avaliados através de regressão linear em $\delta k/2$ e $\ln(|r_k|)$. O coeficiente de amortecimento pode ser calculado a partir do decremento logarítmico, utilizando a expressão seguinte:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} \quad (4.35)$$

A avaliação da frequência, a partir da função de auto-correlação, é efectuada numa forma semelhante à determinação do coeficiente de amortecimento. A frequência é estimada através de regressão linear nos instantes de passagem por zero e nos instantes correspondentes aos valores máximos (positivos ou negativos), e tendo em conta a relação entre a frequência natural amortecida f_d e a frequência natural não amortecida f :

$$f = \frac{f_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (4.36)$$

Dado o carácter discreto das funções de auto-correlação, para determinar de forma mais precisa os seus valores máximos (positivos ou negativos), os correspondentes instantes de ocorrência e os instantes de passagem por zero, pode ser conveniente utilizar funções de interpolação entre os valores discretos. Brincker *et al.* (1992, 2001) propõem a utilização de uma interpolação quadrática para a avaliação dos valores máximos e dos seus instantes de ocorrência e de uma interpolação linear para determinar os instantes de passagem por zero.

Exemplo: Partindo dos resultados do método FDD (anteriormente apresentados), seleccionam-se para cada um dos 4 modos de vibração identificados, as zonas dos espectros de valores singulares correspondentes aos respectivos sistemas de um grau de liberdade. Como os modos longitudinais do modelo ensaiado acabam por ter frequências bem separadas, esta análise envolveu apenas o espectro do 1º valor singular.

A selecção das zonas do espectro do 1º valor singular foi efectuada de forma coerente com as zonas escolhidas nas funções de densidade espectral consideradas no método BFD para avaliação dos coeficientes de amortecimento através do ajuste dum espectro analítico (ver figura 4.8). Em seguida, para cada uma dessas zonas, avaliaram-se os coeficientes MAC entre os 1ºs vectores singulares em cada frequência discreta e na respectiva frequência de ressonância (com o 1º valor singular maior). Verificou-se assim que nas zonas escolhidas a resposta do sistema é de facto dominada por um único modo de vibração em face dos valores elevados do coeficiente MAC (valores superiores a 0,85).

Na figura 4.12 apresentam-se os resultados da análise descrita nos dois parágrafos anteriores. Na parte de cima da figura apresenta-se o espectro do 1º valor singular com as zonas escolhidas, correspondentes a cada modo de vibração, salientadas a traço vermelho. Na parte de baixo da figura representam-se, para cada uma dessas zonas, os coeficientes MAC entre os 1ºs vectores singulares em cada frequência e na respectiva frequência de ressonância (obviamente, conforme indicado na figura, na frequência de ressonância, esse coeficiente MAC é igual a 1).

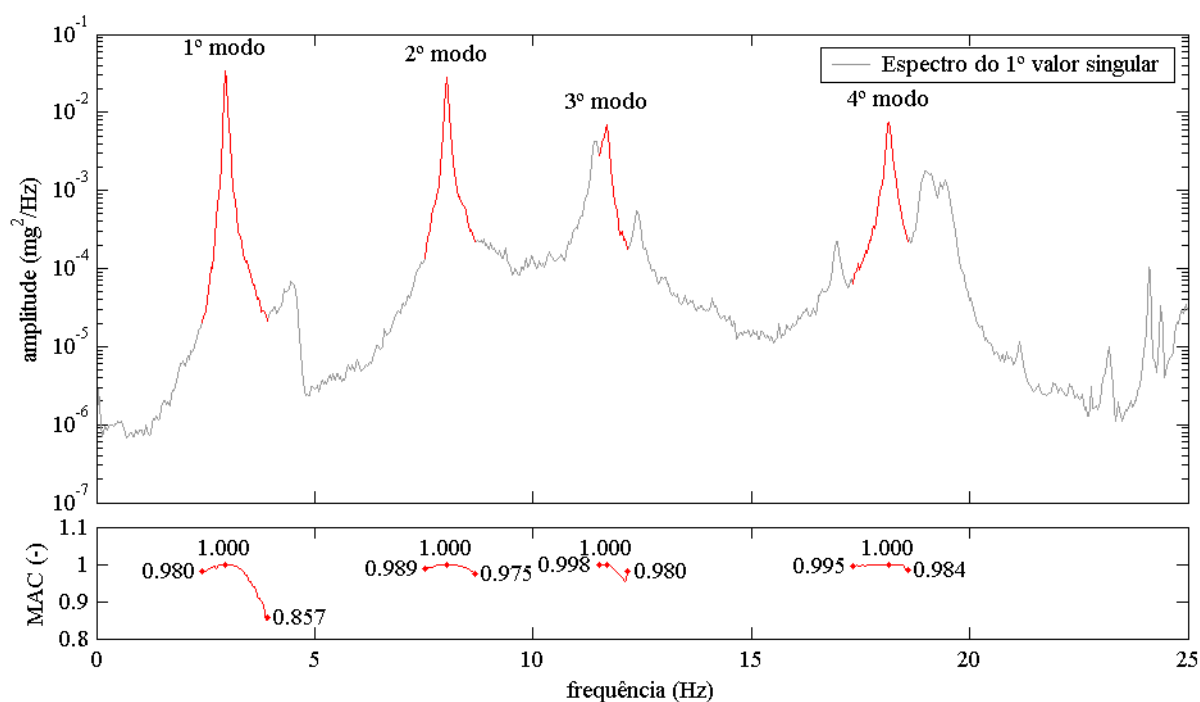


Figura 4.12 – Funções de densidade espectral de cada modo de vibração e coeficientes MAC.

Cada uma das funções (assinaladas a traço vermelho na figura 4.12) foi transformada para o domínio do tempo através do algoritmo da IFFT. Obtiveram-se assim as funções de auto-correlação que são representadas nas figuras 4.13 a 4.16 para cada um dos modos longitudinais do modelo ensaiado. O coeficiente de amortecimento e a frequência de cada um dos modos de vibração foram estimados de acordo com o processo acima descrito. Para tal, ajustou-se uma *spline* aos valores discretos das funções de auto-correlação, obtidos por aplicação directa da IFFT, de modo a determinar os instantes de ocorrência dos máximos (positivos e negativos) e os instantes de passagem por zero, com uma discretização no tempo $100 \times$ mais fina. Os resultados da aplicação deste método, são apresentados nas figuras 4.13 a 4.16. Nessas figuras, e também no quadro 4.5, indicam-se os valores obtidos para as frequências e coeficientes de amortecimento.

Analisando os valores indicados nas figuras 4.13 a 4.16 e no quadro 4.5, pode-se verificar que as frequências avaliadas com o método EFDD são ligeiramente diferentes das obtidas com os métodos BFD e FDD, com diferenças que não são superiores à resolução finita em frequência das estimativas das funções de densidade espectral ($\Delta f = 0,031$ Hz). Relativamente aos coeficientes de amortecimento, verifica-se que os valores obtidos com o método EFDD são bastante próximos dos avaliados por ajuste dum espectro analítico (ver quadro 4.3).

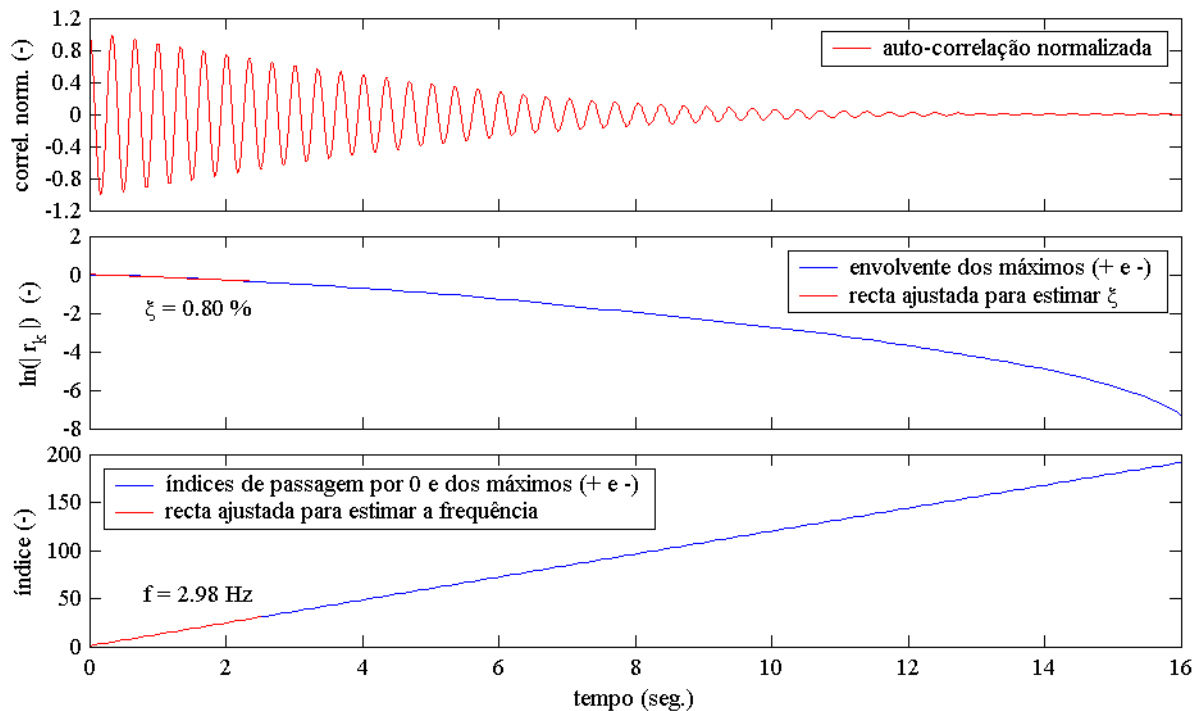


Figura 4.13 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 1º modo.

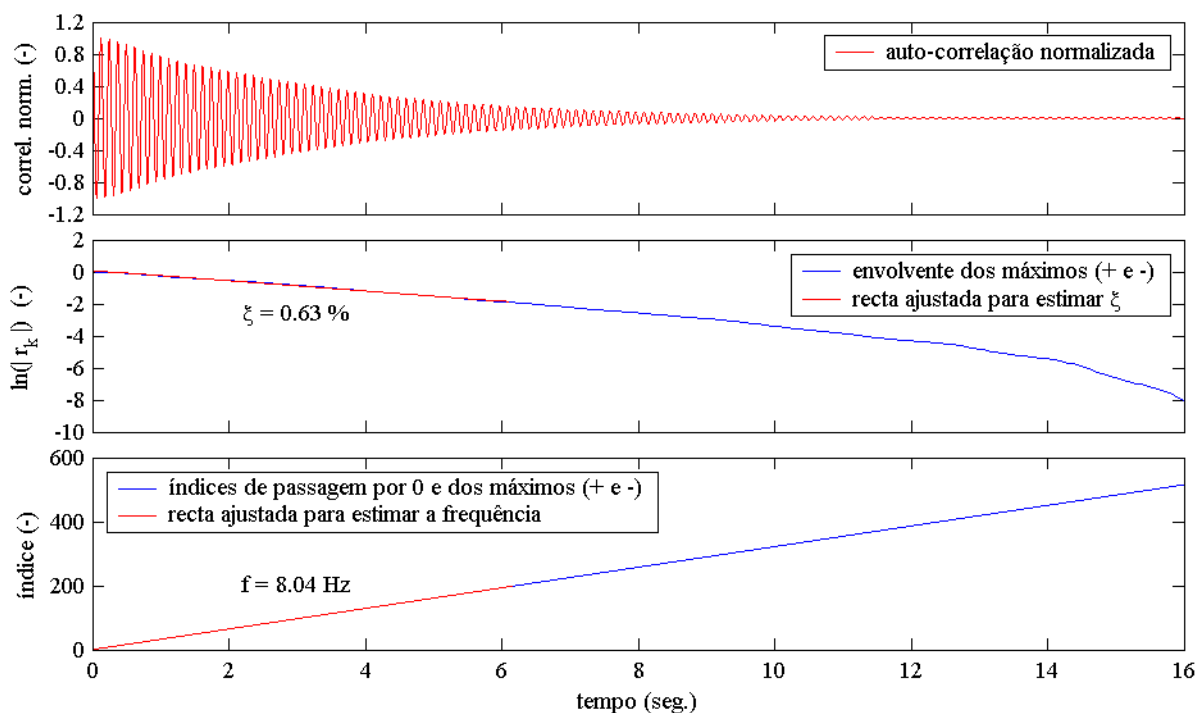


Figura 4.14 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 2º modo.

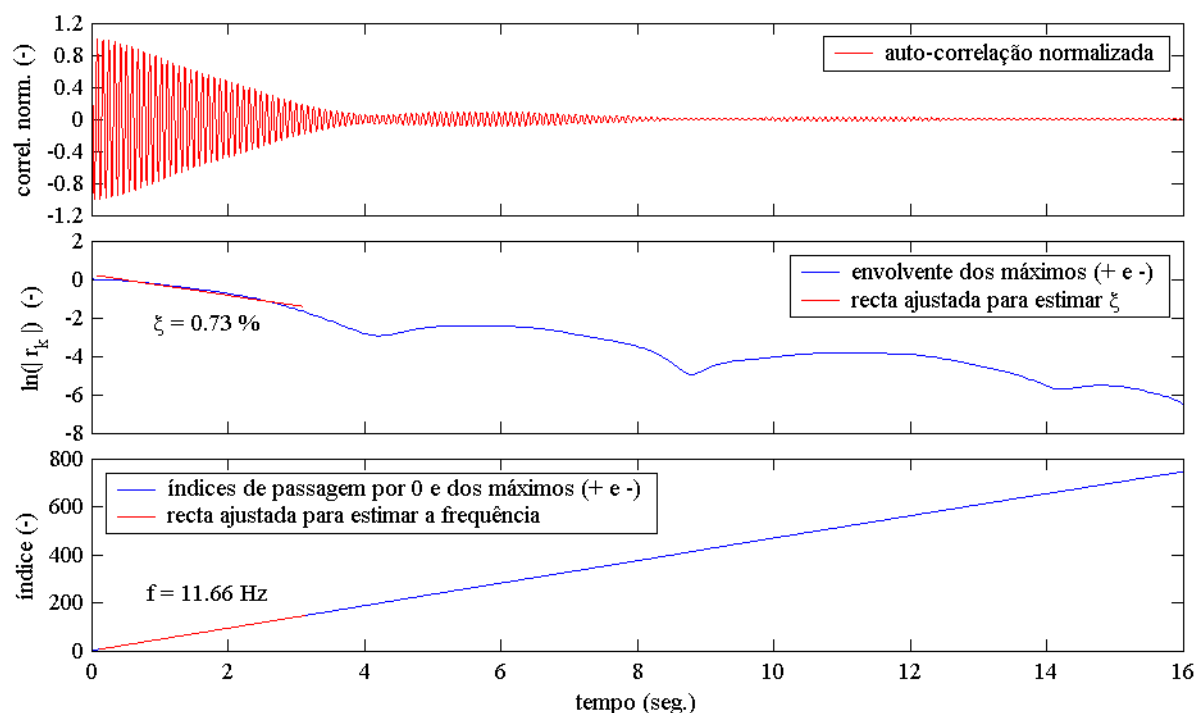


Figura 4.15 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 3º modo.

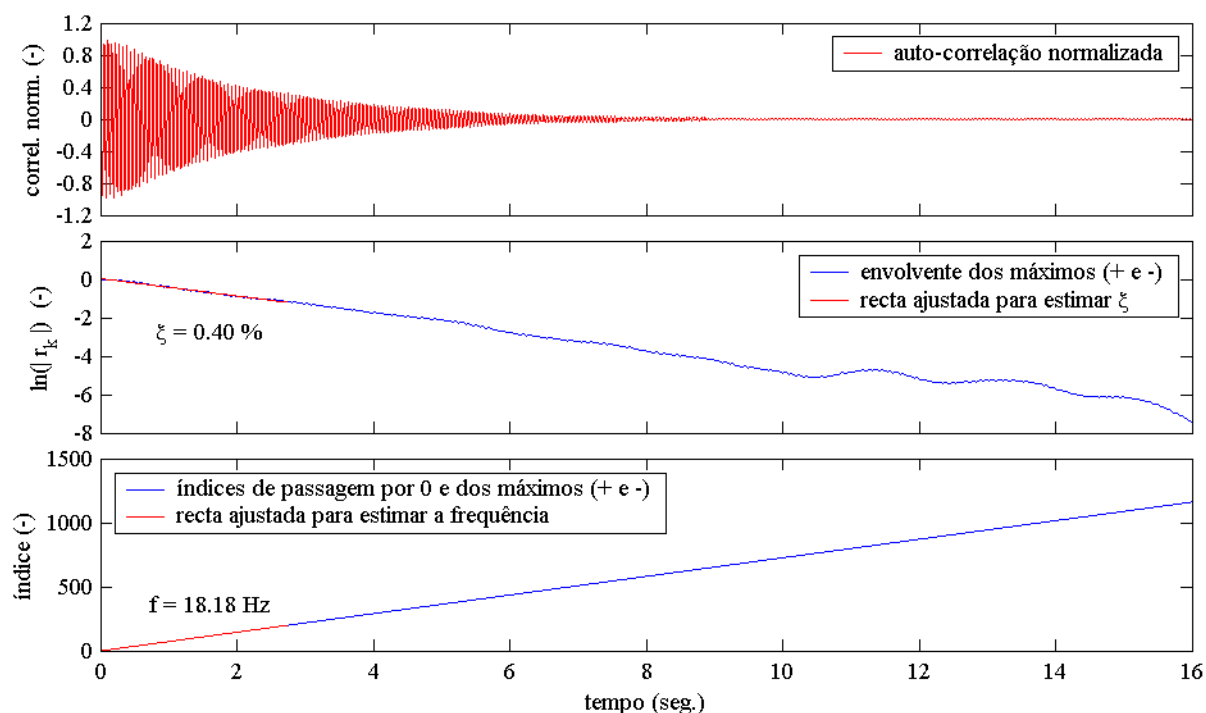


Figura 4.16 – Método EFDD: avaliação da frequência e do coeficiente de amortecimento do 4º modo.

As componentes modais foram avaliadas de acordo com o processo descrito, ou seja, através duma média dos 1^{os} vectores singulares, das zonas seleccionadas como correspondentes a cada modo, ponderada com os respectivos valores singulares. As componentes modais (amplitude com o sinal da parte real) assim obtidas, são apresentadas no quadro 4.6. Como se pode verificar, as componentes modais estimadas com o método EFDD são muito próximas das avaliadas com os métodos BFD e FDD, havendo apenas ligeiras diferenças em alguns valores.

Quadro 4.5 – Frequências e coeficientes de amortecimento avaliados com o método EFDD.

modo i	frequência f_i (Hz)	coeficiente de amortecimento ξ_i (%)
1	2,98	0,80
2	8,04	0,63
3	11,66	0,73
4	18,18	0,40

Quadro 4.6 – Componentes modais avaliadas com o método EFDD.

piso i	1º modo (2,98 Hz) Φ_{i1}	2º modo (8,04 Hz) Φ_{i2}	3º modo (11,66 Hz) Φ_{i3}	4º modo (18,18 Hz) Φ_{i4}
1	+0,184	+0,659	-0,410	+1,000
2	+0,380	+1,000	-0,372	-0,748
3	+0,812	+0,234	+1,000	+0,145
4	+1,000	-0,708	-0,588	-0,029

Nas figuras 4.17 e 4.18 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método EFDD (já utilizadas anteriormente para representar as componentes modais identificadas com os métodos BFD e FDD).

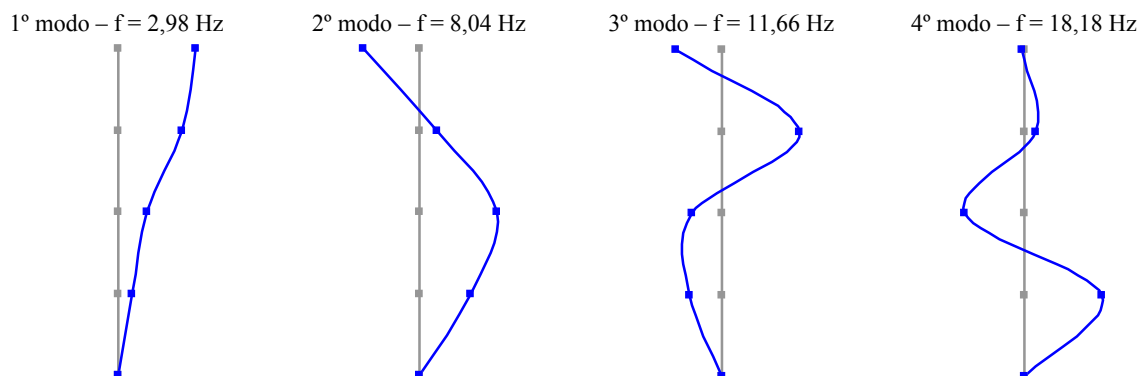


Figura 4.17 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método EFDD.

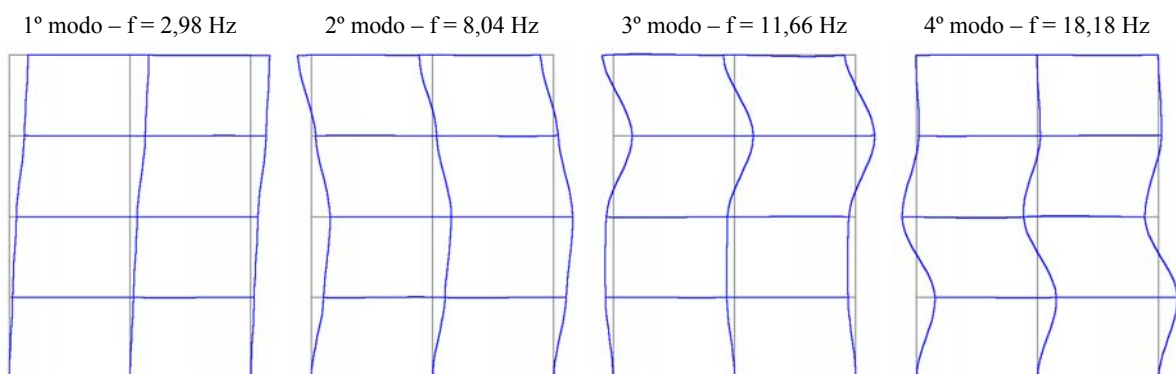


Figura 4.18 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método EFDD.

Alguns comentários aos métodos FDD e EFDD:

A informação de base utilizada no método FDD é a mesma que é considerada no método BFD, ou seja, as estimativas das funções de densidade espectral da resposta, calculadas por intermédio do algoritmo da FFT. No entanto, no método FDD introduz-se uma operação de decomposição aproximada da resposta dos sistemas, nas contribuições de sistemas independentes de um grau de liberdade, cada um correspondente a um modo de vibração. Assim, as técnicas de análise de sinal utilizadas no método BFD para avaliação das relações entre os sinais de resposta no domínio da frequência são substituídas, no método FDD, por uma decomposição da resposta nas contribuições modais mais importantes em cada frequência, através da aplicação do algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD).

No método FDD identificam-se portanto *modos de vibração*, ao passo que, conforme se salientou anteriormente, com o método BFD, identificam-se de facto *modos operacionais de deformação*. A identificação das características de modos de vibração com frequências próximas é assim melhor efectuada com o método FDD do que com o método BFD, com o qual pode ser difícil conseguir bons resultados nesses casos. Mesmo a situação de modos múltiplos (com a mesma frequência) pode ser resolvida adequadamente com o método FDD.

O método EFDD é na sua base idêntico ao método FDD, no entanto introduz-lhe ainda alguns aperfeiçoamentos. No método EFDD, não se seleccionam apenas os picos dos espectros de valores singulares, mas sim zonas desses espectros cujos respectivos vectores singulares têm entre si uma correlação elevada, ou seja, correspondem à resposta do sistema num modo de vibração. Aplicando o algoritmo da IFFT a essas funções de densidade espectral, extraídas dos espectros de valores singulares, obtêm-se funções de auto-correlação a partir das quais estimam-se os coeficientes de amortecimento e as frequências. As componentes modais nos pontos instrumentados são também obtidas, tendo em conta a informação em toda a zona seleccionada para cada modo, através duma média dos vectores singulares, ponderada com os respectivos valores singulares.

4.3 Métodos no domínio do tempo

Em 4.2 descreveram-se e aplicaram-se a um exemplo simples três métodos de identificação modal estocástica no domínio da frequência, também designados por métodos não paramétricos, visto que se baseiam em técnicas de processamento de sinal que utilizam o algoritmo da FFT, não tendo por base um tipo pré-definido de modelo para representar o sistema cuja resposta se está a analisar. Num desses métodos (EFDD) utilizou-se já uma transformação para o domínio do tempo para estimar a frequência e o coeficiente de amortecimento, no entanto, o método é fundamentalmente um método no domínio da frequência.

A identificação modal estocástica também pode ser efectuada através de métodos no domínio do tempo, também designados por métodos paramétricos. De facto, nesses métodos são determinados os parâmetros de modelos que se consideram adequados para representar o comportamento dinâmico de sistemas estruturais, nomeadamente, modelos sob a forma da representação de estado de sistemas estocásticos discretos no tempo, modelos ARMAV ou modelos ARV. Os parâmetros desses modelos são avaliados através de diferentes técnicas de ajuste, ou às funções de correlação da resposta dos sistemas estruturais ou mesmo directamente às próprias séries temporais de resposta. A identificação modal dos sistemas é então efectuada através da avaliação das características dinâmicas dos modelos ajustados.

Uma primeira diferenciação, que pode ser estabelecida nos métodos no domínio do tempo, relaciona-se com a informação de base que é considerada: funções de correlação ou séries temporais de resposta. Outras diferenciações resultam das diferentes formas de efectuar o ajuste dos modelos.

Conforme se referiu anteriormente, os métodos em que se utilizam directamente as séries temporais de resposta, podem ser designados por *métodos de uma fase*; enquanto que os métodos que se baseiam na análise das funções de correlação, podem ser designados por *métodos de duas fases*, uma vez que envolvem uma primeira fase de avaliação das funções de correlação e uma segunda fase de análise dessas funções para o ajuste de modelos com vista à identificação das características dinâmicas dos sistemas.

Na parte restante deste capítulo, apresentam-se e aplicam-se diversos métodos de identificação modal estocástica no domínio do tempo. Antes porém, importa esclarecer alguns aspectos relacionados com a forma de organizar as séries temporais de resposta, para a sua utilização nos métodos de identificação modal estocástica no domínio do tempo, e também com as técnicas de estimativa das funções de correlação da resposta.

4.3.1 Organização das séries de resposta no tempo

Nalguns métodos de identificação modal estocástica no domínio do tempo é conveniente organizar os registos de resposta, medidos experimentalmente, sob a forma de uma matriz de Hankel⁴ por blocos, designação esta que advém da maneira como os registos são dispostos nessa matriz.

A grande aplicação das matrizes de Hankel por blocos é nos métodos de identificação em subespaços (Van Overschee e De Moor, 1996), onde essas matrizes desempenham um papel importante, quer na situação de identificação determinística (com conhecimento da entrada e da

⁴ Uma matriz de Hankel é uma matriz simétrica em que os elementos de cada anti-diagonal são iguais.

resposta), quer no caso da identificação estocástica (só com conhecimento da resposta). O motivo que levou a que neste trabalho se apresentem já essas matrizes (e não mais adiante quando se abordarem os métodos de identificação estocástica em subespaços) tem a ver com a possibilidade de as utilizar na estimativa das funções de correlação da resposta, conforme se apresentará em 4.3.2.

Considerando então as séries y_k (discretas no tempo) da resposta dum sistema, a respectiva matriz de Hankel com $2i$ linhas de blocos e N colunas é definida nas expressões indicadas em seguida, (a diferença entre as duas expressões está apenas na forma como a matriz é subdividida):

$$H = Y_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+N-2} \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} & \cdots & y_{i+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i+1} & \cdots & y_{2i+N-2} \end{bmatrix}}^N \\ \begin{array}{l} i \\ i \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"passado"} \\ \text{"futuro"} \end{array} = \begin{bmatrix} Y_{0|i-1} \\ Y_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p \\ Y_f \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$H = Y_{0|2i-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+N-2} \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} & \cdots & y_{i+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i+1} & \cdots & y_{2i+N-2} \end{bmatrix}}^N \\ \begin{array}{l} i+1 \\ i-1 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"passado"} \\ \text{"futuro"} \end{array} = \begin{bmatrix} Y_{0|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{p+} \\ Y_{f-} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

em que: i é um índice a definir na análise, que deve ser pelo menos maior do que a máxima ordem do sistema que se pretende identificar (ou seja, pelo menos maior do que a ordem da matriz de estado desse sistema); note-se que uma vez que cada bloco tem n_e linhas, a matriz de Hankel, definida em (4.37) e (4.38), tem um total de $2 n_e i$ linhas;

N é o número de colunas da matriz, que normalmente é considerado igual a $s - 2i + 1$ de modo a aproveitar todos os valores s das séries de resposta; no caso da identificação estocástica, para a justificação, sob um ponto de vista estatístico, dos métodos utilizados, assume-se que $N, s \rightarrow \infty$ (Van Overschee e De Moor, 1996).

Em (4.37) e (4.38) é incluído um factor de escala de $1/\sqrt{N}$ o que, conforme se indicará mais adiante, possibilita que as funções de correlação sejam estimadas a partir da matriz de Hankel.

Em (4.37) e (4.38), os índices de $Y_{0|2i-1}$, $Y_{0|i-1}$, $Y_{i|2i-1}$, $Y_{0|i}$ e $Y_{i+1|2i-1}$ representam o índice do primeiro e do último bloco da primeira coluna da matriz de Hankel por blocos. Nas matrizes Y_p e Y_f o

índice p representa *passado* e o índice f representa *futuro*. As matrizes \mathbf{Y}_p e \mathbf{Y}_f são definidas dividindo a matriz $\mathbf{Y}_{0|2i-1}$ em duas partes iguais com i linhas de blocos cada uma; enquanto que as matrizes \mathbf{Y}_{p+} e \mathbf{Y}_{f-} são obtidas de $\mathbf{Y}_{0|2i-1}$, mudando a separação entre \mathbf{Y}_p e \mathbf{Y}_f uma linha para baixo.

Uma outra forma ligeiramente diferente de organizar as séries de resposta é proposta por Peeters (2000), com o objectivo de tratar de forma mais eficaz, a informação obtida num número considerável de pontos e em vários ensaios (que é a situação usual sempre que se pretende obter uma boa descrição espacial dos modos de vibração dum sistema estrutural). Nesse caso, conforme se referiu relativamente aos métodos no domínio da frequência, se os graus de liberdade de referência (comuns a todos os ensaios) forem escolhidos criteriosamente de modo a evitar nodos dos modos de vibração, as respectivas séries de resposta têm toda a informação relativa às frequências e amortecimentos do sistema. Assim, Peeters (2000) propõe que a análise seja efectuada separando as séries de resposta nos graus de liberdade de referência das séries de resposta nos restantes graus de liberdade. As n_e séries de resposta são portanto divididas num subconjunto de r séries, relativas aos graus de liberdade de referência, e de $n_e - r$ séries referentes aos restantes graus de liberdade, organizadas na matriz \mathbf{y}_k de modo a que as séries relativas aos graus de liberdade de referência estejam colocadas nas primeiras linhas:

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k^{ref} \\ \mathbf{y}_k^{mov} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

em que: \mathbf{y}_k^{ref} são as séries de resposta segundo os graus de liberdade de referência, que podem ser determinadas através de $\mathbf{y}_k^{ref} = \mathbf{L} \mathbf{y}_k$, sendo \mathbf{L} uma matriz que, de \mathbf{y}_k , selecciona os graus de liberdade de referência, $\mathbf{L} = [\mathbf{I}_r \quad \mathbf{0}]$;

\mathbf{y}_k^{mov} são as séries de resposta segundo os restantes graus de liberdade.

Neste caso, a matriz de Hankel é organizada de modo a que as primeiras i linhas de blocos têm apenas as séries relativas aos graus de liberdade de referência, enquanto que as segundas i linhas de blocos têm as séries relativas a todos os graus de liberdade, ou seja:

$$\mathbf{H}^{ref} = \mathbf{Y}_{0|2i-1}^{ref} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0^{ref} & \mathbf{y}_1^{ref} & \mathbf{y}_2^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{N-1}^{ref} \\ \mathbf{y}_1^{ref} & \mathbf{y}_2^{ref} & \mathbf{y}_3^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_N^{ref} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{i-1}^{ref} & \mathbf{y}_i^{ref} & \mathbf{y}_{i+1}^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-2}^{ref} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+3} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \mathbf{y}_{2i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+N-2} \end{bmatrix}}^N \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{i} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"passado"} \\ \text{"futuro"} \end{array} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|i-1}^{ref} \\ \mathbf{Y}_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p^{ref} \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

A matriz de Hankel na forma indicada na expressão (4.40) também pode ser escrita numa forma equivalente à expressão (4.38), ou seja, fazendo avançar uma linha, a separação entre as matrizes \mathbf{Y}_p^{ref} e \mathbf{Y}_f :

$$\mathbf{H}^{ref} = \mathbf{Y}_{0|2i-1}^{ref} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{y}_0^{ref} & \mathbf{y}_1^{ref} & \mathbf{y}_2^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{N-1}^{ref} \\ \mathbf{y}_1^{ref} & \mathbf{y}_2^{ref} & \mathbf{y}_3^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_N^{ref} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{i-1}^{ref} & \mathbf{y}_i^{ref} & \mathbf{y}_{i+1}^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-2}^{ref} \\ \mathbf{y}_i^{ref} & \mathbf{y}_{i+1}^{ref} & \mathbf{y}_{i+2}^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-1}^{ref} \\ \hline \mathbf{y}_i^{mov} & \mathbf{y}_{i+1}^{mov} & \mathbf{y}_{i+2}^{mov} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-1}^{mov} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+3} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \mathbf{y}_{2i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+N-2} \end{array} \right]}^N \\ \underbrace{\left. \begin{array}{l} i+1 \\ \vdots \\ i-1 \end{array} \right\}}_{\text{"passado"}} \\ \underbrace{\left. \begin{array}{l} i-1 \\ \vdots \\ i+1 \end{array} \right\}}_{\text{"futuro"}} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0|i}^{ref} \\ \mathbf{Y}_{i|i}^{mov} \\ \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{p+}^{ref} \\ \mathbf{Y}_{i|i}^{mov} \\ \mathbf{Y}_{f-} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

neste caso, uma vez que o número de graus de liberdade de referência r é menor do que o número total de graus de liberdade observados n_e , para que a matriz de Hankel mantenha o número total de linhas, é necessário manter $n_e - r$ linhas da matriz \mathbf{Y}_f que são representadas em (4.41) por $\mathbf{Y}_{i|i}^{mov}$.

4.3.2 Estimativa das funções de correlação da resposta

Para a utilização em *métodos de identificação de duas fases*, as funções de correlação da resposta dos sistemas podem ser avaliadas de diferentes maneiras. Nessa avaliação os erros de viés e de variância devem ser tão pequenos quanto possível.

Descrevem-se em seguida três técnicas não paramétricas de avaliação das funções de correlação: o método directo; a técnica baseada na utilização da transformada rápida de Fourier (FFT); e o método do decremento aleatório (RD).

4.3.2.1 Método directo

O método directo de avaliação das funções de correlação foi muito utilizado até ao aparecimento do algoritmo da transformada rápida de Fourier (Cooley e Tukey, 1965) que permitiu efectuar essa avaliação de forma mais rápida. O método directo é simples e fácil de implementar, tendo no entanto a desvantagem de ser pouco rápido.

As funções de correlação da resposta, discreta no tempo, dum sistema estrutural, são definidas através da relação seguinte (Bendat e Piersol, 2001):

$$\mathbf{R}_i = E[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (4.42)$$

Esta definição foi já apresentada no capítulo 2, tendo-se então utilizado a designação de funções de covariância da resposta. No entanto, como para processos estocásticos com média nula, as funções de covariância coincidem com as funções de correlação (Carvalho *et al.*, 1989; Asmussen, 1997), utiliza-se agora esta última designação.

Assumindo a hipótese de ergodicidade⁵ do processo estocástico da resposta dum sistema, o valor expectável em (4.42) pode ser substituído por:

$$\mathbf{R}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \quad (4.43)$$

Como as séries de resposta medidas experimentalmente têm sempre um número finito de pontos, as funções de correlação em (4.43) são na realidade estimadas através de:

$$\hat{\mathbf{R}}_i^w = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \quad (4.44)$$

As estimativas das funções de correlação avaliadas de acordo com (4.44) são enviesadas. Para obter estimativas não enviesadas, é necessário aplicar a relação seguinte (Brincker *et al.*, 1992; Orfanidis, 1996):

$$\hat{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{N-i} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \quad (4.45)$$

Salienta-se que em (4.43), (4.44) e (4.45), N tem o significado indicado em 4.3.1, sendo portanto, menor do que o número total de pontos nas séries de resposta. Por outro lado, i , o valor do atraso na função de correlação deve ser menor ou igual à máxima ordem do sistema a identificar.

As estimativas das funções de correlação indicadas em (4.44) e (4.45) estão relacionadas entre si por uma janela triangular $w_i = (N-i)/N$, ou seja:

$$\hat{\mathbf{R}}_i^w = \frac{N-i}{N} \hat{\mathbf{R}}_i \quad (4.46)$$

⁵ Um processo estocástico ergódico é um processo estacionário em que o valor expectável do processo num instante t (ou seja a média num número infinito de realizações) é igual ao valor médio temporal numa realização suficientemente longa do processo.

As estimativas não enviesadas (4.45) das funções de correlação podem portanto ser obtidas das estimativas enviesadas (4.44), dividindo estas por uma janela triangular.

As funções de correlação da resposta podem ser organizadas numa matriz de Toeplitz⁶ por blocos, que pode ser calculada a partir das matrizes de Hankel através da relação indicada em seguida:

$$\mathbf{T}_{||i} = \mathbf{Y}_f (\mathbf{Y}_p)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{R}_{i-1} & \dots & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_{i+1} & \mathbf{R}_i & \dots & \mathbf{R}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2i-1} & \mathbf{R}_{2i-2} & \dots & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

note-se que esta relação é válida desde que nas matrizes de Hankel, as séries de resposta estejam escaladas pelo factor $1/\sqrt{N}$.

Na metodologia adoptada por Peeters (2000), as matrizes reduzidas, com as funções de correlação avaliadas entre os registos obtidos nos vários graus de liberdade observados e nos graus de liberdade de referência, correspondem às primeiras r colunas das matrizes de correlação completas:

$$\mathbf{R}_i^{ref} = E \left[\mathbf{y}_{k+i} (\mathbf{y}_k^{ref})^T \right] = \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T \quad (4.48)$$

Dum modo semelhante, pode-se definir também uma forma reduzida da matriz de correlação entre o próximo estado e a resposta (já referida no capítulo 2), através de:

$$\mathbf{G}_i^{ref} = E \left[\mathbf{x}_{k+1} (\mathbf{y}_k^{ref})^T \right] = \mathbf{G} \mathbf{L}^T \quad (4.49)$$

Verificando-se, para $i = 1, 2, \dots$ que:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^{ref} &= \mathbf{R}_i \mathbf{L}^T = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}^{ref} \\ (\mathbf{R}_i^{ref})^T &= \mathbf{L} \mathbf{R}_{-i} = (\mathbf{G}^{ref})^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (4.50)$$

relações estas que são equivalentes às expressões de factorização das matrizes de correlação completas, já apresentadas no capítulo 2.

Na metodologia adoptada por Peeters (2000), as funções de correlação relativas aos graus de liberdade de referência são também organizadas numa matriz de Toeplitz:

⁶ Uma matriz de Toeplitz é uma matriz simétrica em que os elementos de cada diagonal são iguais.

$$\mathbf{T}_{1|i}^{ref} = \mathbf{Y}_f (\mathbf{Y}_p^{ref})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^{ref} & \mathbf{R}_{i-1}^{ref} & \dots & \mathbf{R}_1^{ref} \\ \mathbf{R}_{i+1}^{ref} & \mathbf{R}_i^{ref} & \dots & \mathbf{R}_2^{ref} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2i-1}^{ref} & \mathbf{R}_{2i-2}^{ref} & \dots & \mathbf{R}_i^{ref} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Exemplo: Considerando os registos de acelerações obtidos no ensaio de medição de vibrações ambiente efectuado no modelo de um edifício de 4 pisos, avaliaram-se as estimativas das funções de correlação da resposta, aplicando o método directo, através da expressão (4.45). Para tal, procedeu-se a um processamento semelhante ao adoptado para a avaliação das funções de densidade espectral da resposta (ver 4.2.1), dividindo as séries completas em amostras com 2048 valores, calculando as funções de correlação com essas amostras e determinando o seu valor médio de modo a reduzir o erro de variância. Na figura 4.19 representa-se uma parte, com 4 seg. de duração e apenas para intervalos de tempo positivos, das funções de correlação assim obtidas.

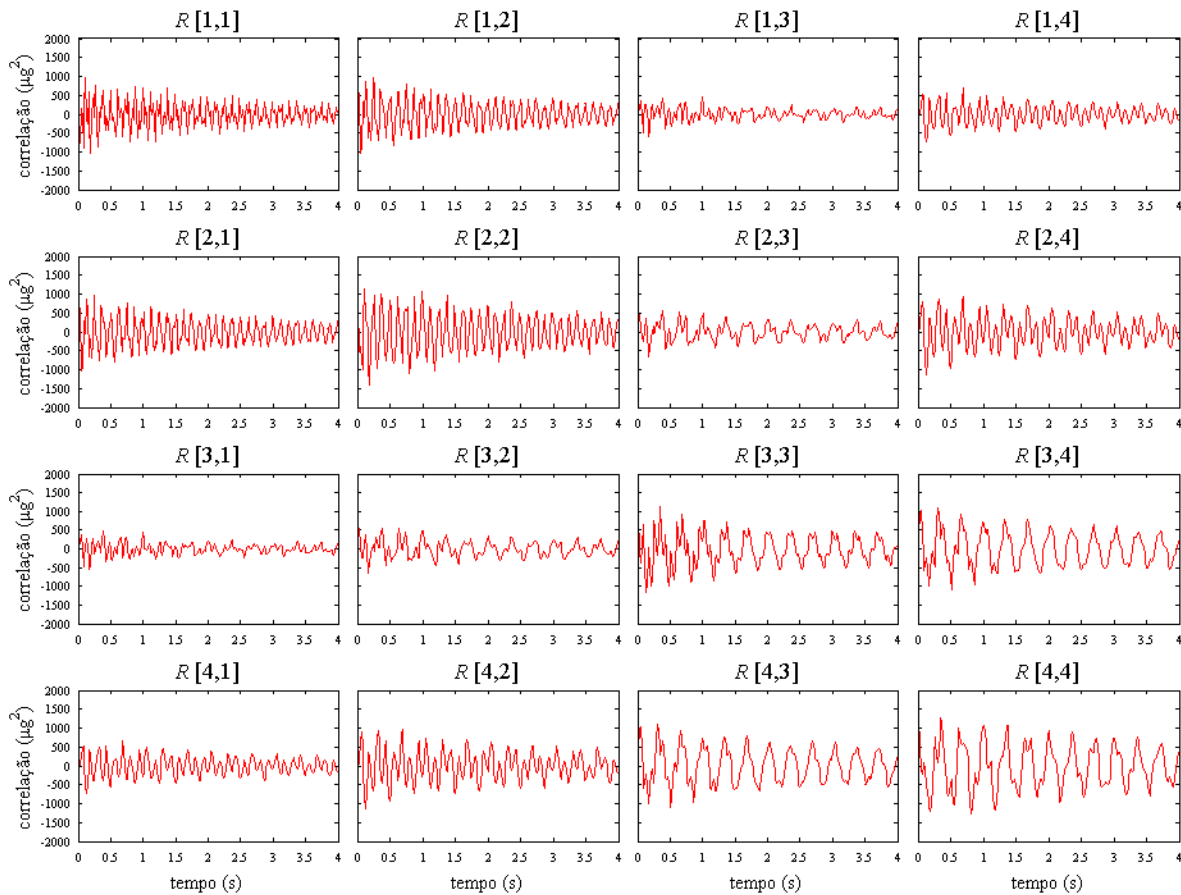


Figura 4.19 – Funções de correlação estimadas através do método directo.

4.3.2.2 Método baseado na utilização da FFT

O método de avaliação das funções de correlação com base na utilização do algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) consiste num processo análogo ao apresentado anteriormente

para avaliação das funções de densidade espectral da resposta, havendo no entanto alguns procedimentos que devem ser seguidos para evitar erros de viés nas funções de correlação.

De facto, considerando as relações de Wiener-Kinchine, as funções de correlação podem ser estimadas a partir das funções de densidade espectral, avaliadas através do processo descrito em 4.2.1, aplicando a inversa da transformada discreta de Fourier (através do algoritmo da IFFT). No entanto, as estimativas assim obtidas para as funções de correlação são enviesadas. Esse erro de viés deve-se à hipótese, admitida ao aplicar-se a transformada discreta de Fourier, de periodicidade das amostras analisadas das séries de resposta; como essa hipótese de periodicidade, em geral, não se verifica, é introduzido um erro de viés nas estimativas das funções de correlação devido a um fenómeno de circularidade (Randall, 1987; Carvalhal *et al.*, 1989; Brincker *et al.*, 1992). No entanto, esse erro de viés pode ser evitado procedendo de acordo com a metodologia descrita em seguida.

O método de avaliar estimativas não enviesadas das funções de correlação, utilizando o algoritmo da FFT, é ilustrado na figura 4.20 (Brincker *et al.*, 1992).

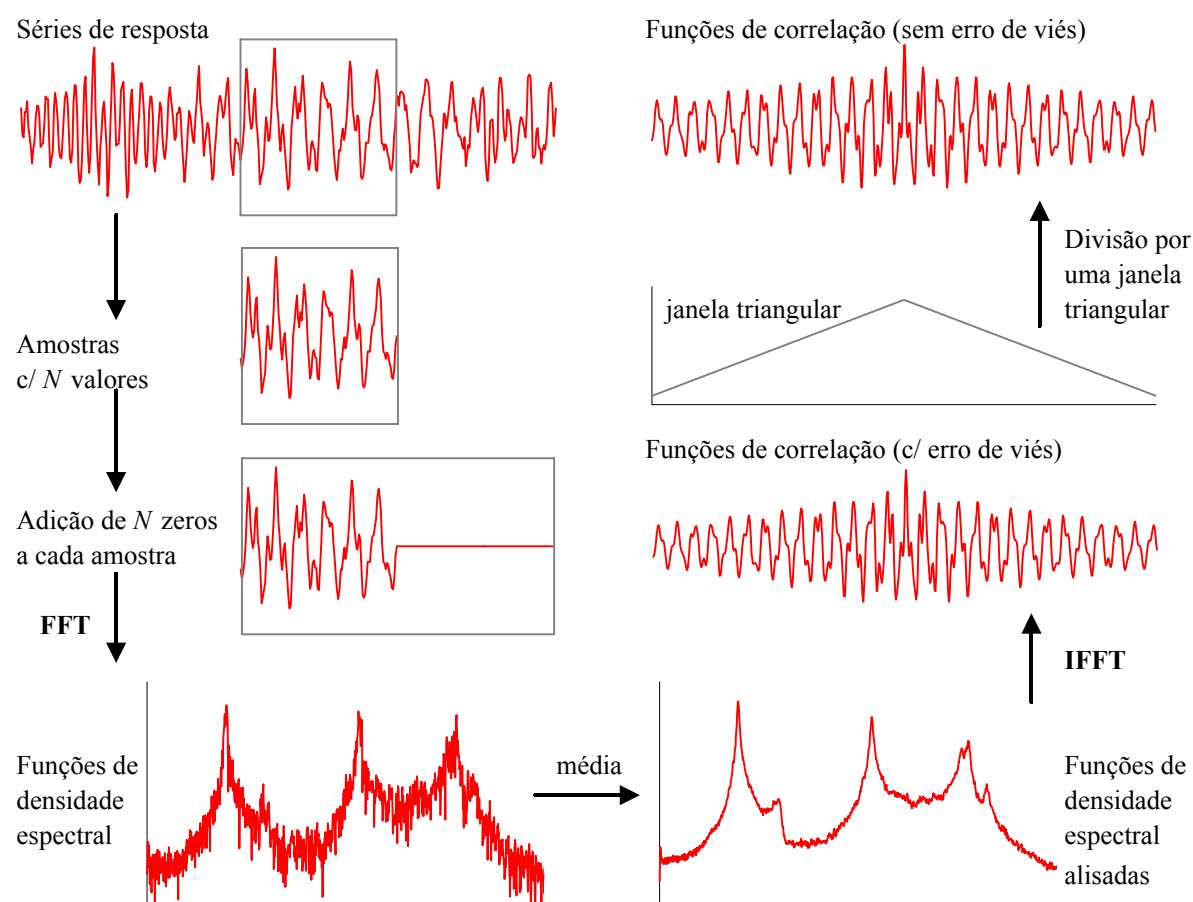


Figura 4.20 – Avaliação de estimativas não enviesadas das funções de correlação utilizando o algoritmo da FFT.

O método ilustrado na figura 4.20 consiste então em:

- subdividir as séries de resposta em amostras mais pequenas com N valores cada uma;
- adicionar a cada amostra uma série com N zeros;
- aplicar o algoritmo da FFT para avaliar a transformada discreta de Fourier das amostras, e assim estimar as funções de densidade espectral;
- avaliar a média das funções de densidade espectral calculadas com cada amostra, obtendo-se assim estimativas alisadas das funções de densidade espectral;
- aplicar o algoritmo da IFFT às funções de densidade espectral alisadas, para determinar as funções de correlação (que assim, estão afectadas por um erro de viés);
- dividir as funções de correlação por uma janela triangular, obtendo-se assim estimativas dessas funções de correlação sem erro de viés.

Exemplo: Considerando os registos de acelerações obtidos no ensaio de medição de vibrações ambiente efectuado no modelo de um edifício de 4 pisos, avaliaram-se as estimativas das funções de correlação da resposta, aplicando o método baseado na utilização da FFT, acima descrito. Na figura 4.21 representa-se uma parte, com 4 seg. de duração e apenas para intervalos de tempo positivos, das funções de correlação assim obtidas. Note-se que as funções de correlação determinadas com o método baseado na utilização da FFT são muito próximas das funções correlação avaliadas com o método directo.

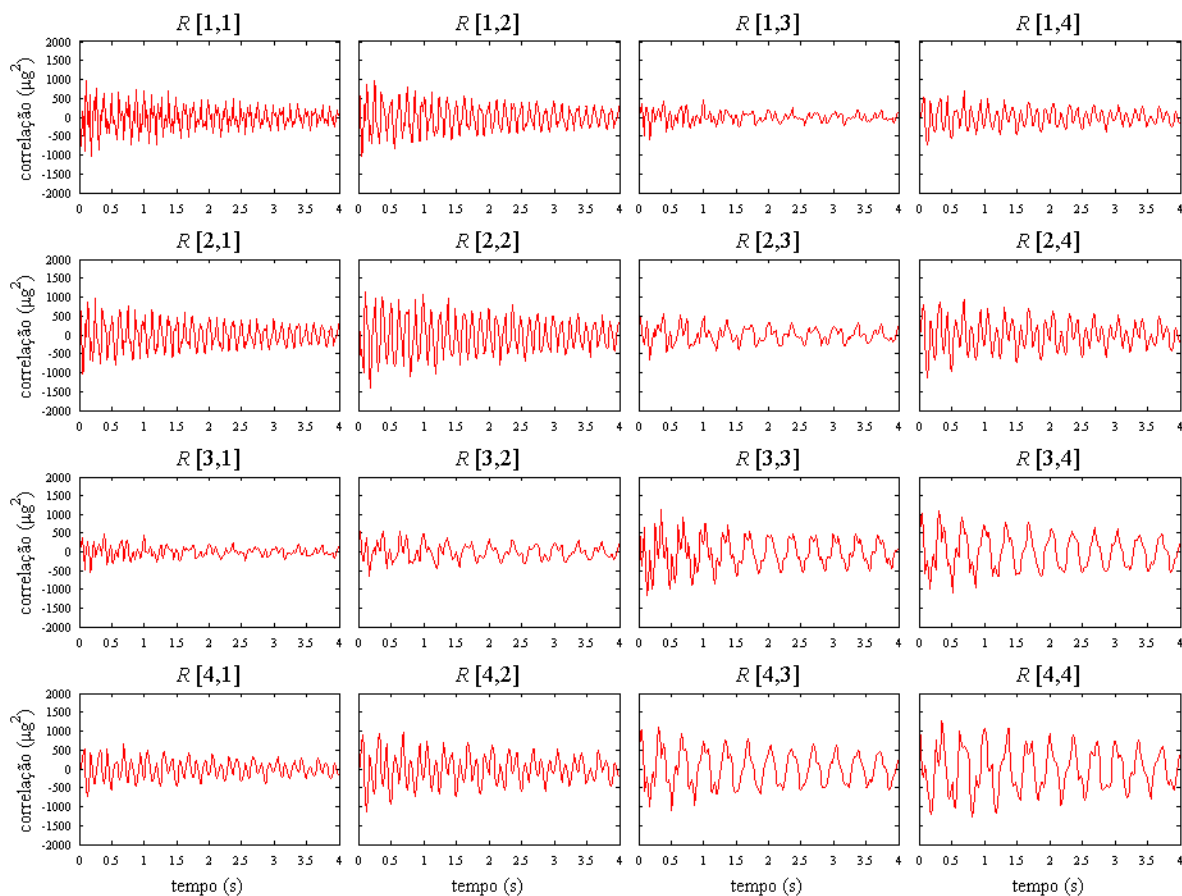


Figura 4.21 – Funções de correlação estimadas através do método baseado na utilização da FFT.

4.3.2.3 Método do decremento aleatório

Considerações gerais sobre o método do decremento aleatório:

O método do decremento aleatório RD (*random decrement*) é uma técnica simples e rápida que pode ser utilizada para estimar as funções de correlação, através do cálculo de médias de amostras seleccionadas dos registos de resposta às acções ambiente, sendo a escolha dessas amostras efectuada com base na verificação duma mesma condição inicial, conforme se pormenorizará mais adiante.

O método RD foi proposto por Cole (1968) no âmbito de trabalhos efectuados na *NASA*, relacionados com a caracterização dinâmica e detecção de danos em estruturas aeroespaciais em condições normais de operação. Posteriormente, outros autores têm-se dedicado ao estudo e à aplicação desse método, por exemplo Ibrahim (1977, 1979, 2001), Vandiver *et al.* (1982), Yang *et al.* (1990), Brincker *et al.* (1991, 1992) e, em particular, Asmussen (1997) no que se refere à sua aplicação em estruturas de engenharia civil. A apresentação que se faz em seguida sobre o método RD baseia-se fundamentalmente nesse trabalho de Asmussen (1997).

Com o método RD, Cole (1968) pretendeu desenvolver um método simples e directo de traduzir as séries de resposta dum sistema, numa forma mais sintética e que exprimisse melhor as suas características. As funções directamente obtidas com o método RD podem ser designadas por funções de decremento aleatório ou funções RD e representadas pela letra ***D***.

As funções RD foram inicialmente interpretadas como respostas dos sistemas estruturais em regime livre, o que decorre da justificação apresentada por Cole (1968) para fundamentar o método:

A resposta de um sistema estrutural a acções de tipo aleatório num determinado instante $t + t_0$ pode ser considerada como sendo composta por três parcelas: 1) a resposta devida aos deslocamentos iniciais; 2) a resposta devida às velocidades iniciais; 3) a resposta às acções aleatórias desde o instante t_0 até ao instante $t + t_0$. Se dos registos da resposta total forem extraídas amostras sempre com o mesmo deslocamento inicial e se for feita uma média dessas amostras, à medida que o número dessas amostras aumenta, a parcela 3) da resposta vai-se anulando e tendendo a desaparecer; a parcela 2) também tenderá a anular-se uma vez que a velocidade inicial variará aleatoriamente nas diversas amostras; restará assim a parcela 1) ou seja, a resposta em regime livre devida aos deslocamentos iniciais.

Na forma que deriva directamente desta fundamentação do método RD, a condição inicial utilizada para definir as amostras que são extraídas das séries de resposta, é designada por *condição inicial de passagem por um nível*. É possível utilizar outras condições iniciais para a selecção das

amostras, às quais correspondem efeitos diferentes do processo de média das amostras, nas duas primeiras parcelas, acima indicadas, da resposta dum sistema a acções de tipo aleatório. Note-se que esse processo tem sempre um efeito de anular a parcela 3), independentemente das condições iniciais consideradas. Adiante serão explicitadas outras condições iniciais que normalmente são utilizadas.

Na figura 4.22 ilustra-se o conceito de base do método RD, concretizando-se para uma série de exemplo, o processo de avaliação das funções RD. No gráfico superior dessa figura, estão indicados os pontos correspondentes à condição inicial de passagem por um nível. Nos gráficos inferiores, mostram-se as amostras extraídas das séries de resposta e a sua média cumulativa, ou seja a função RD sucessivamente obtida. No exemplo apresentado nessa figura, as amostras extraídas das séries de resposta, têm uma duração de 0,5 segundos; note-se que o método RD pode ser aplicado considerando uma duração qualquer para as amostras extraídas e portanto para a função RD que é calculada. Na forma que é exemplificada na figura 4.22, as amostras são extraídas apenas para intervalos de tempo positivos em relação aos pontos iniciais, no entanto, no método RD podem também ser considerados intervalos de tempo negativos.

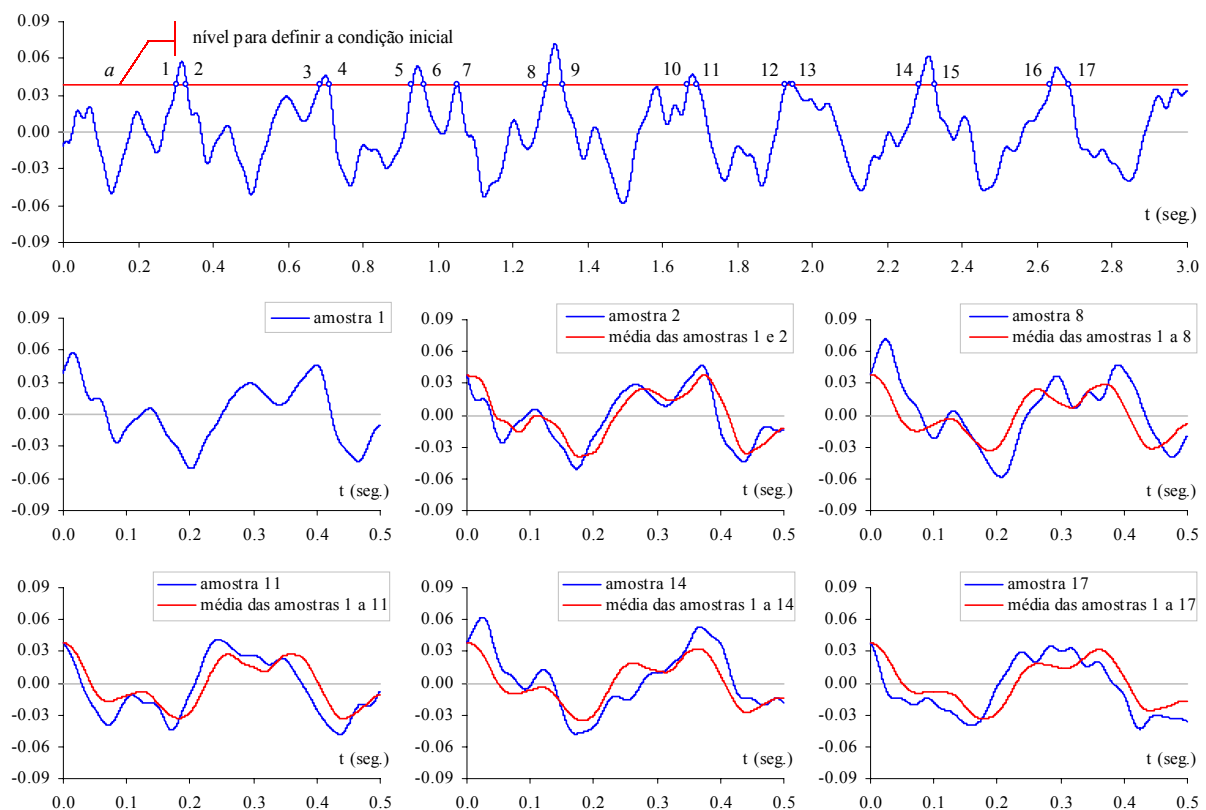


Figura 4.22 – Exemplificação do método de avaliação das funções RD.

Embora a justificação do método RD acima exposta, tenha sido apresentada em termos da resposta em deslocamento dos sistemas estruturais, é equivalente aplicar o processo de avaliação das funções RD à resposta em aceleração, que, conforme se referiu no capítulo 3, é a grandeza que é

usualmente medida na observação *in situ* da resposta dinâmica de estruturas. Nesse caso, as condições iniciais para extracção das amostras são definidas em termos de aceleração e/ou da sua primeira derivada em ordem ao tempo.

Os trabalhos inicialmente desenvolvidos por Cole (1968) com o método do decremento aleatório referiam-se apenas à análise de um único registo de resposta. Posteriormente, Ibrahim (1977) introduziu os conceitos de *auto funções RD* e de *funções RD cruzadas* para a análise de situações em que a resposta observada é constituída pelos registos obtidos em diversos pontos dum sistema estrutural, possibilitando assim a utilização das funções RD não só para a avaliação das frequências naturais de vibração e dos coeficientes de amortecimento, como também das componentes modais nos pontos instrumentados.

A relação entre funções RD e funções de correlação foi estabelecida por Vandiver *et al.* (1982) que provou que, para processos estocásticos estacionários gaussianos de média nula, as auto funções RD (um único registo de resposta) são proporcionais às funções de auto-correlação, no caso de se utilizar a condição inicial de passagem por um nível. Posteriormente, Brincker *et al.* (1992) introduziram a definição duma condição inicial generalizada e verificaram a relação das funções RD com as funções de correlação e com as suas primeiras derivadas em ordem ao tempo.

Definição das funções de decremento aleatório:

Considerando dois processos estocásticos estacionários $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$, as respectivas auto funções RD são definidas como o valor expectável sob a condição \mathbf{T} , indicado nas expressões seguintes:

$$\mathbf{D}_{xx}(\tau) = E[\mathbf{x}(t + \tau) | \mathbf{T}_{x(t)}] \quad \mathbf{D}_{yy}(\tau) = E[\mathbf{y}(t + \tau) | \mathbf{T}_{y(t)}] \quad (4.52)$$

As respectivas funções RD cruzadas são por sua vez dadas por:

$$\mathbf{D}_{xy}(\tau) = E[\mathbf{x}(t + \tau) | \mathbf{T}_{y(t)}] \quad \mathbf{D}_{yx}(\tau) = E[\mathbf{y}(t + \tau) | \mathbf{T}_{x(t)}] \quad (4.53)$$

Na prática, assume-se também que os processos estocásticos $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são ergódicos, situação em que, desde que o número de pontos iniciais N seja suficientemente grande, as funções RD de (4.52) e (4.53) podem ser estimadas através de:

$$\hat{\mathbf{D}}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}(t_i + \tau) | \mathbf{T}_{x(t_i)} \quad \hat{\mathbf{D}}_{yy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}(t_i + \tau) | \mathbf{T}_{y(t_i)} \quad (4.54)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{xy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}(t_i + \tau) | \mathbf{T}_{y(t_i)} \quad \hat{\mathbf{D}}_{yx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{y}(t_i + \tau) | \mathbf{T}_{x(t_i)} \quad (4.55)$$

É importante salientar que as estimativas das funções RD, avaliadas através das expressões (4.54) e (4.55) são estimativas não enviesadas (Brincker *et al.*, 1992; Asmussen, 1997), sendo essa uma das vantagens do método do decremento aleatório.

Condição inicial generalizada:

Conforme se apresentou anteriormente, as funções RD são calculadas através duma média de amostras dos registos de resposta, sob uma condição inicial T . É possível definir essa condição inicial sob uma forma generalizada T^G que engloba as diferentes condições iniciais que são utilizadas na prática. Para um processo estocástico estacionário gaussiano de média nula, $\mathbf{x}(t)$, a condição inicial generalizada é expressa através de:

$$T_{\mathbf{x}(t)}^G = \{a_1 \leq \mathbf{x}(t) < a_2, b_1 \leq \dot{\mathbf{x}}(t) < b_2\} \quad (4.56)$$

Considerando a condição inicial generalizada (4.56), é possível verificar (Asmussen, 1997) que as funções RD são iguais a uma soma ponderada das funções de correlação e das suas primeiras derivadas em ordem ao tempo, ou seja:

$$D_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} - \frac{\dot{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_{\dot{x}}^2} \tilde{b} \quad (4.57)$$

$$D_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} - \frac{\dot{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_{\dot{x}}^2} \tilde{b} \quad (4.58)$$

em que: σ_x^2 e $\sigma_{\dot{x}}^2$ são as variâncias do processo $\mathbf{x}(t)$ e da sua primeira derivada em ordem ao tempo; \tilde{a} e \tilde{b} são dois valores que dependem dos limites $[a_1 \ a_2]$ e $[b_1 \ b_2]$ considerados para definir as condições iniciais, e das funções de densidade de probabilidade $p_x(x)$ e $p_{\dot{x}}(\dot{x})$ do processo $\mathbf{x}(t)$ e da sua primeira derivada em ordem ao tempo, de acordo com as seguintes relações:

$$\tilde{a} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} \quad \tilde{b} = \frac{\int_{b_1}^{b_2} \dot{x} p_{\dot{x}}(\dot{x}) d\dot{x}}{\int_{b_1}^{b_2} p_{\dot{x}}(\dot{x}) d\dot{x}} \quad (4.59)$$

As relações (4.57) a (4.59) mostram que com base na definição dos limites considerados para estabelecer as condições iniciais, é possível controlar a contribuição das funções de correlação e das suas primeiras derivadas em ordem ao tempo, para as funções RD que são obtidas. Em situações limite, estas funções poderão ser apenas proporcionais às funções de correlação, ou apenas

proporcionais às primeiras derivadas em ordem ao tempo das funções de correlação. Conforme se indicará adiante, essas situações são determinadas pelo tipo de condições iniciais que forem consideradas. Note-se que as condições iniciais normalmente utilizadas podem ser definidas como uma particularização da condição inicial generalizada agora apresentada.

Conforme já se salientou, um aspecto importante do método do decremento aleatório é o número de pontos iniciais N , o qual é também determinado pelos limites considerados para estabelecer as condições iniciais.

Particularizam-se em seguida as quatro condições iniciais que normalmente são utilizadas no método do decremento aleatório:

- condição inicial de passagem por um nível;
- condição inicial de máximos locais;
- condição inicial de pontos positivos;
- condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva.

Condição inicial de passagem por um nível:

Esta condição inicial foi já referida na apresentação geral do método do decremento aleatório, correspondendo a uma condição inicial que pode ser definida através de:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^L = \{\mathbf{x}(t) = a\} \quad (4.60)$$

A condição inicial de passagem por um nível, pode ser escrita como um caso particular da condição inicial generalizada, em que se considera $[a_1 \ a_2] = [a \ a + \Delta a]$ ($\Delta a \rightarrow 0$) e $[b_1 \ b_2] = [-\infty \ +\infty]$, ou seja:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^L = \{a \leq \mathbf{x}(t) < a + \Delta a, -\infty \leq \dot{\mathbf{x}}(t) < +\infty\}, \quad \Delta a \rightarrow 0 \quad (4.61)$$

Na figura 4.23, para uma série de exemplo, representam-se os pontos iniciais seleccionados através da aplicação da condição inicial de passagem por um nível.

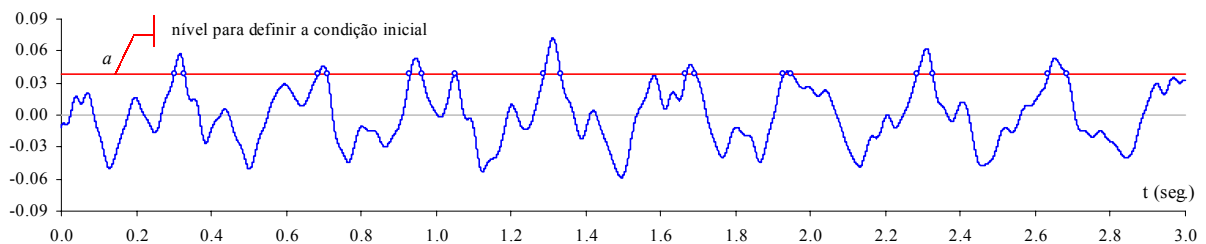


Figura 4.23 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de passagem por um nível.

No caso da condição inicial de passagem por um nível, as funções RD são proporcionais às funções de correlação (para processos estocásticos estacionários gaussianos de média nula), verificando-se as relações seguintes:

$$\mathbf{D}_{xx}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} a \quad \mathbf{D}_{yx}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} a \quad (4.62)$$

No caso da condição inicial de passagem por um nível e assumindo que as amostras consideradas para estimar as funções RD são independentes entre si (o que na prática é uma condição que normalmente não é satisfeita, embora o possa ser por imposição no processo de cálculo das funções RD) a variância na estimativa das funções RD pode ser avaliada através de (Asmussen, 1997):

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \right) \quad \text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 \right) \quad (4.63)$$

O valor expectável do número de pontos iniciais $N(a)$, para a condição inicial de passagem por um nível, pode ser estimado através de (Asmussen, 1997):

$$E[N(a)] = \Delta t (N_x - N_\tau) \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_x}{\sigma_x} e^{\left(-\frac{a^2}{2\sigma_x^2} \right)} \quad (4.64)$$

em que: Δt é o intervalo de tempo de amostragem das séries observadas;

N_x é o número de pontos das séries observadas;

N_τ é o número de pontos das funções RD.

Uma das questões na aplicação da condição inicial de passagem por um nível é a definição do nível a considerado para seleccionar os pontos iniciais das amostras cuja média é calculada no método do decremento aleatório. Normalmente esse nível é definido como um múltiplo do desvio padrão da série que está a ser analisada, por exemplo $a = 1 \sigma_x$ ou $a = 2 \sigma_x$. Pode-se demonstrar (Asmussen, 1997) que, em termos de minimização da variância das funções RD, o nível óptimo que deve ser considerado é $a = \sqrt{2} \sigma_x$.

Condição inicial de máximos locais:

Com esta condição, os pontos iniciais seleccionados correspondem a máximos locais dum processo, ou seja, a pontos em que são nulas as primeiras derivadas em ordem ao tempo desse processo. Esta condição inicial pode ser expressa através de:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^E = \{a_1 \leq \mathbf{x}(t) < a_2, \dot{\mathbf{x}}(t) = 0\}, \quad 0 \leq a_1 < a_2 \quad (4.65)$$

A condição inicial de máximos locais pode também ser expressa como um caso particular da condição inicial generalizada, em que, em geral, se considera $[a_1 \ a_2] = [a_1 \ a_2]$ e $[b_1 \ b_2] = [0 \ 0+\Delta b]$ ($\Delta b \rightarrow 0$), ou seja:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^E = \{a_1 \leq \mathbf{x}(t) < a_2, 0 \leq \dot{\mathbf{x}}(t) < 0 + \Delta b\}, \quad \Delta b \rightarrow 0 \quad (4.66)$$

Na figura 4.24, para uma série de exemplo, representam-se os pontos iniciais seleccionados através da aplicação da condição inicial de máximos locais, considerando $[a_1 \ a_2] = [0 \ +\infty]$, que é a opção mais usual para essa condição inicial.

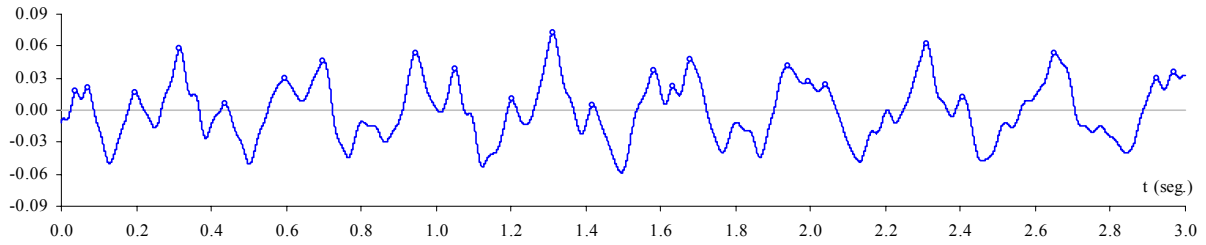


Figura 4.24 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de máximos locais.

No caso da condição inicial de máximos locais, as funções RD são também proporcionais às funções de correlação (para processos estocásticos estacionários gaussianos de média nula), verificando-se as relações seguintes:

$$\mathbf{D}_{xx}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} \quad \mathbf{D}_{yx}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} \quad (4.67)$$

em que o valor de \tilde{a} , para a opção mais usual de $[a_1 \ a_2] = [0 \ +\infty]$, é $\tilde{a} = \sqrt{2/\pi} \sigma_x$ (Asmussen, 1997).

No caso da condição inicial de máximos locais e assumindo também que as amostras consideradas para estimar as funções RD são independentes entre si, a variância na estimativa das funções RD pode ser avaliada através de (Asmussen, 1997):

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 - \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_{xx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right) + \frac{k^E}{N} \left(\frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \quad (4.68)$$

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 - \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right) + \frac{k^E}{N} \left(\frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 \quad (4.69)$$

em que o valor de k^E é dado por:

$$k^E = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x^2 p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} - \left(\frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} \right)^2 \quad (4.70)$$

O valor expectável do número de pontos iniciais $N(a_1, a_2)$, para a condição inicial de máximos locais e para processos estocásticos gaussianos de banda estreita, pode ser estimado através de (Asmussen, 1997):

$$E[N(a_1, a_2)] = \Delta t (N_x - N_\tau) \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \left(e^{\left(-\frac{a_1^2}{2\sigma_x^2}\right)} - e^{\left(-\frac{a_2^2}{2\sigma_x^2}\right)} \right) \quad (4.71)$$

Condição inicial de pontos positivos:

Com esta condição, os pontos iniciais são seleccionados sempre que estejam entre dois limites a_1 e a_2 que deverão ter o mesmo sinal. É portanto uma condição inicial simples e versátil, podendo ser considerada como uma generalização da condição inicial de passagem por um nível (nesse caso os limites a_1 e a_2 são coincidentes). A condição inicial de pontos positivos pode ser expressa através de:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^P = \{a_1 \leq \mathbf{x}(t) < a_2\} \quad , 0 \leq a_1 < a_2 \quad (4.72)$$

A condição inicial de pontos positivos, pode também ser expressa como um caso particular da condição inicial generalizada:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^P = \{a_1 \leq \mathbf{x}(t) < a_2, -\infty \leq \dot{\mathbf{x}}(t) < +\infty\} \quad , 0 \leq a_1 < a_2 \quad (4.73)$$

Na figura 4.25, para uma série de exemplo, representam-se os pontos iniciais seleccionados através da aplicação da condição inicial de pontos positivos, considerando $[a_1 \ a_2] = [\sigma_x \ 3\sigma_x]$.

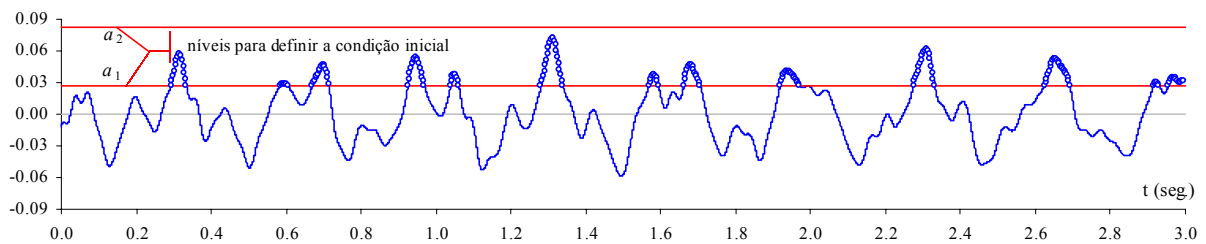


Figura 4.25 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de pontos positivos.

No caso da condição inicial de pontos positivos, as funções RD são também proporcionais às funções de correlação (para processos estocásticos estacionários gaussianos de média nula), verificando-se as relações seguintes:

$$\mathbf{D}_{xx}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} \quad \mathbf{D}_{yx}(\tau) = \frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{a} \quad (4.74)$$

em que o valor de \tilde{a} , para a opção de $[a_1 \ a_2] = [0 \ +\infty]$, é $\tilde{a} = \sqrt{2/\pi} \sigma_x$ (Asmussen, 1997).

Embora a escolha dos limites $[a_1 \ a_2] = [0 \ +\infty]$ seja a que maximiza o número de pontos iniciais, os limites $[a_1 \ a_2] = [\sigma_x \ +\infty]$ podem ser uma opção melhor, uma vez que os pontos com valores muito baixos (neste caso, abaixo de σ_x) não são considerados como pontos iniciais, o que pode ser preferível porque são valores que, em termos relativos, estão mais afectados pelo nível de ruído.

No caso da condição inicial de pontos positivos e assumindo também que as amostras consideradas para estimar as funções RD são independentes entre si, a variância na estimativa das funções RD pode ser avaliada através de (Asmussen, 1997):

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \right) + \frac{k^P}{N} \left(\frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 \quad (4.75)$$

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 \right) + \frac{k^P}{N} \left(\frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 \quad (4.76)$$

em que o valor de k^P é dado por:

$$k^P = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x^2 p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} - \left(\frac{\int_{a_1}^{a_2} x p_x(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx} \right)^2 \quad (4.77)$$

O valor expectável do número de pontos iniciais $N(a_1, a_2)$, para a condição inicial de pontos positivos, pode ser estimado através de (Asmussen, 1997):

$$E[N(a_1, a_2)] = \Delta t (N_x - N_\tau) \int_{a_1}^{a_2} p_x(x) dx \quad (4.78)$$

Condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva:

Com esta condição, os pontos iniciais são seleccionados sempre que um processo passe por zero com declive positivo; tal pode ser expresso através de:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^Z = \{ \mathbf{x}(t) = 0, \dot{\mathbf{x}}(t) \geq 0 \} \quad (4.79)$$

A condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva, pode também ser expressa como um caso particular da condição inicial generalizada:

$$\mathbf{T}_{x(t)}^Z = \{ 0 \leq \mathbf{x}(t) < 0 + \Delta a, 0 \leq \dot{\mathbf{x}}(t) < +\infty \}, \quad \Delta a \rightarrow 0 \quad (4.80)$$

Na figura 4.26, para uma série de exemplo, representam-se os pontos iniciais seleccionados através da aplicação da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva.

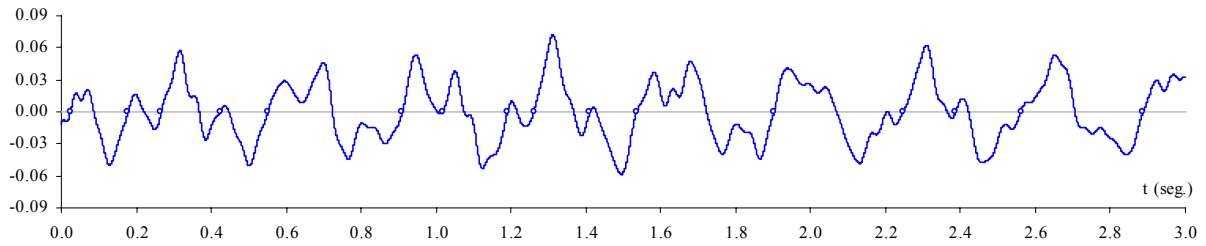


Figura 4.26 – Pontos iniciais definidos através da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva.

No caso da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva, as funções RD são proporcionais às primeiras derivadas em ordem ao tempo das funções de correlação (para processos estocásticos estacionários gaussianos de média nula), verificando-se as relações seguintes:

$$\mathbf{D}_{xx}(\tau) = -\frac{\dot{\mathbf{R}}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{b} \quad \mathbf{D}_{yx}(\tau) = -\frac{\dot{\mathbf{R}}_{yx}(\tau)}{\sigma_x^2} \tilde{b} \quad (4.81)$$

em que o valor de \tilde{b} é $\tilde{b} = \sqrt{2/\pi} \sigma_{\dot{x}}$ (Asmussen, 1997).

No caso da condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva e assumindo também que as amostras consideradas para estimar as funções RD são independentes entre si, a variância na estimativa das funções RD pode ser avaliada através de (Asmussen, 1997):

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{D}}_{xx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_x^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2} \right)^2 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_{xx}(\tau)}{\sigma_x \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right) \quad (4.82)$$

$$Var[\hat{\mathbf{D}}_{yx}(\tau)] \approx \frac{\sigma_y^2}{N} \left(1 - \left(\frac{\mathbf{R}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_x} \right)^2 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_{yx}(\tau)}{\sigma_y \sigma_{\dot{x}}} \right)^2 \right) \quad (4.83)$$

O valor expectável do número de pontos iniciais $N(0)$, para a condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva, pode ser estimado através de (Asmussen, 1997):

$$E[N(0)] = \Delta t (N_x - N_r) \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \quad (4.84)$$

Comentários adicionais ao método do decremento aleatório:

Na forma em que foram apresentadas as condições iniciais acima referidas, considerou-se sempre que a selecção dos pontos iniciais é efectuada nos valores positivos das séries analisadas. Todavia, essa selecção também pode ser realizada nos valores negativos das séries, e as correspondentes amostras devem ser igualmente consideradas (obviamente com sinal trocado) na avaliação das médias que são calculadas no método do decremento aleatório. Note-se que assim aumenta-se consideravelmente o número de amostras que entram para o cálculo das funções RD. Esta metodologia foi proposta por Houbolt (1975) para a condição inicial de passagem por zero com inclinação positiva e, posteriormente (Brincker *et al.*, 1991), a sua utilização foi alargada para os outros tipos de condições iniciais.

É também importante salientar que o facto das séries de resposta observadas serem discretas por amostragem, tem implicações nas estimativas das funções RD que na prática podem ser obtidas. Considerando, por exemplo, a condição inicial de passagem por um nível (4.60), se as realizações do processo $x(t)$ fossem conhecidas de forma contínua, não haveria qualquer dificuldade em aplicar essa condição inicial e definir as amostras a considerar para o cálculo das funções RD. No entanto, essas realizações são observadas sob a forma de séries discretas por amostragem, sendo assim difícil que, em geral, se verifique que $x(t_i) = a$.

Na figura 4.27 (Asmussen, 1997) ilustra-se o problema referido no parágrafo anterior, representando um sinal contínuo e os respectivos pontos em que o mesmo é discretizado. Nessa figura representa-se também o nível a correspondente a uma condição inicial de passagem por um nível. Como se pode verificar, há dois pontos em que o sinal cruza o nível a , no entanto, esses pontos não coincidem com nenhum dos pontos em que o sinal é amostrado. Colocam-se então três hipóteses (Asmussen, 1997) para a escolha dos pontos iniciais:

- considerar os pontos (e) que estão à esquerda daqueles em que o sinal passa pelo nível a ;
- considerar os pontos (d) que estão à direita daqueles em que o sinal passa pelo nível a ;

- considerar ambos os pontos (e) e (d) e calcular a média das correspondentes amostras.

Poder-se-á ainda considerar uma outra hipótese que corresponde a efectuar interpolações entre os pontos amostrados, com início no ponto em que o sinal cruza o nível a (determinado também por interpolação).

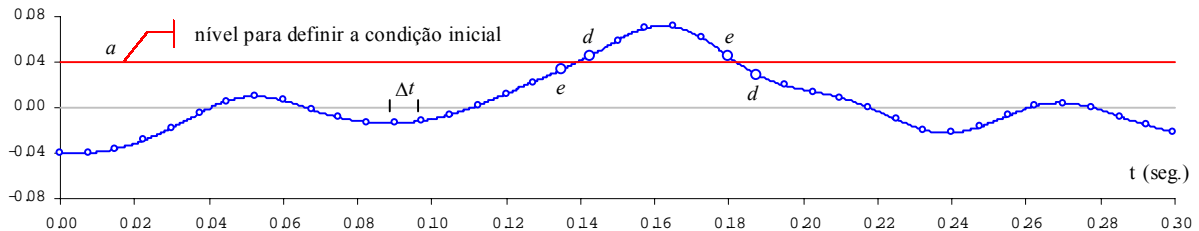


Figura 4.27 – Efeito da amostragem numa série na definição dos pontos iniciais.

Pode-se verificar (Asmussen; 1997) que, pelo facto das séries de resposta serem discretas no tempo, é introduzido um erro de viés nas estimativas das funções RD. Na 1ª hipótese acima referida, as estimativas das funções RD aparecem com um atraso (deslocadas para a direita); no caso da 2ª hipótese, essas estimativas surgem com um avanço no tempo (deslocadas para a esquerda); e, finalmente, no caso da 3ª hipótese, as estimativas das funções RD não têm alterações em termos do tempo mas surgem escaladas relativamente às verdadeiras funções RD. No que se refere à utilização das funções RD para efeitos de identificação modal, apenas no caso da 1ª hipótese (pontos (e)) é que podem surgir erros importantes na avaliação dos parâmetros modais; nas restantes hipóteses esses erros não são significativos (Asmussen; 1997). Note-se ainda que, como parece ser óbvio, a frequência de amostragem dos sinais influencia o referido erro de viés na estimativa das funções RD; quanto maior for a frequência de amostragem, menor é esse erro.

O método do decremento aleatório foi até agora apresentado como uma metodologia para avaliar as funções RD com vista à sua posterior utilização em métodos de identificação modal que adiante serão apresentados. Também já se indicou, na introdução deste trabalho, que um dos interesses das técnicas de avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil é a sua integração em sistemas de monitorização estrutural e a sua utilização para a quantificação e detecção de danos. As funções RD, para além de serem utilizadas para efeitos de identificação modal, podem por si só ser consideradas como elementos de base para efeitos de detecção de danos em estruturas, visto que elas mesmas já reflectem as características dos sistemas estruturais. Alguns dos primeiros trabalhos em que foi aplicado o método RD (Cole, 1973; Yang e Caldwell, 1975, 1978; Yang *et al.*, 1980; Yang *et al.*, 1984) foram efectuados precisamente com esse objectivo.

Refere-se ainda o método do decremento aleatório vectorial VRD (*vector random decrement*) proposto por Ibrahim *et al.* (1997) e utilizado também por Asmussen (1997) e Asmussen *et al.* (1997).

A diferença do método VRD relativamente ao método RD está na forma como são definidas as condições iniciais T . Enquanto que no método RD as condições iniciais são definidas considerando apenas uma das séries de resposta medidas, no método VRD as condições iniciais são definidas com mais do que uma dessas séries. As funções obtidas com o método VRD são assim uma combinação entre as auto funções RD e as funções RD cruzadas. Os argumentos apresentados para justificar o desenvolvimento do método VRD (Asmussen, 1997) relacionaram-se, sobretudo, com a maior incerteza (maior nível de ruído) na estimativa das funções RD cruzadas, relativamente às estimativas das auto funções RD.

Exemplo: Para aplicar o método do decremento aleatório, foram desenvolvidas subrotinas de cálculo, quer em *MatLab* quer em *LabView*, com possibilidade de utilização de qualquer uma das condições iniciais acima descritas. Considerando então as acelerações registadas no modelo de um edifício de 4 pisos, avaliaram-se as estimativas das funções de correlação da resposta, aplicando o método do decremento aleatório com a condição inicial de passagem por um nível (com um valor igual ao nível óptimo acima indicado). Para essa avaliação, as séries de resposta foram filtradas digitalmente com um filtro passa-baixo de tipo Butterworth de ordem 8 com frequência de corte a 25 Hz. O método do decremento aleatório foi aplicado com as séries ainda na frequência de 1000 Hz com que foram adquiridos e posteriormente procedeu-se à sua decimação para uma frequência de 62,5 Hz. Na figura 4.28 representam-se as funções de correlação assim obtidas.

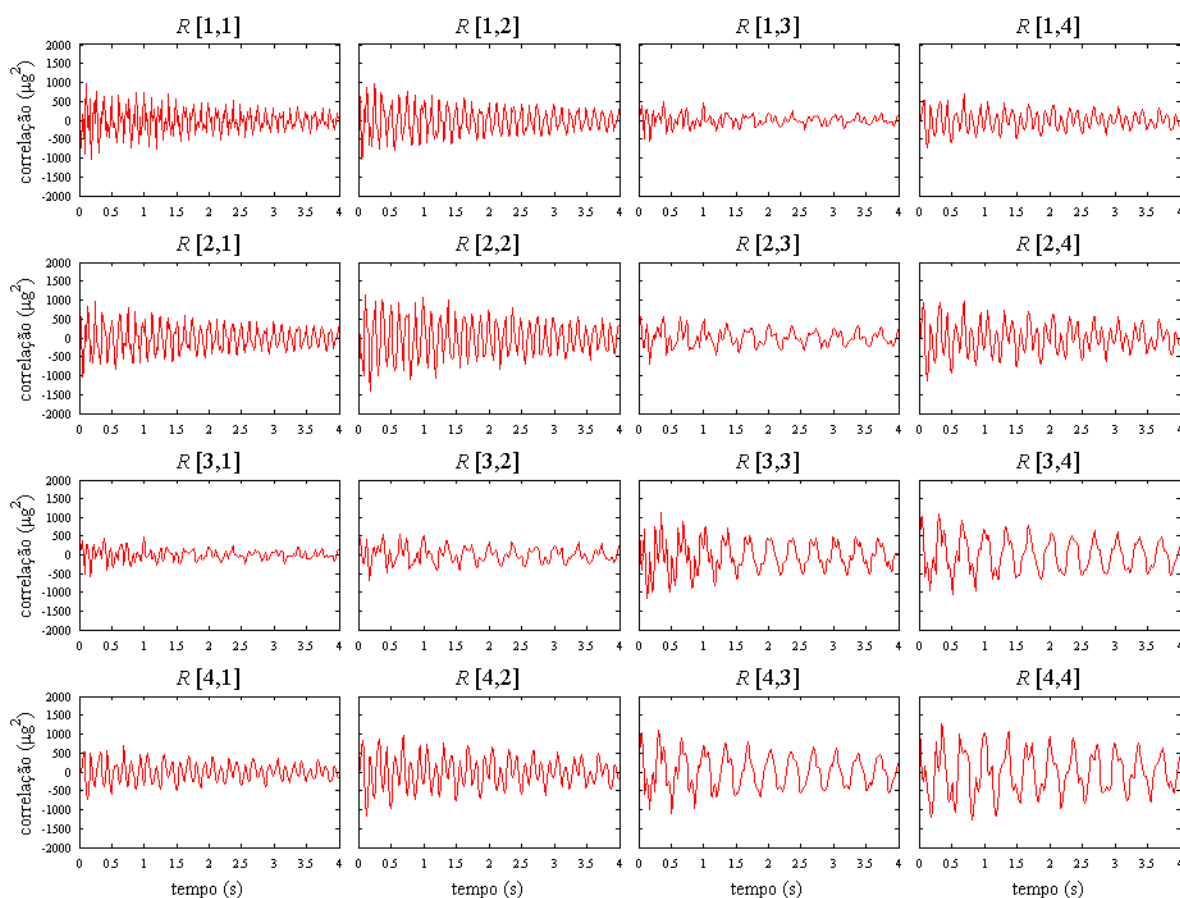


Figura 4.28 – Funções de correlação estimadas através do método do decremento aleatório.

Aplicação dos métodos no domínio da frequência a partir das funções RD:

A utilização do método do decremento aleatório tem sido normalmente associada à aplicação de métodos de identificação modal no domínio do tempo, que adiante serão apresentados, como por exemplo, o método de Ibrahim no domínio do tempo (Ibrahim e Mikulcik, 1977). É esse o motivo que levou a incluir o método RD na secção deste trabalho que é dedicada aos métodos no domínio do tempo. No entanto, conforme se salientou na introdução ao método do decremento aleatório, as funções RD representam as respostas em regime livre dos sistemas estruturais, podendo-se assim avaliar as suas funções de densidade espectral (utilizando o algoritmo da FFT) e aplicar qualquer um dos métodos de identificação modal no domínio da frequência anteriormente apresentados (BFD, FDD ou EFDD). Seguindo esta metodologia, pode-se tirar uma grande vantagem do processo de cálculo das funções RD, através de médias no domínio do tempo, em termos de redução do ruído nas séries de resposta. Podem-se assim obter auto-espectros e espectros cruzados com um nível de ruído muito mais baixo e que, consequentemente, traduzem de forma mais clara as características dinâmicas dos sistemas e permitem identificá-las mais facilmente e melhor.

Explora-se em seguida a ideia delineada no parágrafo anterior, aplicando-a ao exemplo que tem vindo a ser utilizado neste capítulo para ilustrar os diversos métodos de identificação modal apresentados neste trabalho. Todos os métodos de identificação modal no domínio da frequência, que serão aplicados em seguida, foram já anteriormente descritos, pelo que na exposição que se segue, é apenas feita uma apresentação dos resultados obtidos, sobre os quais se fazem alguns comentários. Note-se que, embora Asmussen (1997) apresente um espectro médio calculado a partir das funções RD, a ideia de aplicar os métodos no domínio da frequência a partir das funções RD não foi ainda muito explorada (tanto quanto é do conhecimento do autor deste trabalho).

Exemplo: Para aplicar os métodos no domínio da frequência a partir das funções RD, procedeu-se à avaliação dessas funções através do procedimento já utilizado anteriormente; houve no entanto que considerar amostras com uma duração suficiente para permitir que as funções RD decaiam praticamente até zero dentro do período de tempo dessas amostras. Consideraram-se assim amostras com uma duração de cerca de 33 segundos (2048 valores amostrados a 62,5 Hz).

Note-se que, considerando amostras com uma duração suficiente para que se verifique o decaimento completo das funções RD, consegue-se evitar os efeitos de escorregamento (*leakage*) ao avaliar as funções de densidade espectral dessas funções RD com o algoritmo da FFT. Nessa situação, não devem sequer ser utilizadas janelas de processamento de sinal antes de aplicar a FFT (quando muito poder-se-á utilizar uma janela de tipo exponencial).

Na figura 4.29 representam-se as funções RD obtidas; saliente-se que são idênticas às funções de correlação apresentadas na figura 4.28, com a excepção da diferença na duração e de que as funções RD da figura 4.29 não estão escaladas com os factores de proporcionalidade entre as funções RD e as funções de correlação.

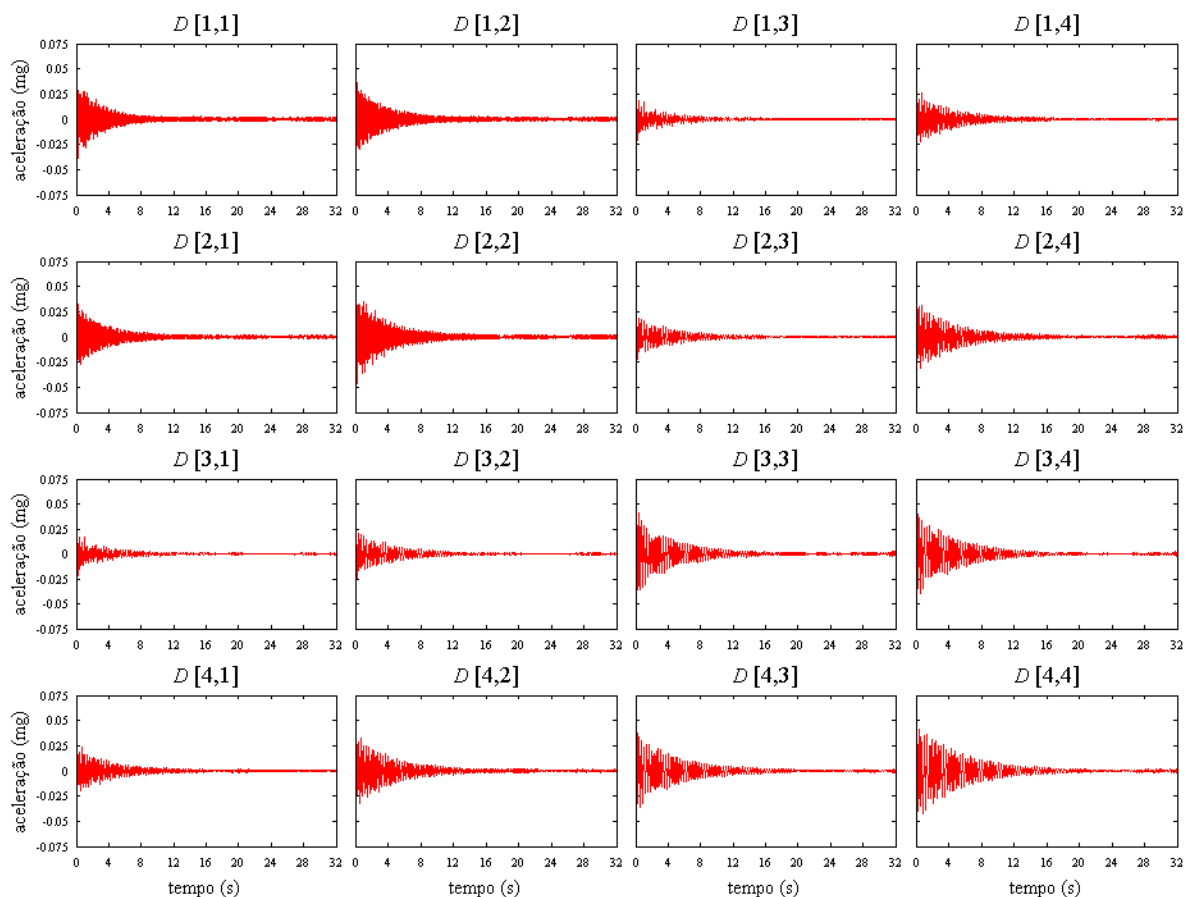


Figura 4.29 – Funções RD estimadas através do método do decremento aleatório.

Considerando as funções RD apresentadas na figura 4.29, determinaram-se inicialmente as funções de densidade espectral correspondentes a cada uma das suas linhas (ou das suas colunas), utilizando o algoritmo da FFT, e em seguida determinou-se a média dessas funções de densidade espectral. Obtiveram-se assim os auto-espectros e espectros cruzados que são apresentados na figura 4.30.

A partir das funções de densidade espectral apresentadas na figura 4.30 aplicaram-se os três métodos de identificação modal estocástica no domínio da frequência, anteriormente descritos (BFD, FDD e EFDD).

Para o método BFD determinou-se o espectro normalizado médio que é apresentado na figura 4.31 (a partir dos auto-espectros, ou seja, dos elementos da diagonal principal da matriz de funções de densidade espectral da figura 4.30). Como se pode verificar por comparação do espectro normalizado médio da figura 4.4 (obtido pela via usual) com o da figura 4.31, este último é mais suavizado, os picos de ressonância são um pouco mais nítidos e, sobretudo, os vales entre picos são muito mais suavizados. De facto, o espectro da figura 4.31 assemelha-se muito a um espectro analítico, especialmente na gama de frequências dos dois primeiros modos da estrutura. Há portanto um efeito de eliminação do ruído em resultado do cálculo de médias no domínio do tempo que é efectuado no método RD (note-se que para ambos os espectros o processamento incidiu sobre as mesmas séries de resposta da estrutura). Na figura 4.31 indicam-se também os valores das frequências dos picos de ressonância mais evidentes; essas frequências coincidem com as identificadas no espectro da figura 4.4, com excepção do valor relativo ao 4º modo de vibração que é de 18,13 Hz em vez de 18,16 Hz (note-se que $\Delta f = 0,031$ Hz).

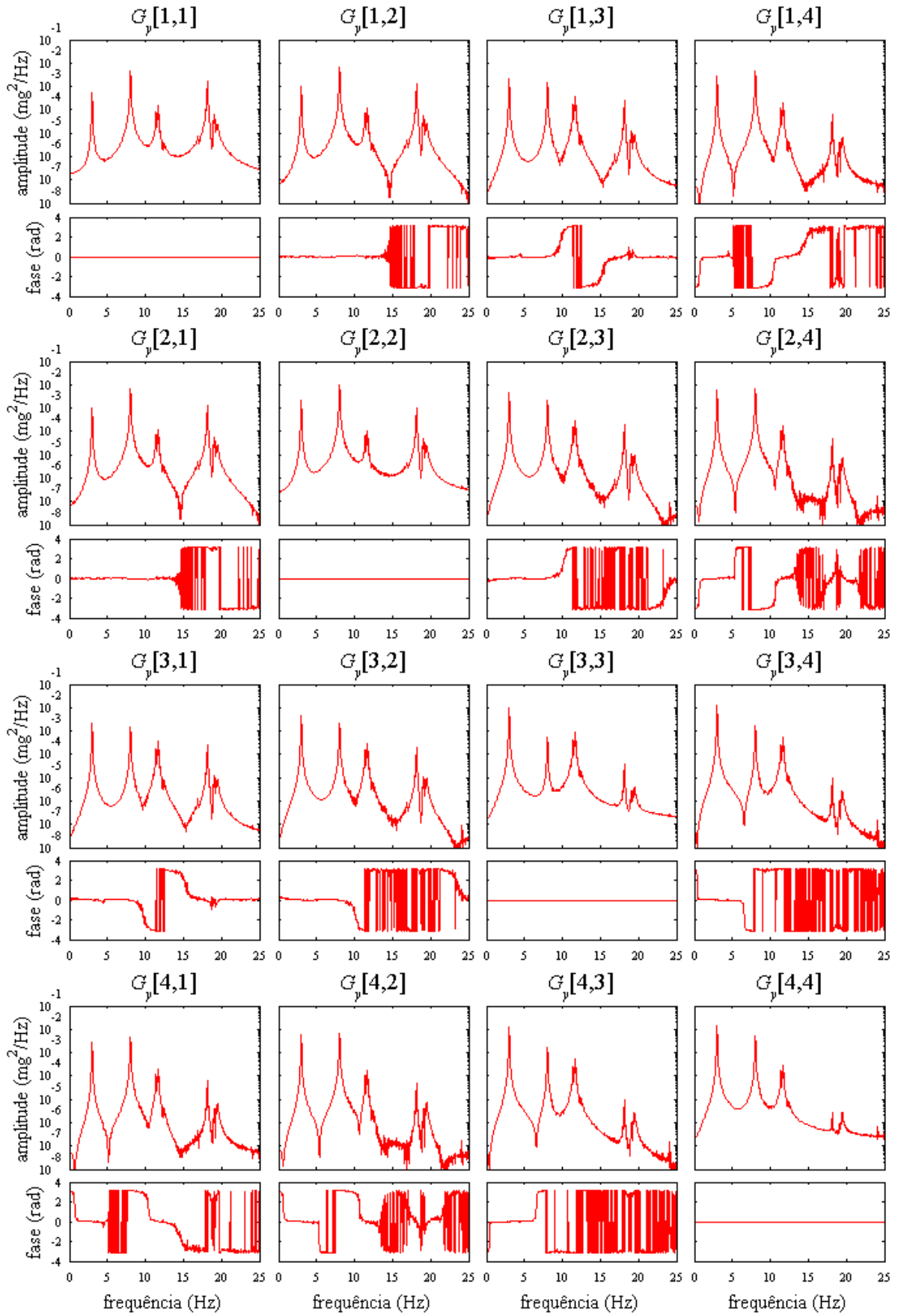


Figura 4.30 – Funções de densidade espectral médias das funções RD.

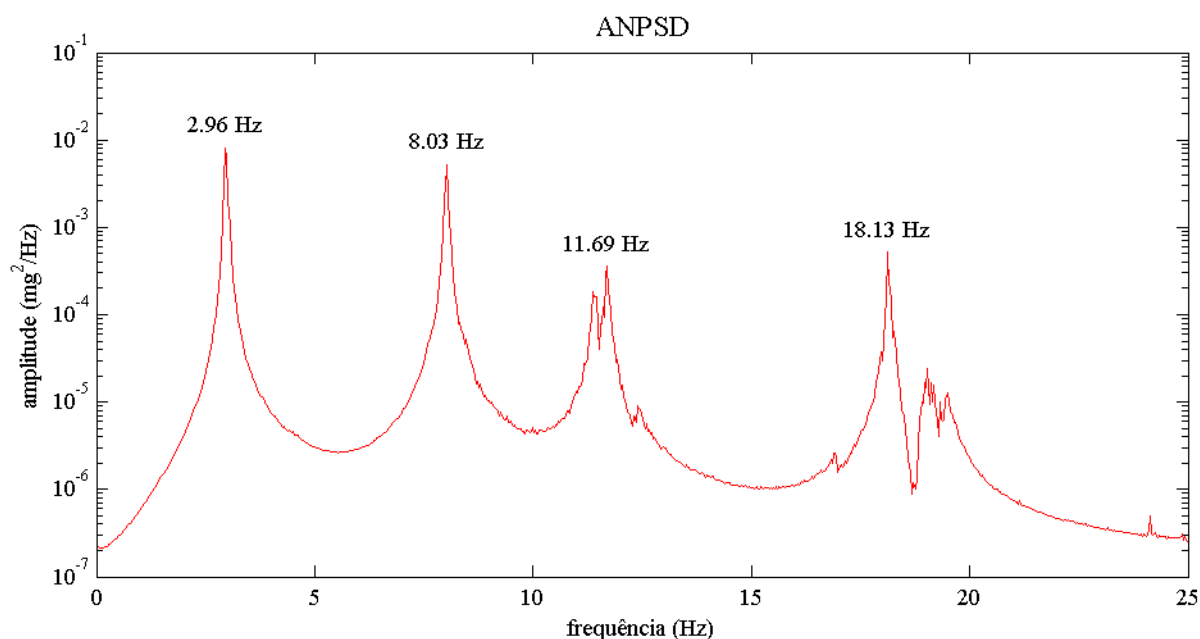


Figura 4.31 – Espectro normalizado médio das funções RD.

No quadro 4.7 indicam-se as frequências e as componentes modais (amplitude com o sinal da parte real) identificadas através da aplicação do método BFD às funções de densidade espectral calculadas a partir das funções RD. Designa-se assim este método por RD-BFD uma vez que se trata duma combinação dos métodos RD e BFD. Os valores dos coeficientes de amortecimento indicados no quadro 4.7 foram obtidos através da técnica, anteriormente apresentada, de ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto-espectros. As zonas dos picos de ressonância seleccionadas para efectuar o ajuste, coincidiram com as consideradas para obter os resultados apresentados anteriormente para o método BFD (ver figura 4.8 e quadro 4.3).

Os valores indicados no quadro 4.7 são bastante próximos dos identificados com o método BFD (ver quadro 4.2), havendo apenas uma pequena diferença na frequência do 4º modo de vibração (conforme já salientado) e também pequenas diferenças nos valores de algumas componentes modais e dos coeficientes de amortecimento.

Quadro 4.7 – Características dinâmicas identificadas com o método RD-BFD.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,96	8,03	11,69	18,13
ξ (%)	0,87	0,51	0,74	0,27
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,187	+0,662	-0,403	+1,000
2	+0,383	+1,000	-0,343	-0,756
3	+0,811	+0,230	+1,000	+0,152
4	+1,000	-0,709	-0,586	-0,037

Para aplicar o método FDD efectuou-se a decomposição em valores singulares da matriz de densidades espectrais apresentada na figura 4.30, tendo-se obtido os espectros de valores singulares que são apresentados na figura 4.32.

A figura 4.32 ilustra bem os aspectos específicos do método FDD, já que é possível verificar o efeito de decomposição da matriz de densidades espectrais nas contribuições dos diversos modos dum sistema. Na figura 4.32 verifica-se claramente que o espectro do 1º valor singular indica o modo que é dominante para a resposta em cada frequência, enquanto que os espectros dos restantes valores singulares mostram a contribuição dos restantes modos. Associando troços de cada um dos espectros de valores singulares é possível definir o espectro da resposta em cada modo (o que na figura 4.32 é facilmente visualizável). Note-se que estes aspectos são bastante mais claros nos espectros de valores singulares da figura 4.32 do que nos apresentados na figura 4.9, o que reflecte também o efeito de redução do ruído que foi conseguido com o método do decremento aleatório.

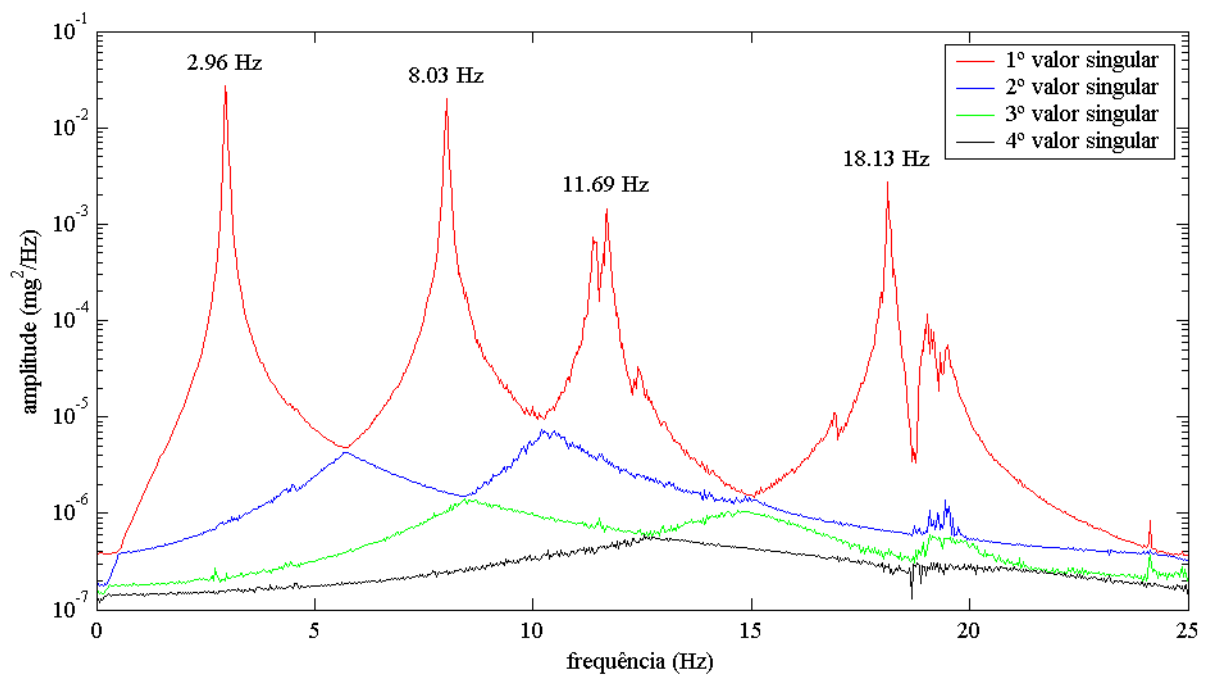


Figura 4.32 – Espectros de valores singulares das funções de densidade espectral das funções RD.

No quadro 4.8 indicam-se as frequências e as componentes modais (amplitude com o sinal da parte real) identificadas com o método FDD aplicado às funções de densidade espectral das funções RD. Esta técnica é designada por método RD-FDD uma vez que combina os métodos RD e FDD. No quadro 4.8 não se indicam valores para os coeficientes de amortecimento, porque no método FDD não há um procedimento específico para os estimar (os valores indicados no quadro 4.7 poderiam também ser associados ao método FDD).

Quadro 4.8 – Características dinâmicas identificadas com o método RD-FDD.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,96	8,03	11,69	18,13
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,187	+0,662	-0,404	+1,000
2	+0,383	+1,000	-0,344	-0,756
3	+0,811	+0,230	+1,000	+0,152
4	+1,000	-0,709	-0,586	-0,037

Os valores indicados no quadro 4.8 são bastante próximos dos identificados com o método FDD (ver quadro 4.4), havendo apenas uma pequena diferença na frequência do 4º modo de vibração e também pequenas diferenças nos valores de algumas componentes modais.

As frequências identificadas com o método RD-FDD são exactamente as mesmas que foram identificadas com o método RD-BFD. Quanto às componentes modais, há apenas diferenças muito pequenas em duas das componentes do 3º modo de vibração.

Aplicou-se também o método EFDD às funções de densidade espectral calculadas a partir das funções RD. A selecção dos valores singulares, para definir as funções de densidade espectral correspondentes a cada modo de vibração do sistema, foi efectuada de forma idêntica à considerada anteriormente (ver figura 4.12). Note-se no entanto que com os espectros de valores singulares obtidos a partir das funções RD (ver figura 4.32) teria sido possível definir de forma mais completa as funções de densidade espectral correspondentes a cada modo. No quadro 4.9 apresentam-se os valores das frequências, coeficientes de amortecimento e das componentes modais (amplitude com o sinal da parte real), identificados com este método que se designa por RD-EFDD uma vez que corresponde a uma combinação dos métodos RD e EFDD.

Quadro 4.9 – Características dinâmicas identificadas com o método RD-EFDD.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,98	8,03	11,69	18,17
ξ (%)	0,83	0,56	0,60	0,30
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,187	+0,662	-0,402	+1,000
2	+0,383	+1,000	-0,339	-0,755
3	+0,811	+0,230	+1,000	+0,153
4	+1,000	-0,709	-0,592	-0,038

Como se pode verificar pelos valores indicados no quadro 4.9, os resultados obtidos com o método RD-EFDD são bastante próximos dos identificados com os métodos RD-BFD ou RD-FDD.

Os resultados obtidos no exemplo apresentado mostram que, com vista à aplicação dos métodos de identificação modal estocástica no domínio da frequência (BFD, FDD e EFDD), pode ser bastante mais vantajoso efectuar a avaliação das funções de densidade espectral das funções de decremento aleatório, do que estimar as funções de densidade espectral das séries de resposta pelo método mais usual descrito em 4.2.1. O processo de cálculo de médias de amostras utilizado no método RD, tem um efeito de anular o ruído existente nessas amostras, resultando em funções RD cujas funções de densidade espectral evidenciam mais as características dinâmicas dos sistemas estruturais permitindo identificá-las mais facilmente e melhor.

4.3.2.4 Comparação entre as funções de correlação estimadas por diversos métodos

Foram apresentados três métodos diferentes para estimar as funções de correlação da resposta de um sistema estrutural: o método directo; o método baseado na utilização da FFT; e o método do

decremento aleatório. Por simples observação das funções de correlação obtidas, ver figuras 4.19, 4.21 e 4.28, pode-se verificar que os três métodos conduziram a resultados muito próximos.

A comparação entre as funções de correlação da resposta dum sistema, estimadas pelos diversos métodos utilizados, pode também ser efectuada de uma maneira mais objectiva, por intermédio de um coeficiente, designado por *SIC shape invariance criteria* (Asmussen, 1997), que é definido de forma semelhante ao coeficiente MAC normalmente utilizado para comparar vectores de componentes modais, conforme se apresentará no capítulo 5. O coeficiente SIC que compara a função de correlação \mathbf{R}^{m1} estimada com um método $m1$ com a função de correlação \mathbf{R}^{m2} estimada com um método $m2$ é definido através de:

$$SIC^{m1-m2} = \frac{\left| \left(\mathbf{R}^{m1} \right)^T \mathbf{R}^{m2} \right|^2}{\left(\left(\mathbf{R}^{m1} \right)^T \mathbf{R}^{m1} \right) \left(\left(\mathbf{R}^{m2} \right)^T \mathbf{R}^{m2} \right)} \quad (4.85)$$

Valores do coeficiente SIC próximos de 1 mostram que as funções de correlação que estão a ser comparadas, são muito próximas, enquanto que valores próximos de 0 mostram que são completamente distintas.

Exemplo: Considerando as funções de correlação estimadas com os três métodos utilizados (ver figuras 4.19, 4.21 e 4.28) avaliaram-se os coeficientes SIC comparando essas funções entre si. Obtiveram-se assim as matrizes de coeficientes SIC que se apresentam em seguida:

método directo - método baseado na FFT

$$SIC = \begin{bmatrix} 1,000 & 0,997 & 0,990 & 0,996 \\ 0,997 & 1,000 & 0,984 & 0,996 \\ 0,990 & 0,984 & 1,000 & 1,000 \\ 0,996 & 0,996 & 1,000 & 1,000 \end{bmatrix}$$

método directo - método RD

$$SIC = \begin{bmatrix} 0,999 & 0,996 & 0,986 & 0,994 \\ 0,996 & 0,999 & 0,985 & 0,995 \\ 0,987 & 0,981 & 0,998 & 0,999 \\ 0,995 & 0,995 & 0,998 & 0,998 \end{bmatrix}$$

método baseado na FFT - método RD

$$SIC = \begin{bmatrix} 0,999 & 0,999 & 0,997 & 0,999 \\ 0,999 & 0,999 & 0,999 & 0,999 \\ 0,996 & 0,997 & 0,998 & 0,999 \\ 0,998 & 0,998 & 0,998 & 0,998 \end{bmatrix}$$

Como se pode verificar pelos valores obtidos para os coeficientes SIC, os três métodos descritos para estimar as funções de correlação da resposta de um sistema, conduziram a resultados muito próximos.

4.3.3 Métodos de ajuste às funções de correlação da resposta

Nesta secção deste trabalho, apresentam-se os métodos de identificação modal estocástica com base no ajuste dum modelo às funções de correlação da resposta observada experimentalmente. Conforme se referiu anteriormente, são métodos paramétricos de duas fases, em que a primeira fase consiste na estimativa das funções de correlação da resposta, e a segunda fase corresponde à aplicação dum método de identificação, com o qual estimam-se os parâmetros (matrizes da representação de

estado dum sistema estocástico no tempo discreto) dum modelo através do seu ajuste às funções de correlação da resposta.

As técnicas para estimar as funções de correlação foram apresentadas anteriormente, pelo que descrevem-se agora os métodos de identificação modal a partir dessas funções. Estes métodos podem ser formulados com base no facto das funções de correlação poderem ser expressas como uma soma de sinusóides com decaimento exponencial (cada uma correspondendo a um modo do sistema), ou seja, na factorização das funções de correlação, já apresentada no capítulo 2, que pode ser traduzida através de:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \quad (i > 0) \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_i = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}_d^{i-1} \mathbf{G}_m \quad (i > 0) \quad (4.86)$$

É também possível formular os métodos de identificação modal baseados na análise das funções de correlação, utilizando a metodologia já referida, de imposição da condição do erro de predição do modelo ajustado não ser correlacionado com a resposta observada. Peeters (2000) utiliza esta via para apresentar a formulação do método das variáveis instrumentais (IV) que resulta no ajuste dum modelo auto-regressivo (AR) às funções de correlação da resposta dum sistema.

Um aspecto interessante da identificação modal estocástica, por ajuste de modelos às funções de correlação da resposta, é a possibilidade de se utilizarem métodos que originalmente foram desenvolvidos para a identificação modal clássica a partir das funções de resposta impulsiva. Conforme referido no capítulo 2, tal deve-se ao facto das funções de correlação e das funções de resposta impulsiva poderem ser decompostas de forma semelhante em termos dos parâmetros modais dum sistema.

Um dos primeiros métodos de identificação no domínio do tempo foi o método CE (*complex exponential*) desenvolvido por Spitznogle e Quazi (1970) no âmbito da análise de sinais de sonar, mas mais tarde, em 1974 na Universidade de *Cincinnati*, adaptado para a identificação modal de sistemas mecânicos a partir das funções de resposta impulsiva (Allemang, 1999). O método CE é aplicável a sistemas de vários graus de liberdade (MDOF), mas trata-se de um método SISO (*single input single output*) uma vez que, de cada vez, apenas é analisada uma única função de resposta impulsiva.

A extensão do método CE à situação SIMO (*single input multiple output*) deu origem ao método LSCE (*least squares complex exponential*) desenvolvido na Universidade de *Cincinnati* (Brown *et. al.*, 1979) e também na Universidade Católica de *Leuven*. O método PTD (*polyreference time domain*), também designado por PRCE (*polyreference complex exponential*), desenvolvido por Vold *et al.* (1982), corresponde, por sua vez, à extensão do método LSCE à situação MIMO (*multiple input multiple output*).

Ainda antes do método LSCE, foi proposto o método ITD, método de Ibrahim no domínio do tempo (Ibrahim e Mikulcik, 1977), que foi inicialmente desenvolvido para a análise da resposta de sistemas em regime livre, numa situação SIMO, tendo sido posteriormente proposta (Fukuzono, 1986) uma versão MIMO desse mesmo método, situação em que o método pode ser designado por MRITD (*multiple reference Ibrahim time domain*).

Juang e Pappa (1985) propuseram o método ERA (*eigensystem realization algorithm*) baseado na teoria de realização de sistemas, para a identificação modal a partir das funções de resposta impulsiva. O método ERA é do tipo MIMO verificando-se também que é coincidente com uma das variantes do método de identificação estocástica em subespaços com base nas funções de correlação (SSI-COV).

Têm também sido efectuados alguns esforços no sentido de apresentar numa forma unificada os métodos de identificação modal acima referidos. É o caso do método DSPI (*direct system parameter identification*) proposto por Leuridan (1984), do método UMPA (*unified matrix polynomial approach*) desenvolvido na Universidade de Cincinnati (Allemang, 1999) e, mais recentemente, de trabalhos desenvolvidos por Zhang *et al.* (2002) e Zhang (2003).

Sob um ponto de vista da aplicação dos métodos de identificação modal estocástica, por ajuste de modelos às funções de correlação da resposta dos sistemas, são também de referir os trabalhos de James *et al.* (1995), onde é apresentada a já referida técnica que é designada por NEXT, Farrar e James (1997), Hermans e Van der Auweraer (1999) e Peeters (2000).

Na apresentação que se faz em seguida, serão focados os métodos ITD e MRITD, LSCE e PTD, e finalmente três variantes do método SSI-COV (uma delas coincidente com o método ERA). A descrição que será feita da formulação dos diversos métodos não segue bem a forma original com que os mesmos foram propostos, tendo-se optado antes por seguir uma formulação unificada, bastante próxima da apresentada por Zhang (2003), o que se considera ser vantajoso sob um ponto de vista de compreensão das semelhanças que existem entre os diversos métodos que serão apresentados.

A aplicação de todos os métodos que serão descritos em seguida será exemplificada considerando os dados obtidos no modelo de um edifício de 4 pisos, que tem vindo a ser utilizado neste capítulo para ilustrar os métodos de identificação modal estocástica. Para tal, utilizar-se-ão as funções de correlação correspondentes às funções RD, estimadas através do método do decremento aleatório e que estão representadas na figura 4.29.

4.3.3.1 Métodos ITD e MRITD

Descrevem-se e exemplificam-se em seguida os métodos ITD, método de Ibrahim no domínio do tempo, e MRITD (*multiple reference Ibrahim time domain*). A formulação dos dois métodos é idêntica, havendo apenas a diferença de no primeiro caso (ITD) considerar-se somente uma das linhas ou colunas das matrizes de correlação (método SIMO), enquanto que no segundo caso (MRITD) consideram-se mais do que uma das linhas ou colunas das matrizes de correlação (método MIMO), podendo-se considerar até essas matrizes completas.

Considerando então as expressões (4.86) correspondentes à factorização das funções de correlação da resposta dum sistema, é imediato verificar as relações seguintes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}_d^0 \mathbf{G}_m \\ \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}_d^1 \mathbf{G}_m \\ \vdots \\ \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}_d^p \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{p+1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}_d^1 \\ \vdots \\ \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}_d^p \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{V}}} \mathbf{G}_m \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{G}_m \quad (4.87)$$

Note-se que em (4.87), cada matriz \mathbf{R}_i tem n_e linhas e uma ou mais do que uma colunas (com o limite de n_e colunas) consoante se esteja a considerar o método ITD ou o método MRITD. Assumindo que o sistema tem N pares de pólos complexos e que $n_e p = 2N$, a matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ tem uma característica de $n_e p$. Uma vez que a matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ ($n_e(1+p) \times n_e p$) tem mais n_e linhas do que colunas, tem que existir uma matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ ($n_e \times n_e(1+p)$) não nula (Zhang, 2003) que satisfaz a relação:

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{V}} = 0 \quad (4.88)$$

Combinando as expressões (4.87) e (4.88) pode-se obter a expressão seguinte:

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{R}} = 0 \quad (4.89)$$

Subdividindo a matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ em $1+p$ blocos de \mathbf{A}_i matrizes ($n_e \times n_e$), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_{p+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{p+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.90)$$

A equação (4.90) traduz as funções de correlação através dum modelo auto-regressivo (AR); tal facto, torna-se mais claro normalizando-a para $\mathbf{A}_{p+1} = \mathbf{I}$, obtém-se assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_p \end{bmatrix} = -\mathbf{R}_{p+1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_p \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{p+1} \quad (4.91)$$

Para determinar os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i ($n_e \times n_e$) do modelo AR (4.91), pode-se escrever um sistema de equações sobre-determinadas, em que esses coeficientes multiplicam uma matriz de Hankel \mathbf{H}_0 das funções de correlação, obtida por $q-1$ sucessivos avanços no tempo da matriz $\tilde{\mathbf{R}}$. Esse sistema de equações é assim:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_p \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_q \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \dots & \mathbf{R}_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_p & \mathbf{R}_{p+1} & \dots & \mathbf{R}_{p+q-1} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } \mathbf{H}_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{p+1} & \mathbf{R}_{p+2} & \dots & \mathbf{R}_{p+q} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Desde que o número de colunas da matriz \mathbf{H}_0 seja superior ao seu número de linhas, os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i podem ser estimados a partir do sistema de equações (4.92) considerando uma solução de mínimos quadrados. Uma vez conhecidos os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i , pode-se relacioná-los com os parâmetros modais do sistema, contidos nas matrizes \mathbf{V} e $\mathbf{\Lambda}_d$, tendo em conta a expressão (4.88), ou seja:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{V}} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d \\ \vdots \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d^{p-1} \end{bmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d^p \quad (4.93)$$

A expressão (4.93) pode ser escrita na forma de um problema de valores e vectores próprios. Para tal, os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i são escritos numa matriz de estado na forma companheira de baixo, correspondente à representação de estado dum sistema na forma canónica da observabilidade (Ribeiro, 2002). Obtém-se assim:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_3 & \dots & -\mathbf{A}_p \end{bmatrix}}_{\text{matriz de estado na forma companheira de baixo } \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d^{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}_d^{p-1} \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_d \quad (4.94)$$

Na equação (4.94) verifica-se que, dos valores próprios e vectores próprios à direita da matriz A , podem-se retirar os parâmetros modais que se pretendem identificar. A matriz V , correspondente às componentes modais (segundo os graus de liberdade observados) dos modos de vibração do sistema, pode ser extraída das primeiras n_e linhas da matriz dos vectores próprios à direita da matriz A . Por seu lado, da matriz Λ_d , ou seja dos valores próprios (μ_i) da matriz A , podem-se determinar as frequências (ω_i) e os coeficientes de amortecimento (ξ_i) dos modos de vibração do correspondente sistema no tempo contínuo, considerando para tal as relações (ver capítulo 2):

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \rightarrow \begin{cases} \omega_i = |\lambda_i| \quad (rad/s) \rightarrow f_i = \frac{|\lambda_i|}{2\pi} \quad (Hz) \\ \xi_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \times 100 \quad (\%) \end{cases} \quad (4.95)$$

De acordo com a metodologia que tem vindo a ser seguida, a questão da identificação modal a partir das funções de correlação da resposta dum sistema, coloca-se portanto na avaliação da matriz A de cujos valores próprios e vectores próprios à direita determinam-se as características modais dum sistema. Conforme se referiu, a equação (4.92) está já numa forma que permite determinar os coeficientes matriciais A_i , a partir dos quais se poderia formar a matriz A e consequentemente resolver o problema de identificação modal. No entanto, essa forma não é ainda a que é adoptada nos métodos ITD e MRITD. Para chegar à forma adoptada nesses métodos, é necessário efectuar na equação (4.92) uma transformação idêntica à que se efectuou para passar da equação (4.93) para a equação (4.94), obtendo-se então:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 & \cdots & -A_p \end{bmatrix}}_{\text{matriz de estado na forma companheira de baixo } A} \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & \cdots & R_q \\ R_2 & R_3 & R_4 & \cdots & R_{q+1} \\ R_3 & R_4 & R_5 & \cdots & R_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p & R_{p+1} & R_{p+2} & \cdots & R_{p+q-1} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } H_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_2 & R_3 & R_4 & \cdots & R_{q+1} \\ R_3 & R_4 & R_5 & \cdots & R_{q+2} \\ R_4 & R_5 & R_6 & \cdots & R_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p+1} & R_{p+2} & R_{p+3} & \cdots & R_{p+q} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } H_1} \quad (4.96)$$

Note-se que as colunas da matriz H_1 estão adiantadas no tempo de um intervalo Δt relativamente às colunas da matriz H_0 . A equação para determinar a matriz A pode assim ser escrita numa forma mais concisa:

$$A H_0 = H_1 \quad (4.97)$$

Há diversas técnicas para calcular a pseudo-inversa de H_0 , ou técnicas de mínimos quadrados, que podem ser utilizadas para resolver (4.97) de modo a determinar a matriz A , nomeadamente:

- Através das chamadas *equações normais*, podendo-se neste caso utilizar uma das duas 1^{as} expressões indicadas em seguida (o que corresponde a uma solução simples de mínimos quadrados), ou, o que é preferível, uma 3^a expressão correspondente à média das duas 1^{as} (o que corresponde a uma solução dupla de mínimos quadrados):

$$A H_0 = H_1 \Leftrightarrow A H_0 H_0^T = H_1 H_0^T \Leftrightarrow A = (H_1 H_0^T)(H_0 H_0^T)^{-1} \quad (4.98)$$

$$A H_0 = H_1 \Leftrightarrow A H_0 H_1^T = H_1 H_1^T \Leftrightarrow A = (H_1 H_1^T)(H_0 H_1^T)^{-1} \quad (4.99)$$

$$A = \frac{1}{2} \left[(H_1 H_0^T)(H_0 H_0^T)^{-1} + (H_1 H_1^T)(H_0 H_1^T)^{-1} \right] \quad (4.100)$$

Em muitas situações esta técnica de utilização das equações normais não é muito estável devido ao condicionamento das matrizes de Hankel, pelo que torna-se preferível utilizar uma das duas técnicas indicadas em seguida.

- Através da *decomposição ortogonal* (ou QR) da matriz H_0 de modo a possibilitar e facilitar a sua inversão. Neste caso é utilizado o algoritmo de decomposição QR para decompor a matriz H_0 no produto duma matriz triangular superior R_H por uma matriz ortogonal Q_H . Como a matriz H_0 tem um número de colunas superior ao número de linhas, há diversas colunas de R_H que são nulas, pelo que de facto só se torna necessário considerar as submatrizes R_{H0} e Q_{H0} conforme se indica em seguida:

$$H_0 = R_H Q_H = [R_{H0} \ 0] \begin{bmatrix} Q_{H0} \\ Q_{H1} \end{bmatrix} = R_{H0} Q_{H0} \quad (4.101)$$

$$A H_0 = H_1 \Leftrightarrow A R_{H0} Q_{H0} = H_1 \Leftrightarrow A R_{H0} = H_1 Q_{H0}^T \Leftrightarrow A = H_1 Q_{H0}^T R_{H0}^{-1} \quad (4.102)$$

Em *MatLab* as matrizes R_{H0} e Q_{H0} podem ser calculadas através da função *qr*. Em *MatLab* a equação (4.97) pode também ser resolvida utilizando as funções / ou *mrdivide*, que de facto utilizam o algoritmo de decomposição QR para calcular a pseudo-inversa duma matriz.

- Através da *decomposição em valores singulares* da matriz H_0 , o que é também uma forma de possibilitar e facilitar a sua inversão. Neste caso, utiliza-se o algoritmo de decomposição em valores singulares para decompor a matriz H_0 em duas matrizes ortogonais U_H e V_H , que contêm os vectores singulares, respectivamente, à esquerda e à direita, e uma matriz diagonal Σ_H que contém os valores singulares. Os valores singulares da matriz H_0 que sejam muito pequenos podem ser desprezados, considerando-se apenas os s primeiros valores singulares e as correspondentes matrizes U_{Hs} , V_{Hs} e Σ_{Hs} conforme se indica em seguida:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{U}_H \boldsymbol{\Sigma}_H \mathbf{V}_H^T = \mathbf{U}_{Hs} \boldsymbol{\Sigma}_{Hs} \mathbf{V}_{Hs}^T \quad (4.103)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{U}_{Hs} \boldsymbol{\Sigma}_{Hs} \mathbf{V}_{Hs}^T = \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_{Hs} \boldsymbol{\Sigma}_{Hs}^{-1} \mathbf{U}_{Hs}^T \quad (4.104)$$

Em *MatLab* a função *pinv* utiliza precisamente esta técnica para determinar a pseudo-inversa duma matriz.

Uma vez determinada a matriz \mathbf{A} , o problema de identificação modal através dos métodos ITD e MRITD encontra-se praticamente resolvido, visto que, conforme se verificou, dos valores próprios e vectores próprios à direita da matriz \mathbf{A} podem-se extrair as frequências, coeficientes de amortecimento e componentes modais observadas dos modos de vibração dum sistema (isto é, podem-se determinar as matrizes $\boldsymbol{\Lambda}_d$ e \mathbf{V}). No entanto, coloca-se ainda uma questão que é fundamental e é comum a todos os métodos de identificação paramétrica. Essa questão prende-se com a determinação da ordem do modelo (ou seja, a ordem da matriz \mathbf{A}) que é ajustado aos dados experimentais (que no caso dos métodos ITD e MRITD são as funções de correlação da resposta dum sistema).

A ordem do modelo deve ser definida tendo em conta o número de pólos do sistema que se espera que estejam abrangidos pelos dados que se estão a analisar. Se na gama de frequências abrangida pelos dados experimentais (a qual depende das características dos equipamentos utilizados, da frequência de amostragem e de eventuais operações de filtragem a que os dados tenham sido sujeitos) se estiver à espera que o sistema em análise tenha n modos de vibração, o número de pólos a considerar deve ser de pelo menos $2n$ (cada modo corresponde a um par de pólos complexos conjugados). É óbvio que à priori não se sabe qual o número de modos abrangidos pelos dados experimentais (esse será um dos resultados da análise de identificação modal) pelo que é necessário ter formas de resolver esta questão da definição da ordem do modelo a identificar.

Uma primeira ajuda para resolver a questão acima referida, pode basear-se na análise das funções de densidade espectral estimadas por uma técnica não paramétrica, nomeadamente nos espectros ANPSD considerados no método BFD, ou nos espectros de valores singulares considerados nos métodos FDD e EFDD. O número de picos de ressonância identificados nesses espectros pode dar uma primeira ideia sobre o número de modos dum sistema.

Pela via indicada no parágrafo anterior, obtém-se apenas uma estimativa mínima do número de pólos dum sistema (Allemang, 1999), pois, conforme se tem salientado, há a questão da resolução discreta em frequência das estimativas não paramétricas das funções de densidade espectral, que pode ser pouco fina para que se possam distinguir bem todos os picos de ressonância correspondentes aos modos de vibração dum sistema. Para além disso, há ainda que ter em conta que os dados experimentais nunca estão livres de ruído e que a representação numérica desses dados tem uma

precisão finita. Verifica-se assim que, em geral, para obter um bom ajuste dum modelo paramétrico aos dados experimentais é necessário considerar um número de pólos superior ao número de modos de vibração que são abrangidos por esses dados. Alguns desses pólos não têm portanto um significado físico, não estando associados às características dinâmicas dum sistema estrutural, no entanto são necessários para o ajuste do modelo paramétrico aos dados experimentais (esses pólos são por vezes designados por pólos de ruído, numéricos ou computacionais).

No caso da identificação modal estocástica também é necessário ter em conta um aspecto que foi salientado no início deste capítulo e que consiste no facto da resposta dos sistemas traduzir não só os modos das estruturas em si, mas também as características das acções ambiente. Assim, nos modelos paramétricos ajustados às respostas experimentais é necessário incluir também pólos que modelam as características das acções ambiente e não propriamente as características dinâmicas dos sistemas estruturais. Note-se que, normalmente, é possível distinguir os pólos correspondentes aos modos de vibração dos sistemas estruturais, que em geral são sub-amortecidos, tendo coeficientes de amortecimento com valores pequenos, dos pólos correspondentes às acções ambiente, que em geral têm características de processos de banda larga, podendo ser modelados por pólos com amortecimento crítico ou super-crítico (Andersen, 1997).

Para a definição da ordem dos modelos paramétricos existem também alguns procedimentos mais formais, com os quais estimam-se modelos de diferentes ordens e comparam-se esses modelos tendo por base critérios de qualidade, tais como: o critério informativo de Akaike (AIC); o erro de predição final (FPE) de Akaike; ou o comprimento descritivo mínimo (MDL) de Rissanen (Andersen, 1997; Ljung, 1999; Peeters, 2000). Qualquer um destes critérios, que no fundo são medidas do erro dos modelos paramétricos, mostram que para modelos de ordem crescente esse erro vai decrescendo até que para uma determinada ordem a variação torna-se praticamente assintótica, não havendo ganhos significativos, em termos de redução do erro, com o aumento da ordem dos modelos. A ordem para a qual se verifica o início dessa variação assintótica do erro é a que deve ser escolhida para o modelo a identificar.

Um indicador semelhante aos critérios referidos no parágrafo anterior, mas talvez mais simples de avaliar, é a característica da matriz de estado dos modelos paramétricos, estimada com base nos dados experimentais. A característica dessa matriz pode ser avaliada através do algoritmo de decomposição em valores singulares. Aos modos dum sistema correspondem valores singulares significativos, verificando-se que a partir duma determinada ordem da matriz de estado, os valores singulares mais baixos tendem para zero. Este facto pode ser pois considerado como critério para definir a ordem dum modelo. A melhor forma de o fazer não é através dos valores absolutos dos

valores singulares, mas sim através dos seus valores relativos para ordens crescentes da matriz de estado, podendo-se para tal optar por duas vias (Allemang, 1999):

- Cada valor singular é dividido pelo primeiro valor singular (o mais elevado) obtendo-se assim valores singulares normalizados que podem ser analisados de forma semelhante à descrita para os critérios de erro referidos anteriormente.
- Cada valor singular é dividido pelo valor singular anterior, obtendo-se assim um coeficiente normalizado que é próximo de 1 se os valores singulares sucessivos são semelhantes, ou que é próximo de 0, apresentando uma queda súbita, quando há um valor singular que é muito mais pequeno do que o imediatamente anterior. Essa queda súbita do coeficiente normalizado é assim um sinal de que a partir da correspondente ordem já não é importante considerar modelos com ordens mais elevadas.

Embora seja possível utilizar os critérios de erro acima referidos, como métodos para ajudar na escolha da ordem do modelo paramétrico a identificar, na prática verifica-se que nem sempre a sua utilização é muito fácil. É preciso também ter em conta que na *identificação modal* o que se pretende é estimar as características modais dum sistema e não propriamente o modelo paramétrico desse sistema, expresso através das matrizes da sua representação de estado. Essas matrizes interessam apenas na medida em que através delas podem-se estimar as características modais das estruturas. Assim, para a análise de identificação modal com modelos paramétricos há uma outra ferramenta de maior utilidade prática do que as referidas anteriormente, que é o *diagrama de estabilização* (Heylen *et al.*, 1995; Allemang, 1999).

Um diagrama de estabilização é um gráfico que ajuda a escolher a ordem dum modelo paramétrico, que se considera que permite obter um bom ajuste aos dados experimentais, e que, de entre os pólos desse modelo, ajuda a seleccionar aqueles que correspondem a modos naturais de vibração dum sistema, permitindo distingui-los daqueles que são pólos de ruído, numéricos ou computacionais, ou que são resultantes das características das acções ambiente e não do sistema em si.

Num diagrama de estabilização marcam-se em abcissas as frequências dos pólos dum sistema e em ordenadas a ordem da matriz de estado desse sistema (ou ordem do modelo). Os pólos de um modelo de determinada ordem são comparados com os pólos de um modelo de ordem imediatamente inferior. No caso das diferenças entre esses pólos, em termos de frequência, coeficiente de amortecimento e componentes modais, não excederem determinados limites pré-definidos, o pólo é considerado como estável, sendo instável em caso contrário. Definindo um determinado código de símbolos para a representação gráfica dos pólos, e traçando esses símbolos nas respectivas frequências para diversas ordens crescentes da matriz de estado, obtém-se um diagrama de estabilização que mostra uma série de símbolos de pólos estáveis alinhados ao longo de linhas verticais, nas frequências

dos modos de vibração dum sistema, enquanto que surgem símbolos de pólos instáveis dispersos em frequências diversas, consoante a ordem do modelo.

Num diagrama de estabilização, verifica-se que os modos que estão bem representados nos dados experimentais (e portanto na matriz de estado que deles se estima) estabilizam logo para modelos de ordem baixa. Por outro lado, os modos pouco excitados (ou seja, com pouco peso nos dados experimentais) só estabilizam para ordens mais elevadas. Portanto, normalmente é necessário considerar modelos de ordem elevada, para que seja possível identificar modos pouco excitados que estão pouco evidentes nas respostas medidas experimentalmente. Num diagrama de estabilização verifica-se ainda que os pólos de ruído ou computacionais, não chegam sequer a estabilizar, podendo ser excluídos como pólos correspondentes a modos naturais de vibração dum sistema estrutural.

Ao construir um diagrama de estabilização pode-se também, desde logo, excluir alguns pólos que não satisfazem determinadas condições, como por exemplo, pólos que não surjam como pares de valores complexos conjugados, ou pólos que tenham um coeficiente de amortecimento muito elevado. Esses pólos podem, simplesmente, não ser representados no diagrama de estabilização, ou, optando-se por representá-los, deve-se utilizar um símbolo que permita distingui-los claramente dos outros pólos.

A construção dum diagrama de estabilização implica percorrer diversos modelos de ordem crescente, com o correspondente cálculo dos respectivos pólos e a sua comparação com os pólos do modelo de ordem imediatamente mais baixa. Assim, nessa construção deve-se evitar a repetição de cálculos que são comuns para os modelos das diversas ordens (Peeters, 2000). Por exemplo, no caso dos métodos ITD e MRITD, devem-se formar desde logo as matrizes de Hankel \mathbf{H}_0 e \mathbf{H}_1 com uma dimensão p correspondente à ordem máxima até à qual se pretende construir o diagrama de estabilização. Em seguida estima-se a matriz \mathbf{A} , para as sucessivas ordens crescentes, considerando submatrizes de \mathbf{H}_0 e \mathbf{H}_1 .

Num diagrama de estabilização é também comum representar um espectro médio (ANPSD) ou os espectros de valores singulares, o que contribui também para facilitar a análise da estabilização dos pólos dos modelos de diferentes ordens. Note-se no entanto que esses espectros não estão relacionados com o método de identificação em si, são apenas um auxiliar da análise do diagrama de estabilização.

Analizando um diagrama de estabilização, pode-se portanto escolher mais facilmente a ordem adequada do modelo que permite obter um bom ajuste aos dados experimentais. Uma forma final de verificar esse ajuste consiste em comparar as funções de correlação e as funções de densidade espectral do modelo (calculadas com base nas matrizes identificadas) com essas mesmas funções consideradas como dados do método de identificação ou estimadas por métodos não paramétricos. Se

através dessa comparação se concluir que o ajuste ainda não é bom, pode-se optar por escolher um modelo de ordem diferente (em princípio mais elevada).

Para calcular as funções de correlação do modelo identificado, basta utilizar as expressões (4.86). Quanto às funções de densidade espectral, podem ser calculadas através das seguintes expressões (já apresentadas no capítulo 2):

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{C} \left(e^{j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{R}_0 + \mathbf{G}^T \left(e^{-j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \right)^{-1} \mathbf{C}^T \quad (4.105)$$

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{V} \left(e^{j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_d \right)^{-1} \mathbf{G}_m + \mathbf{R}_0 + \mathbf{G}_m^T \left(e^{-j\omega\Delta t} \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_d \right)^{-1} \mathbf{V}^T \quad (4.106)$$

Saliente-se que a maioria dos aspectos agora referidos para os métodos ITD e MRITD, relativos à escolha da ordem do modelo a considerar, são comuns a todos os métodos paramétricos de identificação modal estocástica, quer aos métodos de ajuste às funções de correlação da resposta, quer aos métodos de ajuste às séries de resposta.

Relativamente aos métodos ITD e MRITD, falta apenas referir um aspecto que se torna necessário quando se pretende calcular as funções de correlação ou as funções de densidade espectral do modelo identificado. Esse aspecto é a avaliação da matriz \mathbf{G}_m (matriz de participação modal estocástica). Para determinar esta matriz é necessário voltar à equação (4.87), tendo em conta que após se ter identificado a matriz \mathbf{A} , a matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ é conhecida assim como a matriz $\tilde{\mathbf{R}}$ que contém as funções de correlação. Pode-se assim estimar \mathbf{G}_m através duma solução de mínimos quadrados, conforme se indica em seguida (em que $\tilde{\mathbf{V}}^\dagger$ é a pseudo-inversa de $\tilde{\mathbf{V}}$; em *MatLab* a pseudo-inversa pode ser calculada através da função *pinv* ou, neste caso, podem-se utilizar também as funções `\` ou *mldivide*):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{p+1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{R}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}_d \\ \vdots \\ \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}_d^p \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{V}}} \mathbf{G}_m \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{G}_m \Leftrightarrow \mathbf{G}_m = \tilde{\mathbf{V}}^\dagger \tilde{\mathbf{R}} \quad (4.107)$$

Exemplo – método ITD: Para exemplificar o método ITD vão-se considerar as funções de correlação estimadas com o método RD, a partir dos registos obtidos no modelo de um edifício de 4 pisos. Essas funções de correlação têm uma duração de cerca de 33 segundos, correspondente a 2048 valores amostrados a 62,5 Hz.

Como o método ITD é um método SIMO e como neste caso dispõe-se da matriz de funções de correlação completa, optou-se por aplicar o método ITD separadamente a cada uma das colunas (ou linhas) dessa matriz e considerar, em cada caso, os resultados relativos ao modo que tem como ponto de maior amplitude, o ponto que serve de referência para a coluna da matriz que está ser considerada (ou seja, as funções da coluna n da matriz são utilizadas para identificar as características do modo de vibração que tem a sua maior amplitude no ponto n).

Note-se que, da aplicação do método ITD às funções de cada uma das colunas da matriz de funções de correlação, obtêm-se resultados relativos a todos os modos de vibração do sistema, no entanto, no caso do ponto que serve de referência para a coluna da matriz em análise, ser próximo de um nodo de um dos modos de vibração, os resultados relativos a esse modo são menos fiáveis.

Para aplicar o método ITD foram desenvolvidos alguns programas em *MatLab* com os quais obtiveram-se os resultados que se apresentam em seguida. Assim, na figura 4.33 apresentam-se os diagramas de estabilização obtidos para cada uma das situações em que se consideraram as funções de cada coluna da matriz de funções de correlação (matriz **R**). Nesses diagramas são utilizados vários símbolos para representar os pólos dos sistemas, cujo significado é indicado no quadro 4.10 (nos resultados que adiante serão apresentados para outros métodos paramétricos de identificação modal estocástica, utilizar-se-ão também esses símbolos).

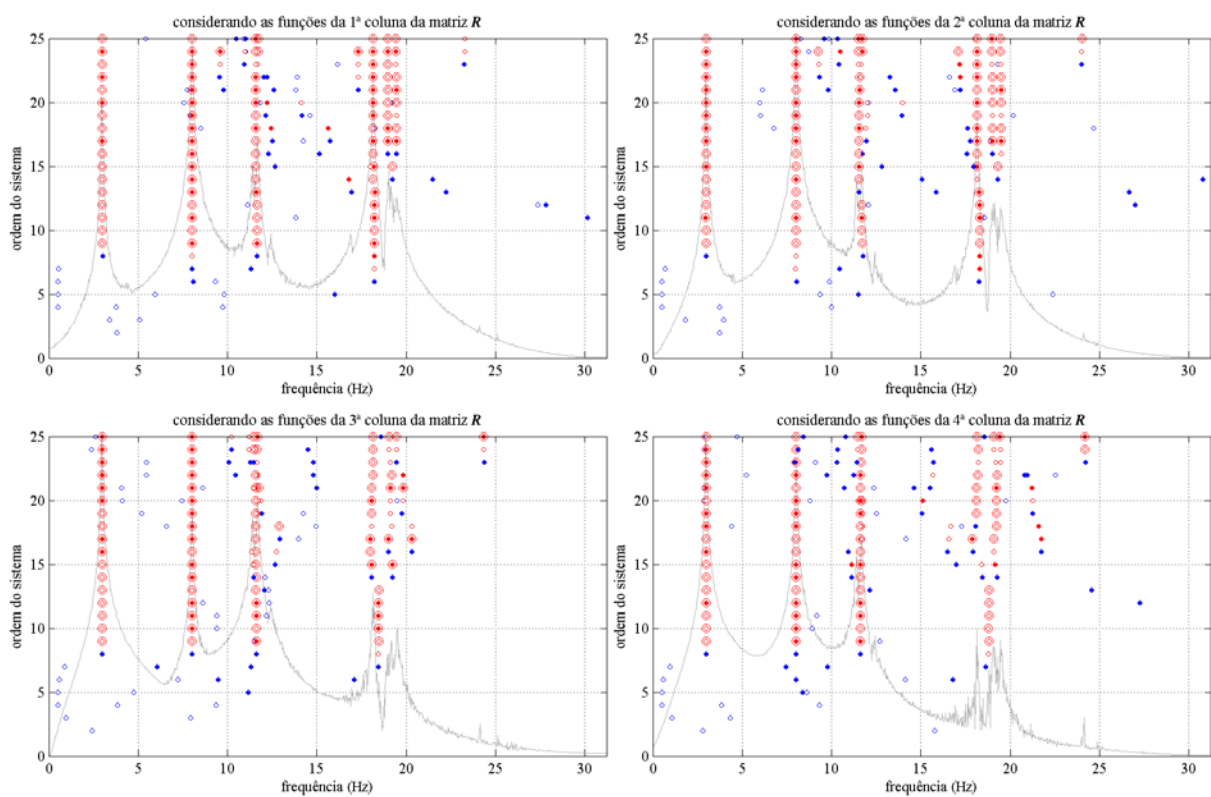


Figura 4.33 – Diagramas de estabilização resultantes da aplicação do método ITD.

Quadro 4.10 – Significado dos símbolos utilizados nos diagramas de estabilização.

	pólos como pares de valores complexos conjugados	$0 < \xi < 20\%$	pólo estável em f Δf relativo $\leq 1\%$	pólo estável em ξ $\Delta \xi$ relativo $\leq 5\%$	pólo estável em configuração MAC $\geq 0,999$
\circ	-	-	-	-	-
\bullet	sim	-	-	-	-
\circ	sim	sim	sim	-	-
\bullet	sim	sim	sim	sim	-
\odot	sim	sim	sim	-	sim
\odot	sim	sim	sim	sim	sim

Como se pode verificar na figura 4.33, nos diagramas de estabilização traçaram-se também os espectros médios estimados com utilização da FFT (método não paramétrico). Conforme se salientou anteriormente, esses espectros não são utilizados directamente no método ITD, mas são um elemento auxiliar para a análise dos diagramas de estabilização. O facto de existirem pólos estáveis coincidentes com os picos desses espectros, reforça a dedução de que os mesmos correspondem a modos naturais de vibração dum sistema.

No quadro 4.10, indicaram-se os símbolos e os critérios adoptados na construção dos diagramas de estabilização. Os critérios indicados nesse quadro são os que normalmente são analisados, embora, em relação aos limites indicados se possa optar por outros valores. Esses critérios de estabilização incluíram assim a análise de diversos aspectos, nomeadamente: o facto de que para os modos naturais de vibração dum sistema, os pólos surgem como pares de valores complexos conjugados; o facto dos coeficientes de amortecimento terem normalmente valores pequenos (e positivos); a estabilização em termos de frequência; a estabilização em termos do coeficiente de amortecimento; a estabilização em termos das componentes modais, verificada através do coeficiente MAC cuja definição será apresentada no capítulo 5.

Analisando os diagramas de estabilização apresentados na figura 4.33, são facilmente detectáveis 4 linhas de pólos que quase sempre satisfazem os diversos critérios de estabilização. Esses pólos correspondem aos 4 modos de vibração na direcção longitudinal, que se pretendem identificar neste exemplo. Note-se ainda que, principalmente nos dois primeiros diagramas, surgem também outros pólos estáveis que devem resultar dos modos de torção do modelo que, conforme já salientado na apresentação dos métodos de identificação no domínio da frequência, surgem também nos registos longitudinais devido ao facto do modelo se encontrar danificado. É também interessante verificar que os pólos relativos ao 4º modo de vibração, são dificilmente identificados nos 3º e 4º diagramas da figura 4.33, correspondentes à aplicação do método ITD às 3ª e 4ª colunas da matriz \mathbf{R} . Tal deve-se ao facto dos 3º e 4º graus de liberdade serem praticamente nodos desse 4º modo e portanto as funções de correlação que têm esses graus de liberdade como referências, têm pouca informação relativamente a esse modo.

Como resultados finais obtidos com o método ITD optou-se por escolher os provenientes do ajuste à: 1ª coluna de \mathbf{R} para o 4º modo (modelo de ordem 22); 2ª coluna de \mathbf{R} para o 2º modo (modelo de ordem 22); 3ª coluna de \mathbf{R} para o 3º modo (modelo de ordem 25); 4ª coluna de \mathbf{R} para o 1º modo (modelo de ordem 22). No quadro 4.11 resumem-se as características dinâmicas assim identificadas com o método ITD.

Quadro 4.11 – Características dinâmicas identificadas com o método ITD.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,97	8,02	11,67	18,16
ξ (%)	0,77	0,50	0,74	0,38
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,187	+0,662	-0,408	+1,000
2	+0,383	+1,000	-0,351	-0,751
3	+0,811	+0,229	+1,000	+0,149
4	+1,000	-0,708	-0,586	-0,034

Na figura 4.34 apresentam-se as funções de auto-correlação calculadas a partir das matrizes identificadas com o método ITD, comparando-as com as correspondentes funções estimadas com o método RD, as quais foram parte dos próprios dados do método de identificação. Na figura 4.35 faz-se uma comparação idêntica mas com os espectros médios. Como se pode verificar, há um ajuste muito bom entre os modelos identificados e os dados experimentais, quer em termos das funções de correlação, quer no que se refere aos espectros médios.

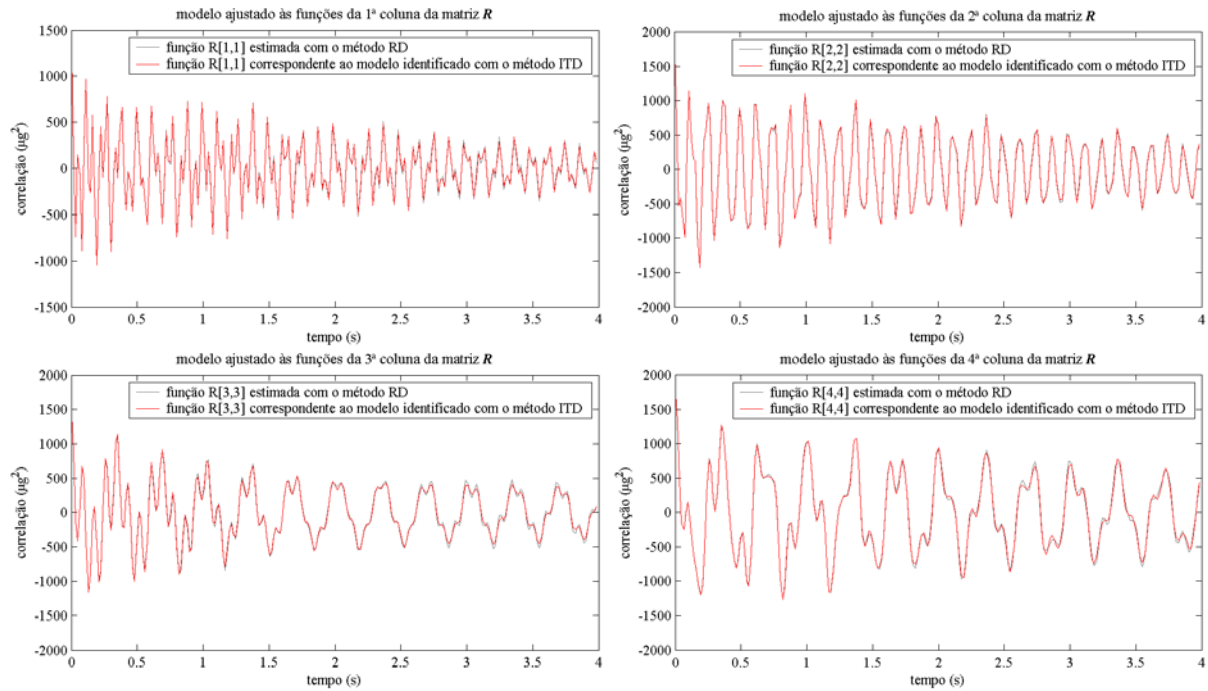


Figura 4.34 – Funções de correlação experimentais e calculadas com o modelo identificado com o método ITD.

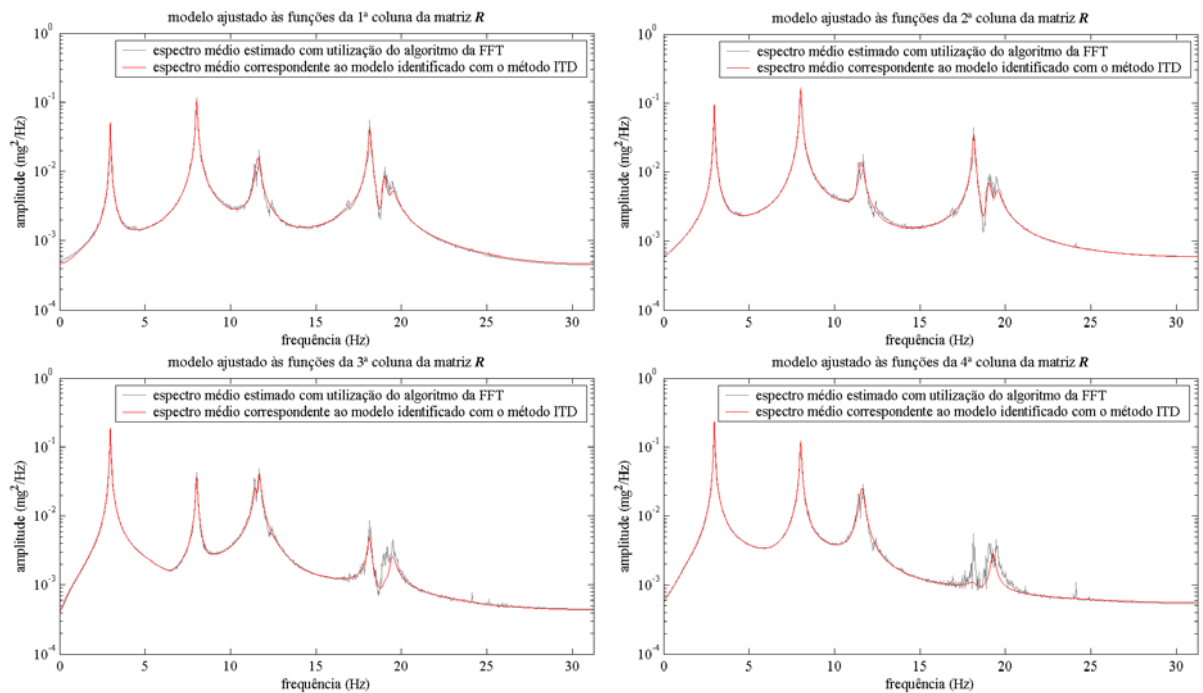


Figura 4.35 – Espectros médios experimentais e calculados com o modelo identificado com o método ITD.

De forma idêntica à utilizada anteriormente para representar as componentes modais identificadas com outros métodos de identificação, apresentam-se nas figuras 4.36 e 4.37 duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método ITD.

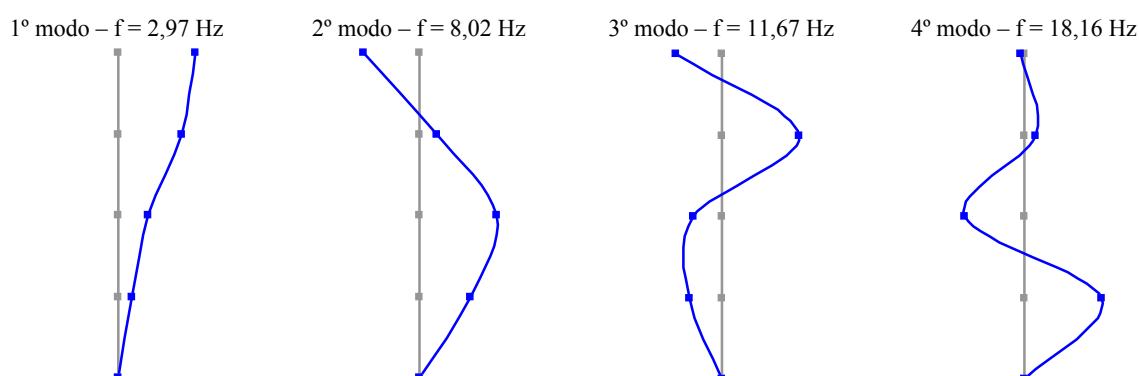


Figura 4.36 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método ITD.

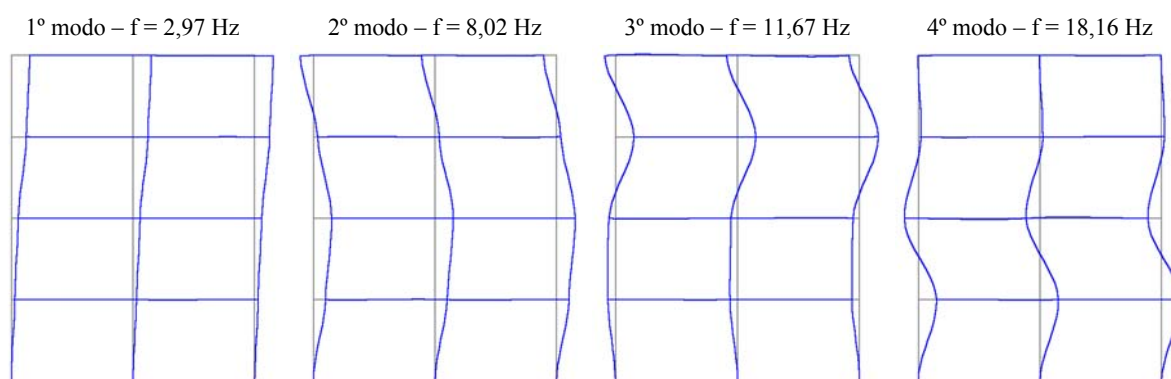


Figura 4.37 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método ITD.

Sob o ponto de vista da aplicação prática do método ITD na identificação modal de estruturas de engenharia civil, referem-se os trabalhos efectuados nas pontes ferroviárias de Canelas, Cacia, Esgueira e Sacavém (LNEC – Rodrigues, 2001). Destes trabalhos, os referentes às pontes de Canelas e Sacavém serão apresentados no capítulo 6. No caso das três primeiras pontes, o método ITD foi utilizado, fundamentalmente, para estimar os coeficientes de amortecimento e também as frequências dos primeiros modos naturais de vibração do tabuleiro das pontes, enquanto que no caso da ponte de Sacavém foi também efectuada a identificação das componentes modais. Nesses trabalhos, como dados do método ITD, foram consideradas as séries obtidas por média das respostas em regime livre registadas imediatamente após a passagem dos comboios. Portanto, o método ITD foi aplicado a respostas em regime livre, o que é em tudo equivalente à forma aqui apresentada para os métodos ITD e MRITD, baseados na análise das funções de correlação da resposta dum sistema.

Exemplo – método MRITD: Exemplifica-se agora a aplicação do método MRITD, procurando-se também ilustrar mais alguns aspectos dos métodos paramétricos de identificação modal estocástica.

O método MRITD é um método MIMO o que o torna vantajoso relativamente ao método ITD (SIMO), pois no processo de identificação (ajuste dum modelo) pode-se considerar numa única vez, mais do que uma coluna (ou linha) da matriz de funções de correlação (ou mesmo a matriz completa conforme se utilizará neste exemplo). Para o exemplo de base que se apresenta em seguida, serão utilizadas as funções de correlação com uma duração de cerca de 33 segundos (2048 valores amostrados a 62,5 Hz) embora adiante se faça também uma análise do efeito de se considerarem durações menores das funções de correlação.

Para aplicar o método MRITD foram também desenvolvidos programas em *MatLab* que são muito semelhantes aos elaborados para o método ITD, tendo-se apenas o cuidado de considerar todas as colunas da matriz de funções de correlação na montagem das matrizes de Hankel.

Na figura 4.38 apresenta-se o diagrama de estabilização correspondente à aplicação do método MRITD.

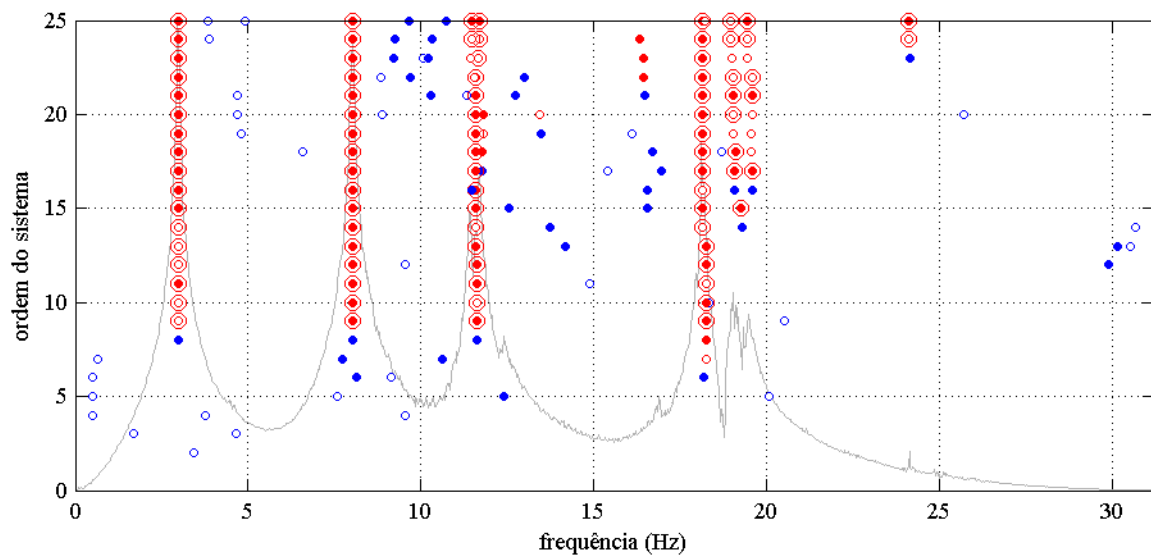


Figura 4.38 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método MRITD.

Analisando o diagrama de estabilização apresentado na figura 4.38, são bem evidentes as 4 linhas de pólos correspondentes aos 4 modos de vibração do modelo na direcção longitudinal, tendo-se optado por escolher um modelo de ordem 25 para a identificação das características desses modos de vibração. No quadro 4.12 resumem-se essas características.

Quadro 4.12 – Características dinâmicas identificadas com o método MRITD.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,97	8,02	11,69	18,16
ξ (%)	0,78	0,50	0,90	0,38
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,187	+0,662	-0,404	+1,000
2	+0,383	+1,000	-0,333	-0,751
3	+0,811	+0,229	+1,000	+0,149
4	+1,000	-0,708	-0,582	-0,034

Na figura 4.39 apresenta-se uma função de auto-correlação calculada a partir das matrizes identificadas com o método MRITD, comparando-a com a correspondente função estimada com o método RD, a qual foi parte dos próprios dados do método de identificação. Na figura 4.40 faz-se uma comparação idêntica com os espectros médios e na figura 4.41 com dois espectros cruzados, mostrando-se o ajuste tanto em amplitude como em fase.

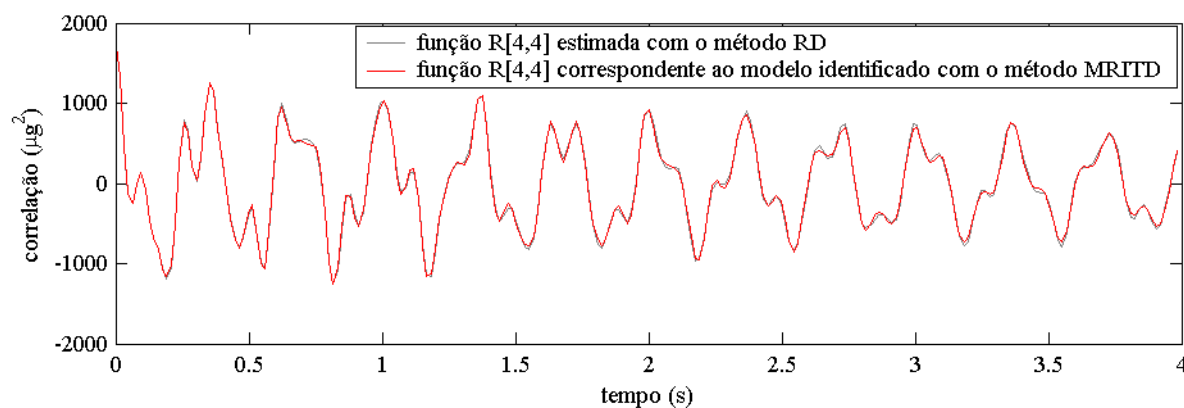


Figura 4.39 – Função de correlação experimental e calculada com o modelo identificado com o método MRITD.

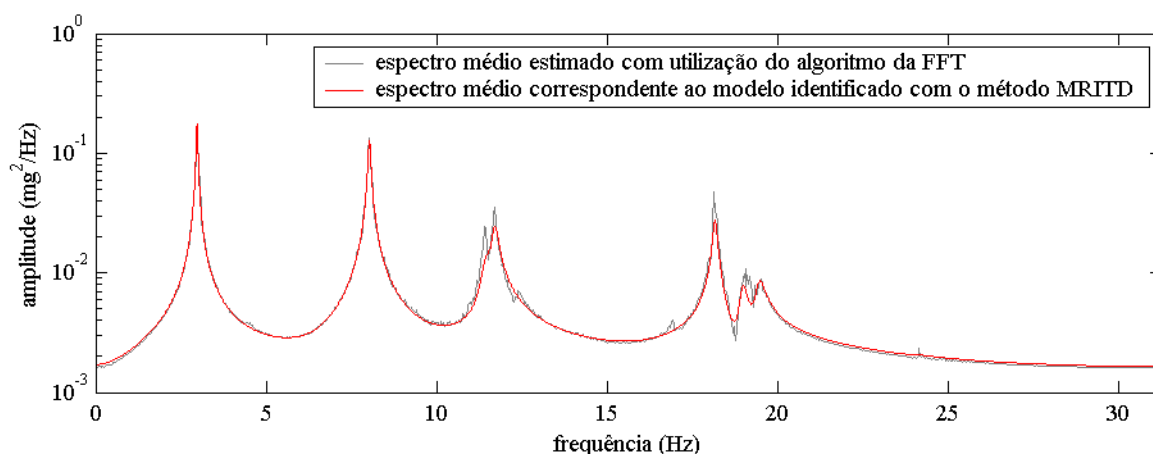


Figura 4.40 – Espectro médio experimental e calculado com o modelo identificado com o método MRITD.

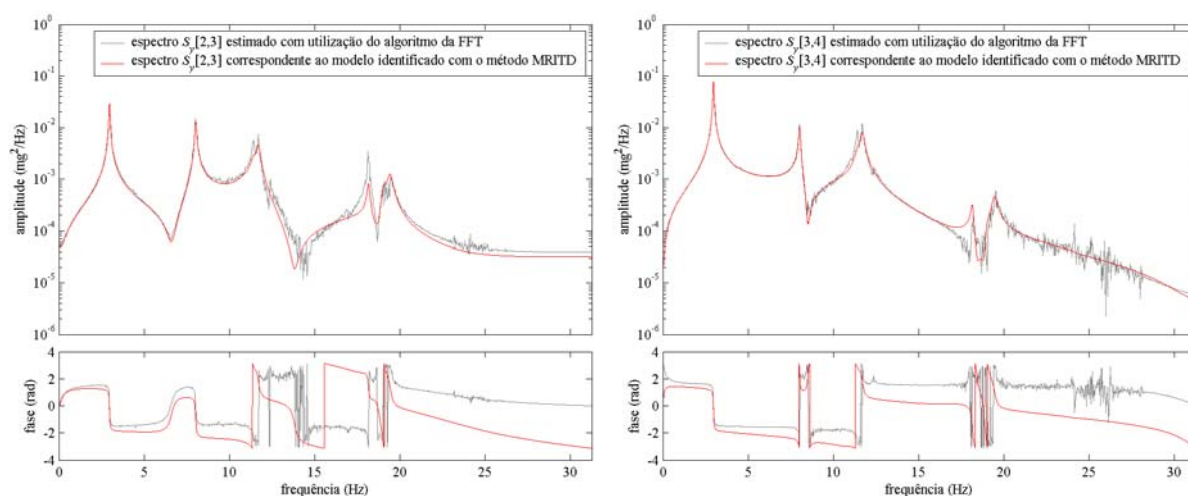


Figura 4.41 – Espectros cruzados experimentais e calculados com o modelo identificado com o método MRITD.

Nas figuras 4.42 e 4.43 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método MRITD.

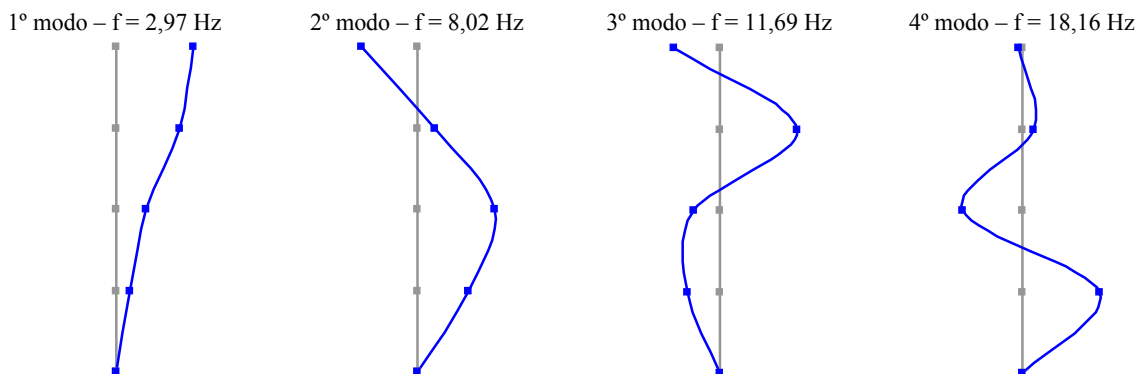


Figura 4.42 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método MRITD.

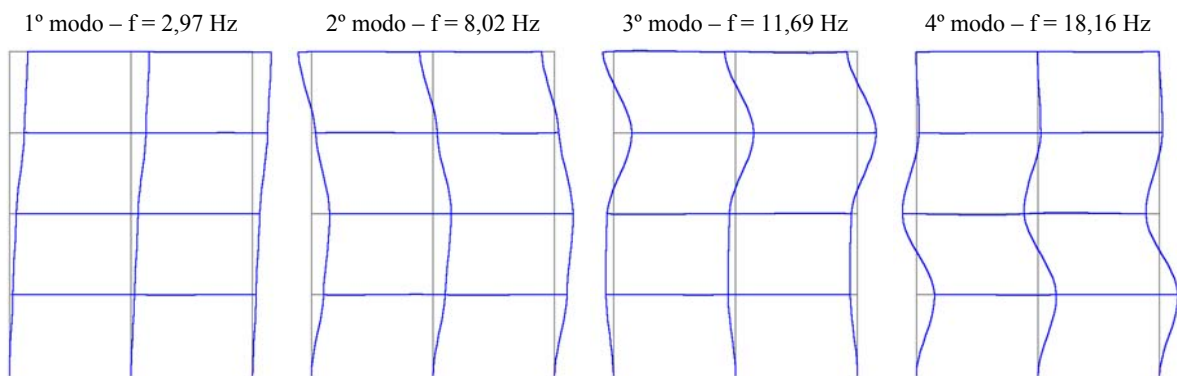


Figura 4.43 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método MRITD.

Com os resultados obtidos com o método MRITD, procura-se ilustrar, na figura 4.44 um aspecto importante relativo aos métodos paramétricos de identificação modal. De facto, com esses métodos faz-se a identificação de um modelo que melhor se ajusta à informação experimental expressa na forma das funções de correlação ou das próprias séries de resposta no tempo. As características dinâmicas assim identificadas são portanto as do modelo ajustado, podendo-se considerar que com esses métodos identificam-se de facto modos de vibração, ao contrário do que acontece no método BFD onde se identificam modos operacionais de deformação. Assim sendo, com os modelos paramétricos torna-se possível fazer a distinção entre as contribuições de cada modo para a resposta do sistema que está a ser analisada. Na figura 4.44 ilustra-se precisamente este aspecto, através do traçado do espectro médio total, correspondente ao modelo de ordem 25 identificado com o método MRITD, e dos espectros de cada um dos 4 modos de vibração do sistema.

Note-se ainda que, de entre os pólos de um modelo paramétrico identificado, pode ser possível distinguir pólos que podem ser considerados como devidos ao sistema das ações ambiente. Esses pólos têm em geral amortecimentos muito elevados, críticos ou super-críticos (Andersen, 1997). Para o exemplo em análise identificaram-se três pólos nessas condições (dois com amortecimento crítico e um com amortecimento de 27%) a partir dos quais determinou-se o espectro que é apresentado na figura 4.44 a traço grosso cinzento, sendo referenciado como o espectro do sistema das ações ambiente.

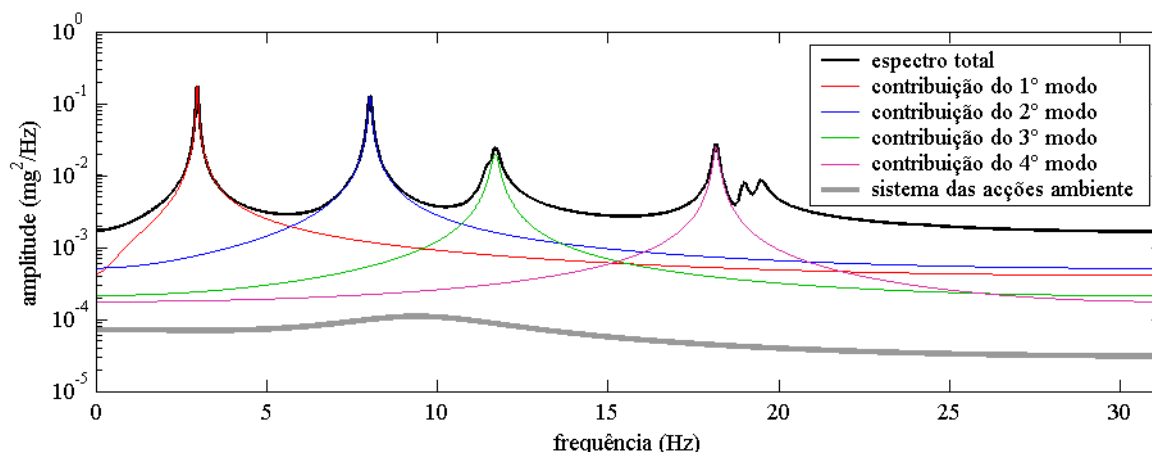


Figura 4.44 – Contribuição de cada modo para o espectro médio do modelo identificado com o método MRITD.

Conforme já referido, os resultados acima apresentados foram obtidos com funções de correlação com um total de 2048 valores amostrados a 62,5 Hz (32,768 seg.). Analisa-se em seguida o efeito de considerar no método MRITD funções de correlação com diferentes durações. No quadro 4.13 indicam-se assim as características dinâmicas identificadas com o método MRITD para diferentes durações das funções de correlação.

Quadro 4.13 – Características dinâmicas para várias durações das funções de correlação.

	n.º de pontos	2048	1024	512	256	128	64	32	16
	duração (seg.)	32,768	16,384	8,192	4,096	2,048	1,024	0,512	0,256
1º modo	f_1 (Hz)	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,99
	ξ_1 (%)	0,78	0,78	0,77	0,72	0,69	0,66	0,64	0,57
	Φ_1	+0,187	+0,187	+0,187	+0,187	+0,187	+0,186	+0,186	+0,180
		+0,383	+0,383	+0,383	+0,383	+0,383	+0,382	+0,382	+0,377
		+0,811	+0,811	+0,811	+0,811	+0,812	+0,812	+0,812	+0,811
		+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
2º modo	f_2 (Hz)	8,02	8,02	8,02	8,02	8,02	8,02	8,02	8,04
	ξ_2 (%)	0,50	0,51	0,51	0,52	0,53	0,56	0,59	0,65
	Φ_2	+0,662	+0,662	+0,662	+0,662	+0,662	+0,663	+0,663	+0,660
		+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
		+0,229	+0,229	+0,229	+0,229	+0,229	+0,229	+0,230	+0,233
		-0,708	-0,708	-0,708	-0,708	-0,708	-0,708	-0,708	-0,707
3º modo	f_3 (Hz)	11,69	11,68	11,67	11,67	11,67	11,61	11,58	11,70
	ξ_3 (%)	0,90	0,80	0,75	0,74	0,64	1,18	0,89	0,88
	Φ_3	-0,404	-0,405	-0,405	-0,405	-0,403	-0,410	-0,412	-0,423
		-0,333	-0,335	-0,339	-0,340	-0,329	-0,357	-0,400	-0,397
		+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
		-0,582	-0,583	-0,585	-0,586	-0,584	-0,598	-0,601	-0,587
4º modo	f_4 (Hz)	18,16	18,16	18,16	18,16	18,16	18,17	18,18	18,18
	ξ_4 (%)	0,38	0,38	0,38	0,38	0,39	0,39	0,80	0,97
	Φ_4	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
		-0,751	-0,751	-0,751	-0,750	-0,750	-0,748	-0,746	-0,745
		+0,149	+0,150	+0,150	+0,149	+0,149	+0,148	+0,146	+0,144
		-0,034	-0,034	-0,034	-0,033	-0,033	-0,032	-0,031	-0,028

Os valores apresentados no quadro 4.13 mostram que há uma boa concordância entre os resultados obtidos com o método MRITD considerando diferentes durações, decrescentes, das funções de correlação. De facto, mesmo considerando funções de correlação com apenas 32 pontos, ou mesmo 16 pontos, já se obtiveram estimativas bastante razoáveis das características dinâmicas do sistema estrutural em análise. Estes resultados permitem sublinhar um facto relativo aos métodos paramétricos de identificação modal a partir das funções de correlação - com esses métodos não é necessário que as funções de correlação sejam estimadas com um número de valores muito grande, devem apenas ter o número de valores suficiente para que, para a ordem máxima dos sistemas que a elas se pretendem ajustar, haja algum grau de sobre-determinação das equações que permitem estimar as matrizes de estado desses sistemas. Note-se que esta situação é diferente daquela que se deve verificar nos métodos anteriormente propostos, baseados na análise das funções de densidade espectral calculadas a partir das funções RD (com utilização do algoritmo da FFT). Neste último caso é necessário que as funções RD sejam estimadas até uma duração em que se verifique o seu decaimento praticamente total, de modo a evitar os efeitos de *leakage* nas funções de densidade espectral.

4.3.3.2 Métodos LSCE e PTD

A formulação dos métodos LSCE e PTD pode ser apresentada numa forma bastante análoga à anteriormente seguida para os métodos ITD e MRITD. Tal como para estes dois métodos, a formulação dos métodos LSCE e PTD é idêntica, havendo apenas a diferença de no primeiro caso (LSCE) considerar-se apenas uma das linhas ou colunas das matrizes de correlação (método SIMO), enquanto que no segundo caso (PTD) consideram-se mais do que uma das linhas ou colunas das matrizes de correlação (método MIMO), podendo-se considerar até essas matrizes completas.

Tendo em conta novamente as expressões (4.86) correspondentes à factorização das funções de correlação da resposta dum sistema, pode-se manipulá-las não através duma justaposição em linhas conforme foi efectuado em (4.87) para os métodos ITD e MRITD, mas sim através duma justaposição em colunas, obtendo-se então as relações seguintes:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_{q+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}'} = \mathbf{V} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_m & \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{G}_m & \dots & \mathbf{\Lambda}_d^q \mathbf{G}_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_m'} \Leftrightarrow \mathbf{R}' = \mathbf{V} \mathbf{G}_m' \quad (4.108)$$

Em (4.108) cada matriz \mathbf{R}_i tem n_e linhas e uma ou mais do que uma colunas (com o limite de n_e colunas) consoante se esteja a considerar o método LSCE ou o método PTD. Assumindo que o sistema tem N pares de pólos complexos e que $n_e q = 2N$, a matriz \mathbf{G}_m' tem uma característica de $n_e q$. Uma vez que a matriz \mathbf{G}_m' ($n_e q \times n_e (1+q)$) tem mais n_e colunas do que linhas, tem que existir uma matriz \mathbf{A}' ($n_e (1+q) \times n_e$) não nula (Zhang, 2003) que satisfaz a relação:

$$\mathbf{G}_m' \mathbf{A}' = 0 \quad (4.109)$$

Combinando as expressões (4.108) e (4.109) pode-se obter a expressão seguinte:

$$\mathbf{R}' \mathbf{A}' = 0 \quad (4.110)$$

Subdividindo a matriz \mathbf{A}' em $1+q$ blocos de \mathbf{A}_i matrizes ($n_e \times n_e$), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_{q+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{q+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.111)$$

Assim como (4.90), a equação (4.111) traduz as funções de correlação através dum modelo auto-regressivo (AR). Tal facto, torna-se mais claro normalizando-a para $\mathbf{A}_{q+1} = \mathbf{I}$, obtém-se assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_q \end{bmatrix} = -\mathbf{R}_{q+1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{A}_q \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{q+1} \quad (4.112)$$

Para determinar os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i ($n_e \times n_e$) do modelo AR (4.112), pode-se escrever um sistema de equações sobre-determinadas, em que esses coeficientes multiplicam uma matriz de Hankel \mathbf{H}_0 das funções de correlação, obtida por $p-1$ sucessivos avanços no tempo da matriz \mathbf{R}' . Esse sistema de equações é assim:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{R}_q \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \dots & \mathbf{R}_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_p & \mathbf{R}_{p+1} & \dots & \mathbf{R}_{p+q-1} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } \mathbf{H}_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{A}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{q+1} \\ \mathbf{R}_{q+2} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{p+q} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Desde que o número de linhas da matriz \mathbf{H}_0 seja superior ao seu número de colunas, os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i podem ser estimados a partir do sistema de equações (4.113) considerando uma solução de mínimos quadrados. Uma vez conhecidos os coeficientes matriciais \mathbf{A}_i , pode-se relacioná-los com as matrizes \mathbf{G}_m e $\mathbf{\Lambda}_d$, tendo em conta a expressão (4.109), ou seja:

$$\mathbf{G}_m' \mathbf{A}' = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m & \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{G}_m & \dots & \mathbf{\Lambda}_d^{q-1} \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{A}_q \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_d^q \mathbf{G}_m \quad (4.114)$$

A expressão (4.114) pode ser escrita na forma de um problema de valores e vectores próprios. Para tal, os coeficientes matriciais A_i são escritos numa matriz de estado na forma companheira direita, correspondente à representação de estado dum sistema na forma canónica da controlabilidade (Ribeiro, 2002). Obtém-se assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_m & \Lambda_d \mathbf{G}_m & \dots & \Lambda_d^{q-1} \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -A_1 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & -A_2 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & -A_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -A_q \end{bmatrix}}_{\text{matriz de estado na forma companheira direita } \mathbf{A}} = \Lambda_d \begin{bmatrix} \mathbf{G}_m & \Lambda_d \mathbf{G}_m & \dots & \Lambda_d^{q-1} \mathbf{G}_m \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Na equação (4.115) verifica-se que dos valores próprios e vectores próprios à esquerda da matriz \mathbf{A} , podem-se retirar as matrizes Λ_d e \mathbf{G}_m . Da matriz Λ_d , ou seja dos valores próprios (μ_i) da matriz \mathbf{A} , podem-se determinar as frequências (ω_i) e os coeficientes de amortecimento (ξ_i) dos modos de vibração do correspondente sistema no tempo contínuo, considerando para tal as expressões (4.95). Por seu lado, a matriz \mathbf{G}_m (matriz de participação modal estocástica) pode ser extraída das primeiras n_e colunas da matriz dos vectores próprios à esquerda da matriz \mathbf{A} .

Nos métodos LSCE e PTD o problema de identificação modal a partir das funções de correlação da resposta dum sistema, coloca-se portanto na avaliação da matriz \mathbf{A} de cujos valores próprios e vectores próprios à esquerda determinam-se as matrizes Λ_d e \mathbf{G}_m . Conforme se referiu, a equação (4.113) está já numa forma que permite determinar os coeficientes matriciais A_i , a partir dos quais se poderia formar a matriz \mathbf{A} e consequentemente resolver o problema de identificação modal. No entanto, essa forma não é ainda a que é adoptada nos métodos LSCE e PTD. Para chegar à forma adoptada nesses métodos, é necessário efectuar na equação (4.113) uma transformação idêntica à que se efectuou para passar da equação (4.114) para a equação (4.115), obtendo-se então:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \dots & \mathbf{R}_q \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \dots & \mathbf{R}_{q+1} \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_5 & \dots & \mathbf{R}_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_p & \mathbf{R}_{p+1} & \mathbf{R}_{p+2} & \dots & \mathbf{R}_{p+q-1} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } \mathbf{H}_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -A_1 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & -A_2 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & -A_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -A_q \end{bmatrix}}_{\text{matriz de estado na forma companheira direita } \mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \dots & \mathbf{R}_{q+1} \\ \mathbf{R}_3 & \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_5 & \dots & \mathbf{R}_{q+2} \\ \mathbf{R}_4 & \mathbf{R}_5 & \mathbf{R}_6 & \dots & \mathbf{R}_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{p+1} & \mathbf{R}_{p+2} & \mathbf{R}_{p+3} & \dots & \mathbf{R}_{p+q} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } \mathbf{H}_1} \quad (4.116)$$

Note-se novamente que as colunas da matriz \mathbf{H}_1 estão adiantadas no tempo de um intervalo Δt relativamente às colunas da matriz \mathbf{H}_0 . A equação para determinar a matriz \mathbf{A} pode assim ser escrita numa forma mais concisa:

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \quad (4.117)$$

Nos métodos LSCE e PTD chega-se portanto à expressão (4.117) para determinar a matriz \mathbf{A} , que é semelhante à apresentada anteriormente para os métodos ITD e MRITD, ver expressão (4.97), apenas com a diferença de que em (4.117) a matriz \mathbf{A} multiplica \mathbf{H}_0 à direita, enquanto que em (4.97) a matriz \mathbf{A} multiplica \mathbf{H}_0 à esquerda.

A matriz \mathbf{A} pode ser determinada a partir de (4.117) utilizando as técnicas já apresentadas para calcular a pseudo-inversa de \mathbf{H}_0 , nomeadamente:

- Através das *equações normais*, podendo-se neste caso utilizar uma das duas 1^{as} expressões indicadas em seguida (o que corresponde a uma solução simples de mínimos quadrados), ou, o que é preferível, uma 3^a expressão correspondente à média das duas 1^{as} (o que corresponde a uma solução dupla de mínimos quadrados):

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 \mathbf{A} = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_1) \quad (4.118)$$

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_0 \mathbf{A} = \mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_0)^{-1} (\mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1) \quad (4.119)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0)^{-1} (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_1) + (\mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_0)^{-1} (\mathbf{H}_1^T \mathbf{H}_1) \right] \quad (4.120)$$

- Através da *decomposição ortogonal* (ou QR) da matriz \mathbf{H}_0 de modo a possibilitar e facilitar a sua inversão. Neste caso é utilizado o algoritmo de decomposição QR para decompor a matriz \mathbf{H}_0 no produto duma matriz triangular superior \mathbf{R}_H por uma matriz ortogonal \mathbf{Q}_H . Como a matriz \mathbf{H}_0 tem um número de colunas superior ao número de linhas, há diversas colunas de \mathbf{R}_H que são nulas, pelo que de facto só se torna necessário considerar as submatrizes \mathbf{R}_{H0} e \mathbf{Q}_{H0} conforme se indica em seguida:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}_H \mathbf{Q}_H = [\mathbf{R}_{H0} \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{H0} \\ \mathbf{Q}_{H1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{H0} \mathbf{Q}_{H0} \quad (4.121)$$

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{R}_{H0} \mathbf{Q}_{H0} \mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{Q}_{H0} \mathbf{A} = \mathbf{R}_{H0}^{-1} \mathbf{H}_1 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{Q}_{H0}^T \mathbf{R}_{H0}^{-1} \mathbf{H}_1 \quad (4.122)$$

- Através da *decomposição em valores singulares* da matriz \mathbf{H}_0 , o que é também uma forma de possibilitar e facilitar a sua inversão. Neste caso utiliza-se o algoritmo de decomposição em valores singulares para decompor a matriz \mathbf{H}_0 em duas matrizes ortogonais \mathbf{U}_H e \mathbf{V}_H , que contêm os vectores singulares, respectivamente, à esquerda e à direita, e uma matriz diagonal $\mathbf{\Sigma}_H$ que contém os valores singulares. Os valores singulares da matriz \mathbf{H}_0 que sejam muito

pequenos podem ser desprezados, considerando-se apenas os s primeiros valores singulares e as correspondentes matrizes U_{Hs} , V_{Hs} e Σ_{Hs} conforme se indica em seguida:

$$H_0 = U_H \Sigma_H V_H^T = U_{Hs} \Sigma_{Hs} V_{Hs}^T \quad (4.123)$$

$$H_0 A = H_1 \Leftrightarrow U_{Hs} \Sigma_{Hs} V_{Hs}^T A = H_1 \Leftrightarrow A = V_{Hs} \Sigma_{Hs}^{-1} U_{Hs}^T H_1 \quad (4.124)$$

Uma vez determinada a matriz A , o problema de identificação modal através dos métodos LSCE e PTD, encontra-se praticamente resolvido, visto que, conforme se verificou, dos valores próprios e vectores próprios à esquerda da matriz A podem-se extrair as frequências e os coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração dum sistema e também a matriz de participação modal estocástica (ou seja, podem-se determinar as matrizes Λ_d e G_m). Coloca-se ainda a questão de determinar as componentes modais observadas, isto é, a matriz V . Para tal pode-se optar por duas vias:

- A primeira via consiste em voltar à equação (4.108) tendo em conta que após se ter identificado a matriz A , a matriz G'_m é conhecida assim como a matriz R' que contém as funções de correlação. Pode-se assim estimar V através duma solução de mínimos quadrados, conforme se indica em seguida (em que G_m^{\dagger} é a pseudo-inversa de G'_m ; em *MatLab* a pseudo-inversa pode ser calculada através da função *pinv* ou, neste caso, podem-se utilizar também as funções / ou *mrdivide*):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \dots & R_{q+1} \end{bmatrix}}_{R'} = V \underbrace{\begin{bmatrix} G_m & \Lambda_d G_m & \dots & \Lambda_d^q G_m \end{bmatrix}}_{G'_m} \Leftrightarrow R' = V G'_m \Leftrightarrow V = R' G_m^{\dagger} \quad (4.125)$$

- A segunda via consiste em efectuar um ajuste de mínimos quadrados dos espectros analíticos correspondentes ao modelo que se pretende identificar (tendo em conta que as matrizes Λ_d e G_m são conhecidas após a primeira fase dos métodos LSCE e PTD) aos espectros estimados por um método não paramétrico (com utilização do algoritmo da FFT). Esta metodologia é por exemplo utilizada por Hermans e Van der Auweraer (1999).

Exemplo – método LSCE: Para exemplificar a aplicação do método LSCE vai-se considerar o modelo de um edifício de 4 pisos, que tem vindo a ser utilizado para ilustrar os diferentes métodos de identificação modal estocástica. Para tal, vão-se considerar as funções de correlação estimadas com o método RD, que têm uma duração de cerca de 33 segundos, correspondente a 2048 valores amostrados a 62,5 Hz.

Como o método LSCE é um método SIMO, a sua aplicação ao exemplo em análise, vai ser efectuada de forma semelhante à adoptada anteriormente para exemplificar o método ITD, o qual também é um método SIMO.

Para aplicar o método LSCE foram desenvolvidos alguns programas em *MatLab* com os quais obtiveram-se os resultados que se apresentam em seguida. Assim, na figura 4.45 apresentam-se os diagramas de estabilização obtidos para cada uma das situações em que se consideraram as funções de cada coluna da matriz de funções de correlação (matriz R).

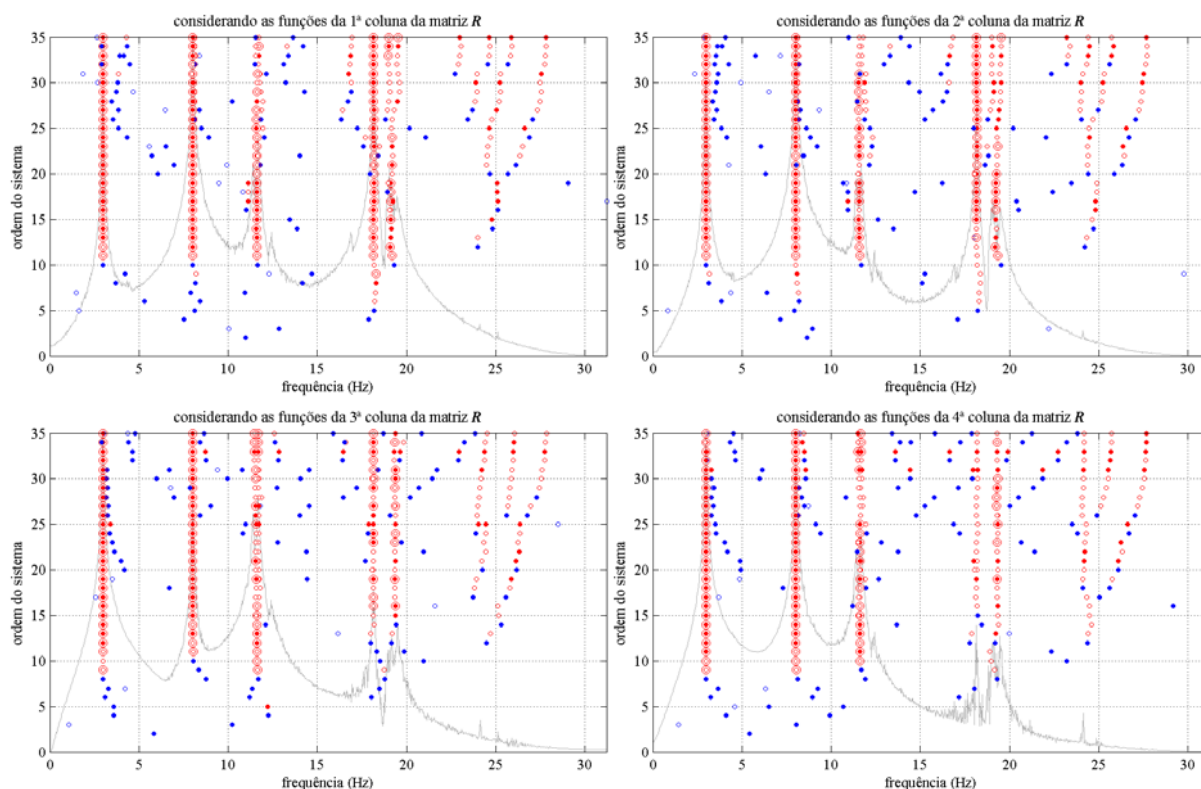


Figura 4.45 – Diagramas de estabilização resultantes da aplicação do método LSCE.

Nos diagramas de estabilização da figura 4.45, estão também traçados os espectros médios estimados com utilização da FFT (método não paramétrico). Conforme já se salientou, esses espectros são um elemento auxiliar para a análise dos diagramas de estabilização. O facto de existirem pólos estáveis coincidentes com os picos desses espectros, reforça a dedução de que os mesmos correspondem a modos naturais de vibração dum sistema.

Para o exemplo em análise verificou-se que com o método LSCE foi necessário considerar modelos de ordem mais elevada do que com o método ITD. Os diagramas de estabilização da figura 4.45 estão assim desenhados até à ordem 35, enquanto que para o método ITD, ver figura 4.33, apenas se chegou à ordem 25.

Nos diagramas de estabilização da figura 4.45, são evidentes 4 linhas de pólos que quase sempre satisfazem os diversos critérios de estabilização. Esses pólos correspondem aos 4 modos de vibração na direcção longitudinal, que se pretendem identificar neste exemplo.

Tal como para o método ITD, como resultados finais obtidos com o método LSCE optou-se por escolher os provenientes do ajuste à: 1ª coluna de R para o 4º modo (modelo de ordem 30); 2ª coluna de R para o 2º modo (modelo de ordem 30); 3ª coluna de R para o 3º modo (modelo de ordem 33); 4ª coluna de R para o 1º modo (modelo de ordem 30).

No quadro 4.14 resumem-se as características dinâmicas identificadas com o método LSCE.

Quadro 4.14 – Características dinâmicas identificadas com o método LSCE.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,97	8,02	11,69	18,16
ξ (%)	0,79	0,47	0,64	0,31
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,185	+0,659	-0,338	+1,000
2	+0,382	+1,000	-0,289	-0,758
3	+0,811	+0,232	+1,000	+0,156
4	+1,000	-0,713	-0,595	-0,042

Na figura 4.46 apresentam-se as funções de auto-correlação calculadas a partir das matrizes identificadas com o método LSCE, comparando-as com as correspondentes funções estimadas com o método RD, as quais foram parte dos próprios dados do método de identificação. Como se pode verificar, há um bom ajuste entre as funções de auto-correlação dos modelos identificados e os dados experimentais (havendo talvez uma maior diferença na função $R[3,3]$).

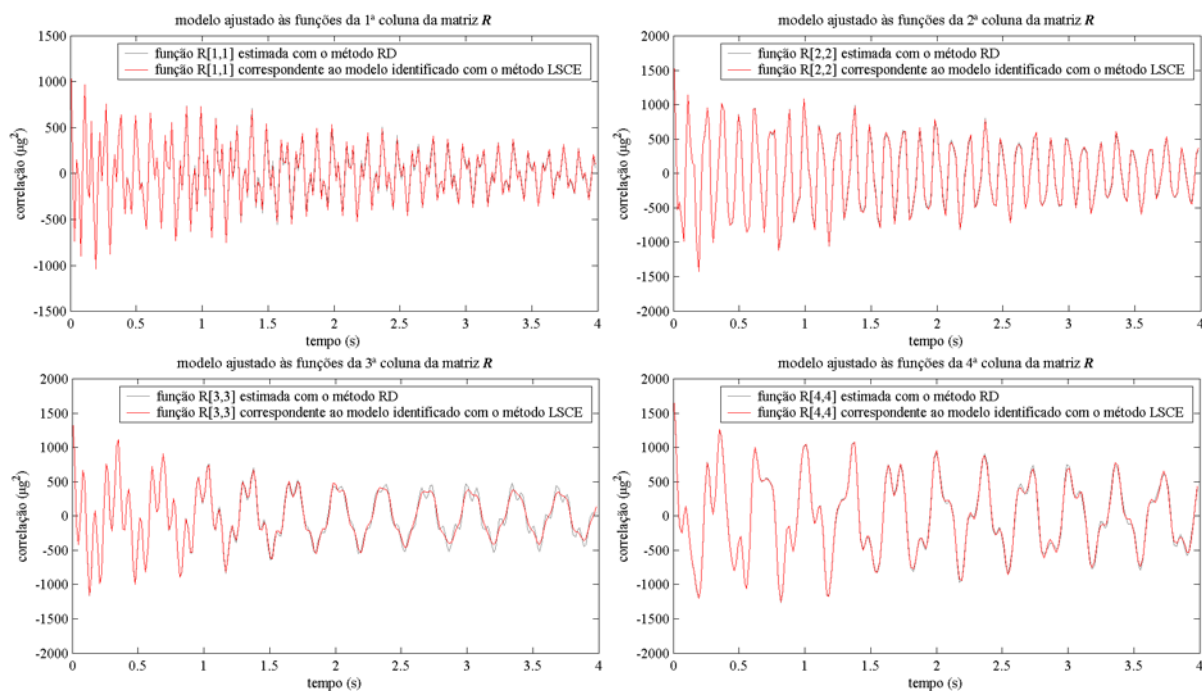


Figura 4.46 – Funções de correlação experimentais e calculadas com o modelo identificado com o método LSCE.

Na figura 4.47 faz-se uma comparação entre os espectros médios correspondentes aos modelos identificados com o método LSCE e os estimados com utilização do algoritmo da FFT (método não paramétrico). Como se pode verificar, há um bom ajuste entre os espectros dos modelos identificados e os estimados a partir dos dados experimentais utilizando o algoritmo da FFT.

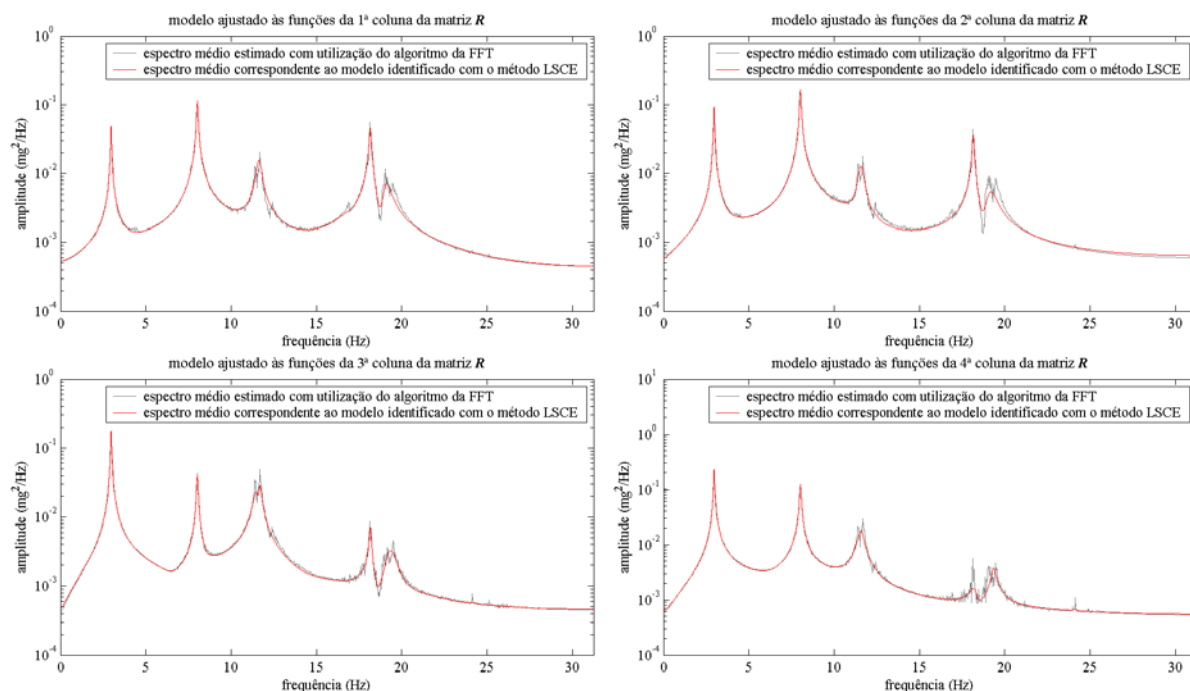


Figura 4.47 – Espectros médios experimentais e calculados com o modelo identificado com o método LSCE.

Nas figuras 4.48 e 4.49 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método LSCE.

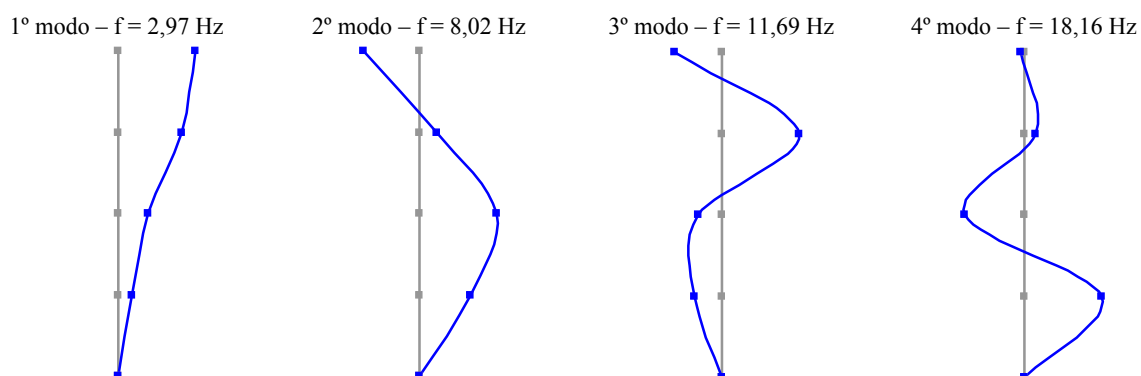


Figura 4.48 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método LSCE.

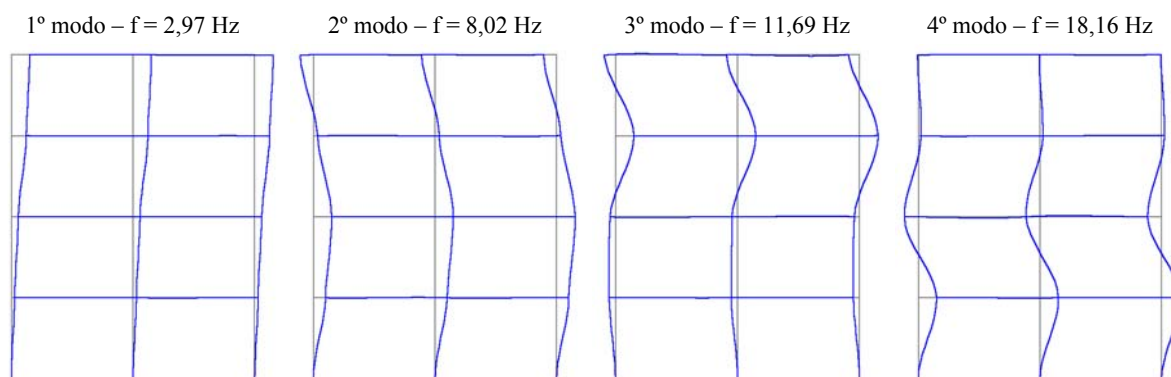


Figura 4.49 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método LSCE.

Exemplo – método PTD: Exemplifica-se agora a aplicação do método PTD que sendo um método MIMO apresenta vantagens relativamente ao método LSCE (SIMO). No método PTD pode-se considerar duma única vez, mais do que uma coluna (ou linha) da matriz de funções de correlação (ou mesmo a matriz completa). Neste exemplo serão utilizadas as funções de correlação já consideradas para exemplificar os outros métodos.

Para aplicar o método PTD desenvolveram-se programas em *MatLab* semelhantes aos elaborados para o método LSCE, mas em que nas matrizes de Hankel se consideram todas as colunas da matriz de funções de correlação.

Na figura 4.50 apresenta-se o diagrama de estabilização correspondente à aplicação do método PTD. Com este método verificou-se a necessidade de ir até modelos de ordem mais elevada do que o que foi necessário no método MRITD (ordem 35 para o método PTD e apenas ordem 25 para o método MRITD).

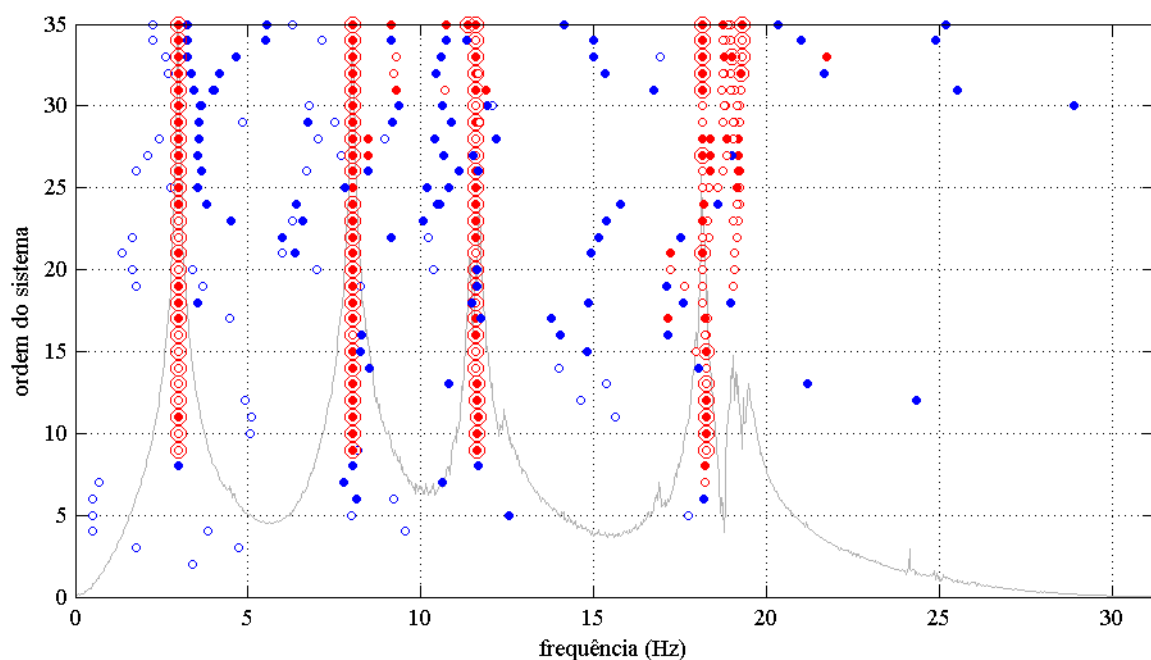


Figura 4.50 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método PTD.

No diagrama de estabilização da figura 4.50 são evidentes as 4 linhas de pólos correspondentes aos 4 modos de vibração do modelo na direcção longitudinal. Optou-se por escolher um modelo de ordem 33 para a identificação das características desses modos de vibração. No quadro 4.15 resumem-se essas características.

Quadro 4.15 – Características dinâmicas identificadas com o método PTD.

modo	1º modo	2º modo	3º modo	4º modo
f (Hz)	2,97	8,02	11,60	18,15
ξ (%)	0,79	0,52	1,11	0,41
piso i	Φ_{i1}	Φ_{i2}	Φ_{i3}	Φ_{i4}
1	+0,185	+0,663	-0,415	+1,000
2	+0,379	+1,000	-0,351	-0,752
3	+0,809	+0,226	+1,000	+0,164
4	+1,000	-0,699	-0,608	-0,039

Na figura 4.51 apresenta-se uma função de auto-correlação do modelo identificado com o método PTD, comparando-a com a correspondente função estimada com o método RD, a qual foi parte dos próprios dados do método de identificação. Na figura 4.52 faz-se uma comparação idêntica com os espectros médios.

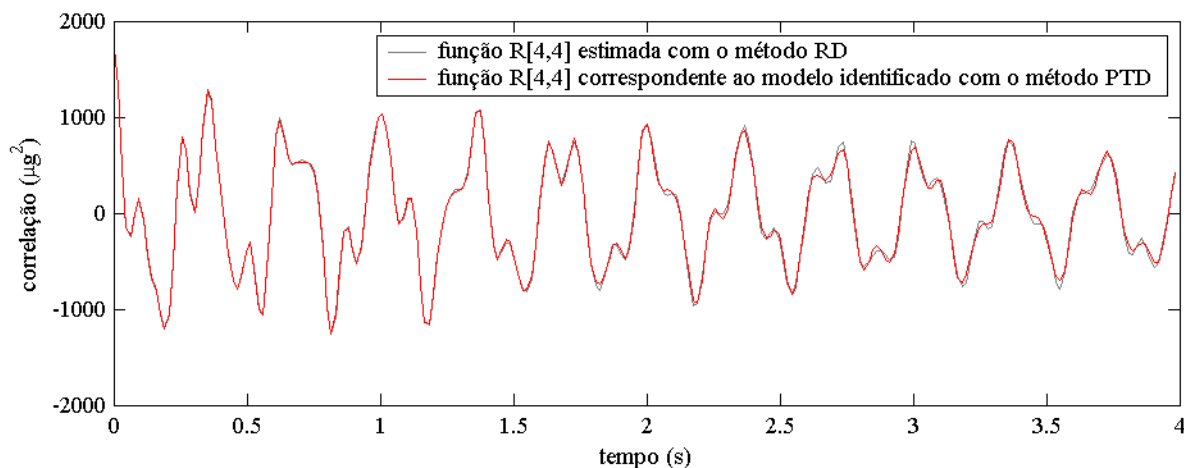


Figura 4.51 – Função de correlação experimental e calculada com o modelo identificado com o método PTD.

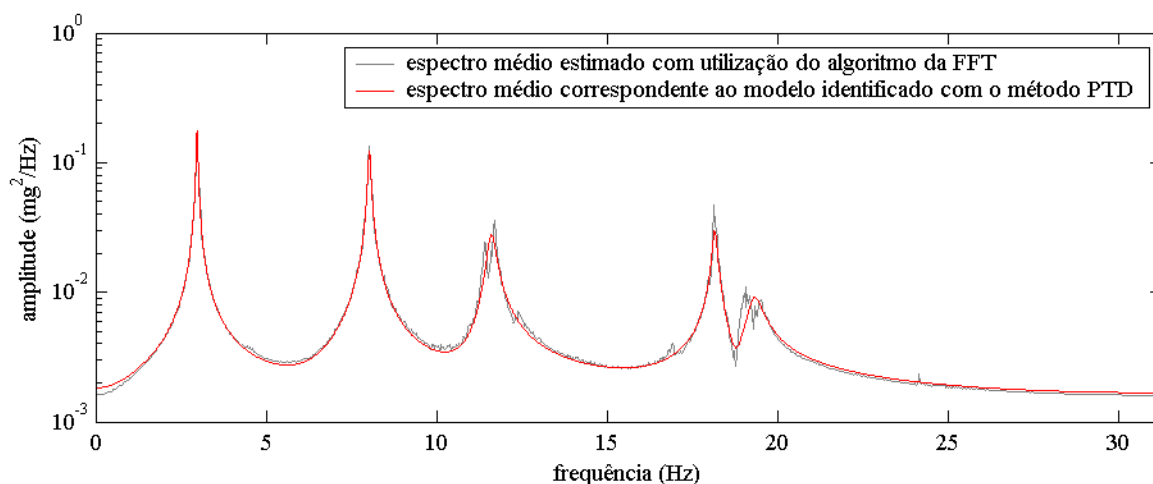


Figura 4.52 – Espectro médio experimental e calculado com o modelo identificado com o método PTD.

Nas figuras 4.53 e 4.54 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método PTD.

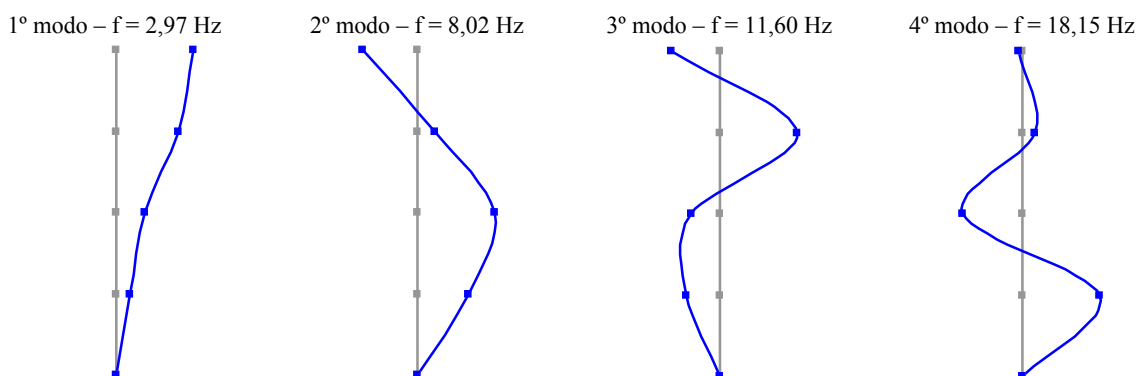


Figura 4.53 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método PTD.

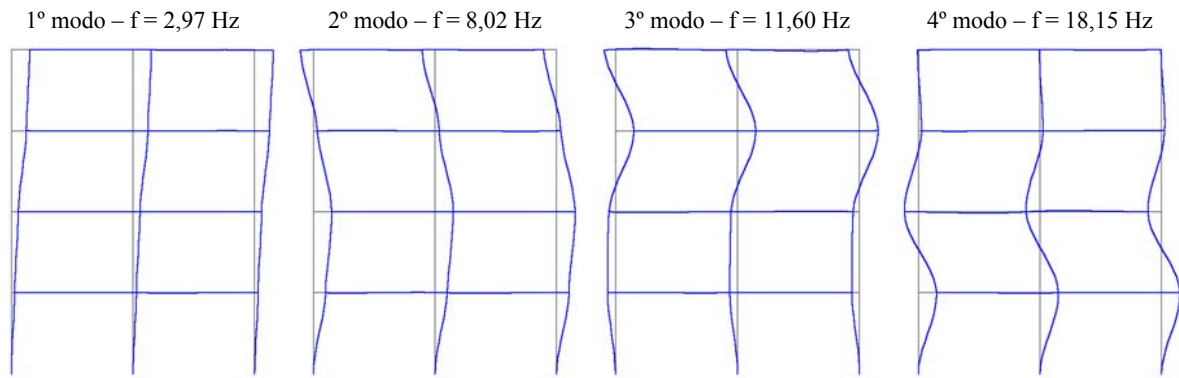


Figura 4.54 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método PTD.

4.3.3.3 Método de identificação estocástica em subespaços SSI-COV

Apresenta-se em seguida o método de identificação estocástica em subespaços baseado na análise das funções de correlação da resposta dos sistemas, o qual é designado abreviadamente por SSI-COV (Peeters, 2000). Serão referidas e exemplificadas três variantes desse método que apenas diferem entre si em termos das matrizes de ponderação que podem ser aplicadas às matrizes de Hankel das funções de correlação.

O método SSI-COV soluciona o chamado problema de *realização estocástica* (Peeters, 2000) que consiste na identificação das matrizes da representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto, ou seja, apenas com base na resposta dos sistemas.

Alguns dos primeiros trabalhos que analisam o problema de realização estocástica são devidos a Akaike (1974), Aoki (1987) e Arun e Kung (1990). Os algoritmos de resolução do problema de realização estocástica estão relacionados com os do problema de realização com conhecimento da entrada e resposta dum sistema e por isso designada por *realização determinística* (Ho e Kalman, 1966; Zeiger e McEwen, 1974; Kung, 1978). O já referido método ERA (Juang e Pappa, 1985) consiste numa aplicação dos conceitos de realização determinística à identificação modal a partir das funções de resposta impulsiva dum sistema. Já se referiu também, que o método ERA é coincidente com uma das variantes do método SSI-COV, com a diferença de que este é aplicado às funções de correlação da resposta dum sistema.

O método SSI-COV baseia-se fundamentalmente na expressão de factorização das funções de correlação, apresentada no capítulo 2 e rescrita em (4.86). Considerando então as funções de correlação organizadas numa matriz de Hankel \mathbf{H}_0 e tendo em conta a expressão (4.86), pode-se facilmente verificar que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & \cdots & R_q \\ R_2 & R_3 & R_4 & \cdots & R_{q+1} \\ R_3 & R_4 & R_5 & \cdots & R_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_p & R_{p+1} & R_{p+2} & \cdots & R_{p+q-1} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de Hankel } \mathbf{H}_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{q-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^q\mathbf{G} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^4\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{q+1}\mathbf{G} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^p\mathbf{G} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{p+1}\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{p+q-2}\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

ou seja:

$$\mathbf{H}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1} \\ \mathbf{O}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{O}_p} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{A}\mathbf{G} & \mathbf{A}^2\mathbf{G} & \cdots & \mathbf{A}^{q-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_q} \Leftrightarrow \mathbf{H}_0 = \mathbf{O}_p \mathbf{\Gamma}_q \quad (4.127)$$

em que as matrizes \mathbf{O}_p e $\mathbf{\Gamma}_q$ são designadas por, respectivamente, matriz de observabilidade e matriz de controlabilidade estocástica.

Verifica-se portanto que a matriz de Hankel das funções de correlação pode ser factorizada no produto da matriz de observabilidade pela matriz de controlabilidade estocástica. Na análise das funções de correlação estimadas a partir da resposta dum sistema observada experimentalmente, essa factorização da matriz de Hankel é efectuada por intermédio do algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD). Aplicando então esse algoritmo à matriz de Hankel \mathbf{H}_0 , esta é decomposta no produto de três matrizes \mathbf{U}_H , \mathbf{V}_H e $\mathbf{\Sigma}_H$, conforme se apresentou anteriormente, podendo-se desprezar os valores singulares nulos ou com valores muito pequenos e considerar apenas os s primeiros valores singulares e as respectivas matrizes \mathbf{U}_{Hs} , \mathbf{V}_{Hs} e $\mathbf{\Sigma}_{Hs}$, ou seja:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{U}_H \mathbf{\Sigma}_H \mathbf{V}_H^T = \mathbf{U}_{Hs} \mathbf{\Sigma}_{Hs} \mathbf{V}_{Hs}^T \quad (4.128)$$

Comparando as expressões (4.127) e (4.128) pode-se verificar que as matrizes \mathbf{O}_p e $\mathbf{\Gamma}_q$ podem ser obtidas a partir das matrizes (\mathbf{U}_{Hs} , \mathbf{V}_{Hs} e $\mathbf{\Sigma}_{Hs}$) resultantes da decomposição em valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{H}_0 , subdividindo-as da forma que se indica em seguida:

$$\mathbf{O}_p = \mathbf{U}_{Hs} \mathbf{\Sigma}_{Hs}^{1/2} \quad (4.129)$$

$$\mathbf{\Gamma}_q = \mathbf{\Sigma}_{Hs}^{1/2} \mathbf{V}_{Hs}^T \quad (4.130)$$

Uma vez determinadas as matrizes de observabilidade e de controlabilidade estocástica, o problema de identificação modal através do método SSI-COV encontra-se praticamente resolvido.

Atendendo à estrutura das matrizes \mathbf{O}_p e $\mathbf{\Gamma}_q$ é imediato verificar que a matriz \mathbf{C} pode ser retirada das primeiras n_e linhas da matriz de observabilidade \mathbf{O}_p e que a matriz \mathbf{G} pode ser retirada das primeiras n_e colunas da matriz de controlabilidade estocástica $\mathbf{\Gamma}_q$. Utilizando a notação do *MatLab*, este facto pode ser traduzido através das expressões seguintes:

$$\mathbf{C} = \mathbf{O}_p (1:n_e, :) \quad (4.131)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{\Gamma}_q (:, 1:n_e) \quad (4.132)$$

A determinação da matriz de estado \mathbf{A} pode ser efectuada por três vias:

- A primeira via consiste em considerar uma matriz de Hankel \mathbf{H}_1 cujas colunas estão adiantadas no tempo de um intervalo Δt relativamente às colunas da matriz \mathbf{H}_0 . Fazendo em relação à matriz \mathbf{H}_1 o mesmo raciocínio que foi feito em (4.126) e (4.127) relativamente à matriz \mathbf{H}_0 , pode-se verificar a seguinte relação:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{O}_p \mathbf{A} \mathbf{\Gamma}_q \quad (4.133)$$

Relação esta que permite determinar a matriz \mathbf{A} através de:

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_p^\dagger \mathbf{H}_1 \mathbf{\Gamma}_q^\dagger \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{\Sigma}_{Hs}^{-1/2} \mathbf{U}_{Hs}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{V}_{Hs} \mathbf{\Sigma}_{Hs}^{-1/2} \quad (4.134)$$

Em (4.134) as pseudo-inversas \mathbf{O}_p^\dagger e $\mathbf{\Gamma}_q^\dagger$ são facilmente extraídas das matrizes resultantes da decomposição em valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{H}_0 .

- A segunda via consiste em, tendo em conta a estrutura da matriz de observabilidade \mathbf{O}_p , definir duas submatrizes de \mathbf{O}_p cuja relação entre si é a própria matriz \mathbf{A} o que a permite determinar através duma solução de mínimos quadrados, conforme se indica em seguida:

$$\mathbf{O}_p = \mathbf{O}_{p1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-2} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{p-1} \end{bmatrix} \right\} \mathbf{O}_{p2} \Rightarrow \mathbf{O}_{p2} = \mathbf{O}_{p1} \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}_{p1}^\dagger \mathbf{O}_{p2} \quad (4.135)$$

em que \mathbf{O}_{p1}^\dagger é a pseudo-inversa de \mathbf{O}_{p1} .

- A terceira via é semelhante à segunda mas tendo por base a estrutura da matriz de controlabilidade estocástica $\mathbf{\Gamma}_q$. Neste caso a determinação de \mathbf{A} pode ser feita através de:

$$\mathbf{\Gamma}_q = \mathbf{\Gamma}_{q1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{A}\mathbf{G} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{G} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{q-2}\mathbf{G} \\ \mathbf{A}^{q-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}^T \right\} \mathbf{\Gamma}_{q2} \Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{q2} = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_{q1} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}_{q2} \mathbf{\Gamma}_{q1}^\dagger \quad (4.136)$$

em que $\mathbf{\Gamma}_{q1}^\dagger$ é a pseudo-inversa de $\mathbf{\Gamma}_{q1}$.

Através dos procedimentos descritos identificam-se portanto as matrizes \mathbf{C} , \mathbf{G} e \mathbf{A} . A partir da decomposição da matriz \mathbf{A} em valores e vectores próprios ($\mathbf{A} = \mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}_d\mathbf{\Psi}^{-1}$) podem-se avaliar os parâmetros modais que se pretendem identificar. As frequências e os coeficientes de amortecimento dos modos de vibração são extraídos da matriz $\mathbf{\Lambda}_d$ conforme se indicou em (4.95). A matriz \mathbf{V} das componentes modais observadas e a matriz \mathbf{G}_m são obtidas através de:

$$\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{\Psi} \quad (4.137)$$

$$\mathbf{G}_m = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{G} \quad (4.138)$$

A partir das matrizes \mathbf{V} , \mathbf{G}_m e $\mathbf{\Lambda}_d$ (ou \mathbf{C} , \mathbf{G} e \mathbf{A}) podem-se sintetizar as funções de correlação e as funções de densidade espectral correspondentes ao modelo identificado, de acordo com o que foi descrito para os métodos paramétricos de identificação modal estocástica apresentados anteriormente.

O passo mais importante do método SSI-COV é a decomposição em valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{H}_0 . Através dessa operação a matriz \mathbf{H}_0 é decomposta no produto da matriz de observabilidade \mathbf{O}_p pela matriz de controlabilidade estocástica $\mathbf{\Gamma}_q$. Todos os restantes passos do método são praticamente imediatos atendendo à estrutura das matrizes \mathbf{O}_p e $\mathbf{\Gamma}_q$.

Na forma em que se apresentou o método SSI-COV, considerou-se que cada matriz \mathbf{R}_i que forma a matriz de Hankel \mathbf{H}_0 , é uma matriz completa que contém as funções de correlação que relacionam todos os graus de liberdade experimentais entre si. É no entanto possível considerar as matrizes \mathbf{R}_i apenas com as colunas relativas a alguns graus de liberdade que se consideram como referências. Tal pode apresentar algumas vantagens em termos de rapidez de execução dos cálculos, em virtude do menor volume de dados a analisar, ou mesmo em termos de qualidade dos resultados, pelo facto de não se considerarem as correlações que têm como referência graus de liberdade que são nodos de alguns modos de vibração. Esta metodologia só com as correlações relativas aos graus de liberdade de referência foi proposta e utilizada por Peeters (2000).

As questões referidas para os métodos paramétricos apresentados anteriormente, em relação à escolha da ordem dos modelos a considerar para a avaliação das características dinâmicas dos sistemas, colocam-se também no caso do método SSI-COV. Neste método também é útil construir diagramas de estabilização para efectuar essa escolha. Para tal e de modo a evitar a repetição de cálculos comuns para os modelos de diferentes ordens, a matriz de Hankel \mathbf{H}_0 de (4.126) deve ser desde logo formada com uma dimensão que permita construir o diagrama de estabilização até à máxima ordem a que se pretende chegar. Assim, os modelos de diferentes ordens podem ser facilmente obtidos, considerando o correspondente número de valores e vectores singulares de \mathbf{H}_0 no cálculo das matrizes \mathbf{O}_p e $\mathbf{\Gamma}_q$ de acordo com (4.129) e (4.130).

A formulação que foi apresentada para o método SSI-COV constitui uma das suas variantes, havendo ainda outras duas conforme se descreve em seguida. As variantes do método SSI-COV podem ser encaradas como diferentes formas de efectuar a escolha da base do espaço de estado onde é efectuada a realização das matrizes do sistema a identificar. Essas variantes correspondem a diferentes ponderações que são efectuadas sobre a matriz de Hankel \mathbf{H}_0 . O algoritmo de decomposição em valores singulares é assim aplicado a uma matriz de Hankel ponderada \mathbf{H}_{0w} , que é obtida de \mathbf{H}_0 através da expressão seguinte:

$$\mathbf{H}_{0w} = \mathbf{W}_1 \mathbf{H}_0 \mathbf{W}_2 \quad (4.139)$$

Em (4.139) \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 são matrizes de ponderação. A diferentes escolhas destas matrizes correspondem as diferentes variantes do método SSI-COV. Antes de descrever essas variantes é conveniente definir as matrizes \mathfrak{R}_1 e \mathfrak{R}_2 na forma que se indica em seguida:

$$\mathfrak{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^T & \mathbf{R}_1^T & \mathbf{R}_2^T & \cdots & \mathbf{R}_{p-1}^T \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1^T & \cdots & \mathbf{R}_{p-2}^T \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \cdots & \mathbf{R}_{p-3}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{p-1} & \mathbf{R}_{p-2} & \mathbf{R}_{p-3} & \cdots & \mathbf{R}_0^T \end{bmatrix} \quad \mathfrak{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^T & \mathbf{R}_1^T & \mathbf{R}_2^T & \cdots & \mathbf{R}_{q-1}^T \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_1^T & \cdots & \mathbf{R}_{q-2}^T \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \cdots & \mathbf{R}_{q-3}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{q-1} & \mathbf{R}_{q-2} & \mathbf{R}_{q-3} & \cdots & \mathbf{R}_0^T \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

e os seus factores de Cholesky \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 :

$$\mathfrak{R}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T \quad \mathfrak{R}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^T \quad (4.141)$$

As três variantes do método SSI-COV são então:

- Método PC (*principal components*) ou BR (*balanced realization*) que será designado abreviadamente por SSI-COV(PC). Neste caso as matrizes de ponderação são iguais à matriz identidade ($\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}$), ou seja o método SSI-COV(PC) corresponde exactamente à

metodologia acima descrita para o método SSI-COV. Note-se ainda que esta variante é também aquela que é coincidente com o método ERA (Juang e Pappa, 1985).

- Método UPC (*unweighted principal components*) que será designado abreviadamente por SSI-COV(UPC). Neste caso as matrizes de ponderação são dadas por:

$$\begin{aligned} W_1 &= I \\ W_2 &= \mathfrak{R}_2^{-1} H_0^T \end{aligned} \quad (4.142)$$

Neste método SSI-COV(UPC), após o cálculo da decomposição em valores e vectores singulares da matriz de Hankel ponderada, as matrizes dos vectores singulares U_{Hs} e V_{Hs} devem ser corrigidas através de:

$$\begin{aligned} U_{Hs} &= U_{Hs} \\ V_{Hs} &= H_0^T U_{Hs} \Sigma_{Hs}^{-1} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Todos os restantes passos do método SSI-COV(UPC) são idênticos aos anteriormente descritos para o método SSI-COV.

- Método CVA (*canonical variate analysis*) que será designado abreviadamente por SSI-COV(CVA) e no qual os valores singulares da matriz de Hankel ponderada são interpretados como sendo os cossenos dos ângulos principais entre dois subespaços, o subespaço das respostas do “passado” Y_p e o subespaço das respostas do “futuro” Y_f (Peeters, 2000; Pridham e Wilson, 2002). Neste caso as matrizes de ponderação são dadas por:

$$\begin{aligned} W_1 &= \mathfrak{R}_1^{-1/2} \quad \text{ou} \quad W_1 = L_1^{-1} \\ W_2 &= \mathfrak{R}_2^{-1/2} \quad \text{ou} \quad W_2 = L_2^{-1} \end{aligned} \quad (4.144)$$

Neste método SSI-COV(CVA), após o cálculo da decomposição em valores e vectores singulares da matriz de Hankel ponderada, as matrizes dos vectores singulares U_{Hs} e V_{Hs} devem ser corrigidas através de:

$$\begin{aligned} U_{Hs} &= W_1 U_{Hs} \\ V_{Hs} &= W_2^T V_{Hs} \end{aligned} \quad (4.145)$$

Todos os restantes passos do método SSI-COV(CVA) são idênticos aos acima descritos para o método SSI-COV.

O interesse na variante SSI-COV(CVA) está no efeito que as matrizes de ponderação têm em termos de dar um peso maior a modos de vibração que contribuam pouco para a resposta que se está a analisar, possibilitando assim que a sua identificação seja melhor efectuada.

Exemplo: Exemplifica-se em seguida a aplicação das três variantes do método SSI-COV tendo em conta as funções de correlação que já foram utilizadas para ilustrar os outros métodos paramétricos de identificação modal estocástica. No entanto, neste caso, apenas se consideram os primeiros 512 valores dessas funções (o que para a frequência de amostragem de 62,5 Hz corresponde a uma duração de cerca de 8 segundos).

Para aplicar as três variantes do método SSI-COV foram desenvolvidos programas em *MatLab* com os quais obtiveram-se os resultados que se apresentam em seguida.

Nas figuras 4.55 a 4.57 apresentam-se os diagramas de estabilização correspondentes à aplicação das três variantes do método SSI-COV que foram descritas anteriormente.

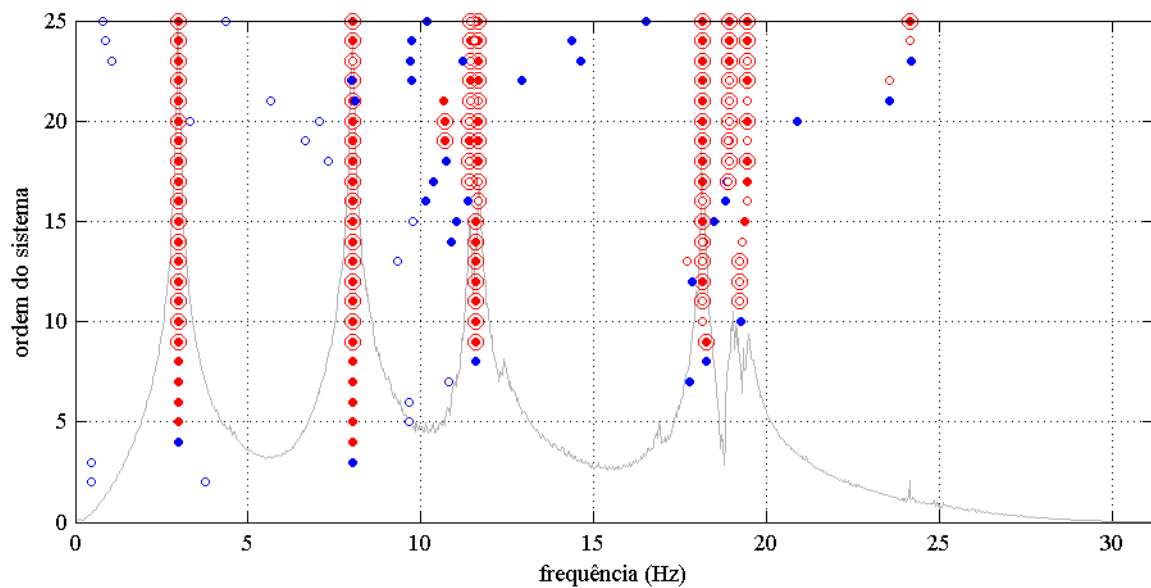


Figura 4.55 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-COV(PC).

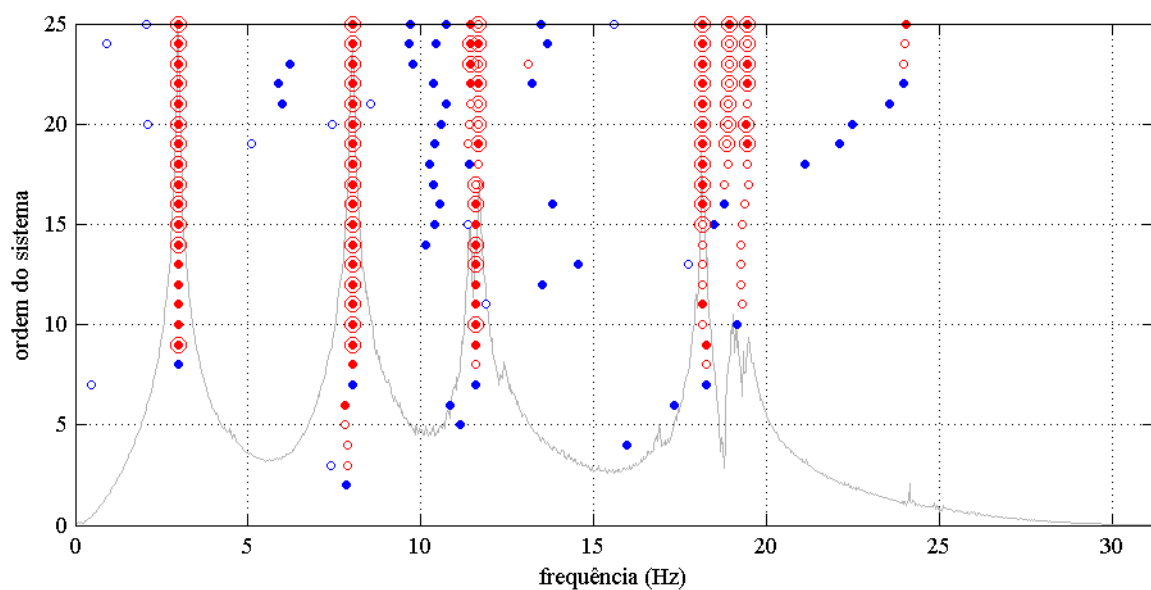


Figura 4.56 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-COV(UPC).

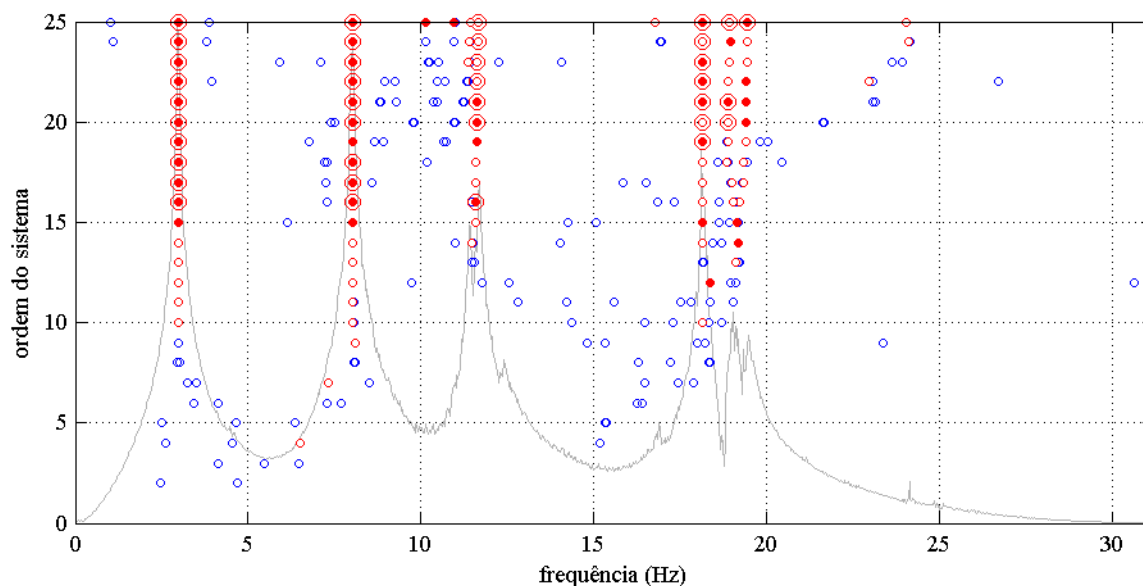


Figura 4.57 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-COV(CVA).

Analisando os diagramas de estabilização das figuras 4.55 a 4.57, são facilmente identificáveis as linhas verticais dos pólos correspondentes aos 4 modos de vibração do modelo na direcção longitudinal. Optou-se assim por escolher modelos de ordem 25 para a identificação das características desses modos de vibração. No quadro 4.16 resumem-se essas características.

Note-se que, em geral, com o método SSI-COV, os pólos dos sistemas identificados apresentam-se estáveis para modelos de ordens mais baixas do que com os métodos paramétricos anteriormente apresentados. Neste exemplo, não se verificou qualquer vantagem significativa na utilização das duas variantes UPC e CVA relativamente à variante PC do método SSI-COV (antes pelo contrário, em termos de identificação dos pólos correspondentes aos modos de vibração do modelo na direcção longitudinal, o diagrama de estabilização mais claro é o da figura 4.55 correspondente à variante PC). No que se refere às características dinâmicas identificadas (ver quadro 4.16), os resultados obtidos com as três variantes do método SSI-COV são bastante concordantes entre si.

Quadro 4.16 – Características dinâmicas identificadas com as três variantes do método SSI-COV.

modo	1º modo			2º modo			3º modo			4º modo		
método	PC	UPC	CVA	PC	UPC	CVA	PC	UPC	CVA	PC	UPC	CVA
f (Hz)	2,97	2,97	2,97	8,02	8,02	8,02	11,66	11,66	11,67	18,16	18,16	18,16
ξ (%)	0,77	0,76	0,77	0,51	0,52	0,51	0,71	0,79	0,79	0,38	0,39	0,38
piso i	Φ_{i1}			Φ_{i2}			Φ_{i3}			Φ_{i4}		
1	+0,187	+0,181	+0,187	+0,662	+0,663	+0,662	-0,405	-0,406	-0,405	+1,000	+1,000	+1,000
2	+0,383	+0,385	+0,383	+1,000	+1,000	+1,000	-0,341	-0,338	-0,340	-0,751	-0,752	-0,752
3	+0,811	+0,802	+0,811	+0,229	+0,229	+0,229	+1,000	+1,000	+1,000	+0,150	+0,146	+0,150
4	+1,000	+1,000	+1,000	-0,708	-0,708	-0,708	-0,587	-0,587	-0,600	-0,034	-0,034	-0,031

Na figura 4.58 apresenta-se uma função de auto-correlação calculada a partir das matrizes identificadas com as três variantes do método SSI-COV, comparando-a com a correspondente função estimada com o método RD, a qual foi parte dos próprios dados desses métodos de identificação. Na figura 4.59 faz-se uma comparação idêntica com os espectros médios. Em qualquer das figuras 4.58 ou 4.59 é possível verificar o bom ajuste obtido entre os dados experimentais e os modelos identificados.

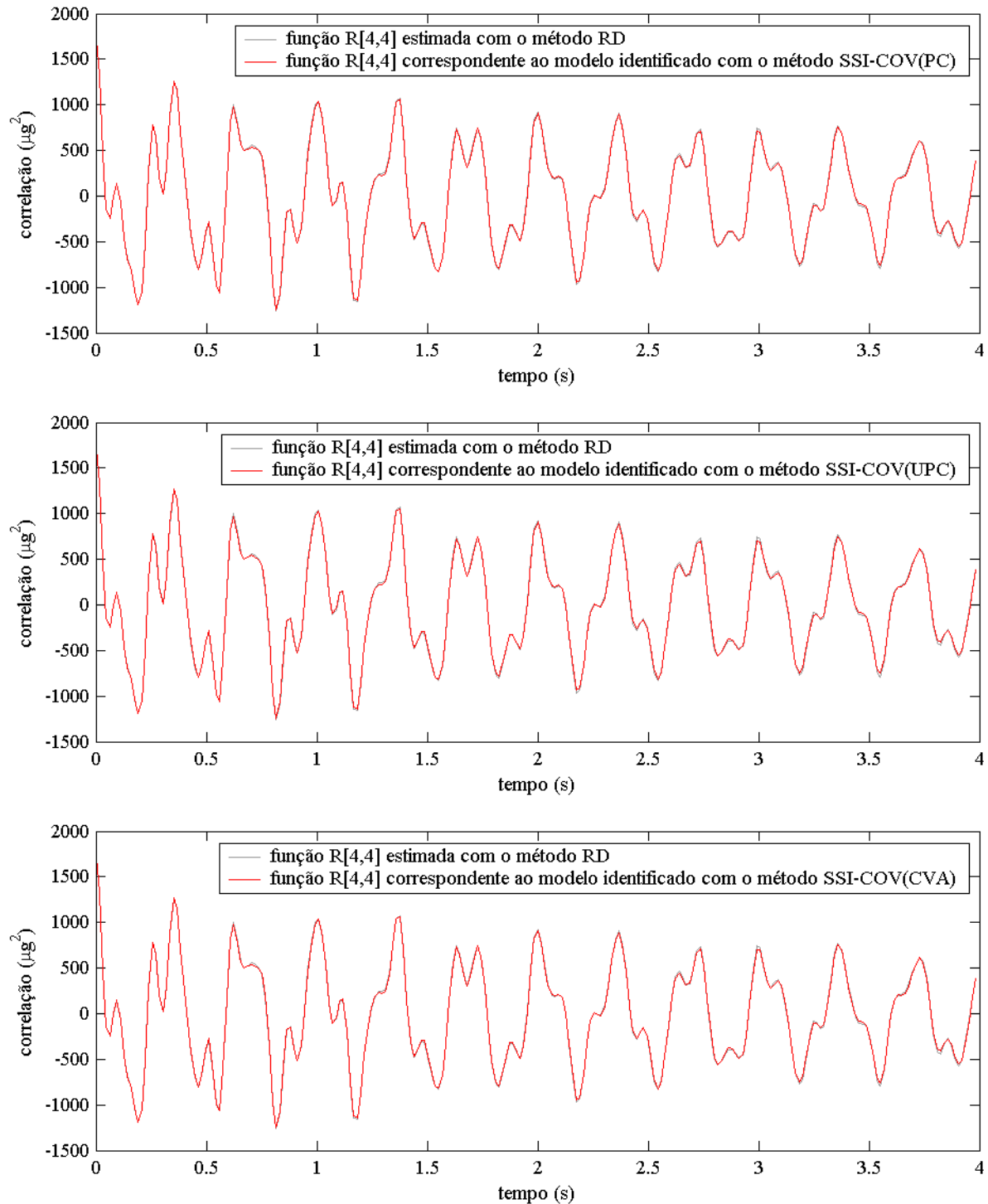


Figura 4.58 – Funções de correlação experimentais e calculadas com os modelos identificados com as três variantes do método SSI-COV.

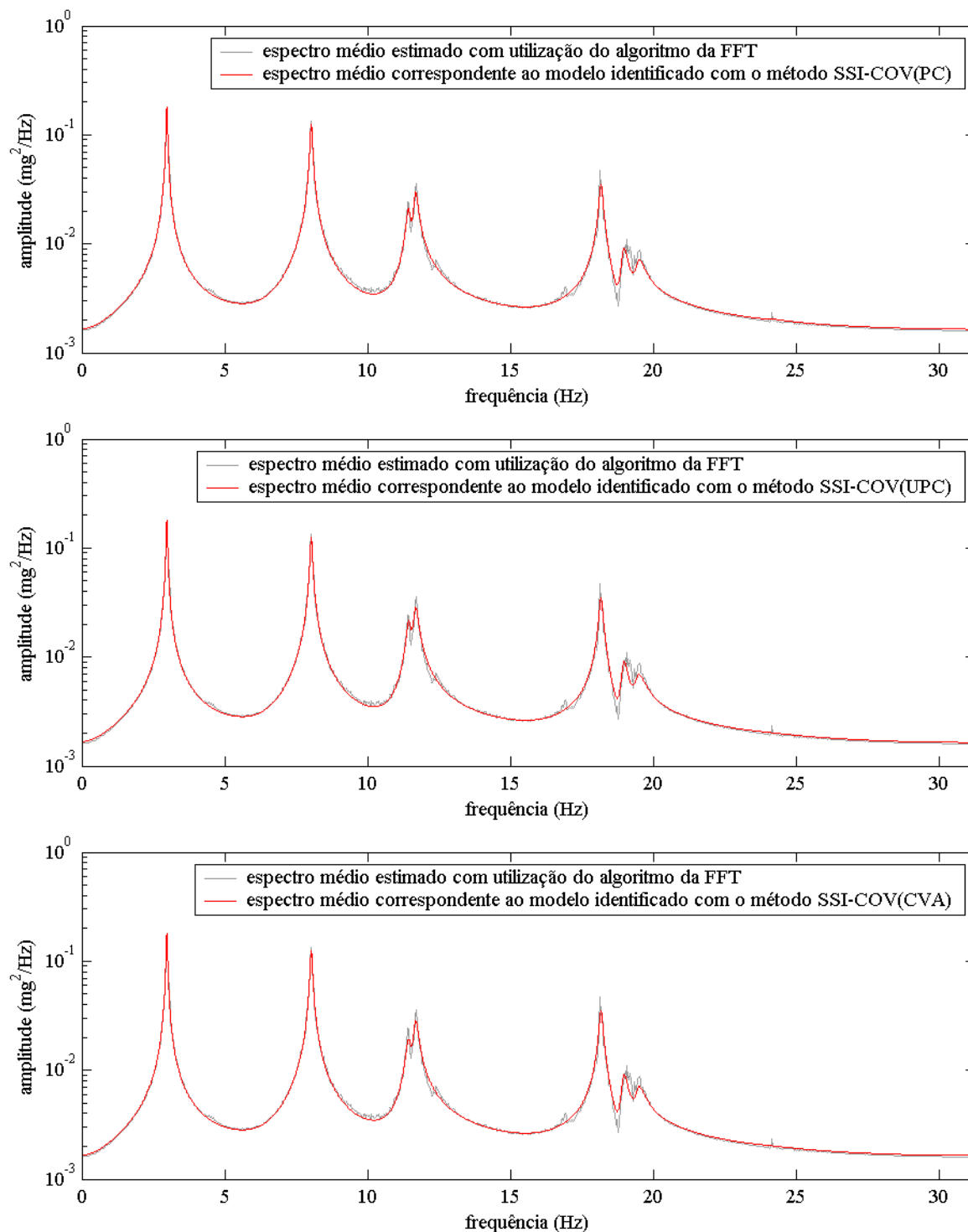


Figura 4.59 – Espectros médios experimentais e calculados com os modelos identificados com as três variantes do método SSI-COV.

Nas figuras 4.60 e 4.61 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método SSI-COV(PC) (note-se que as componentes modais identificadas com os métodos SSI-COV(UPC) e SSI-COV(CVA) são muito próximas das obtidas com o método SSI-COV(PC), pelo que a sua representação gráfica não difere muito das apresentadas nas figuras 4.60 e 4.61).

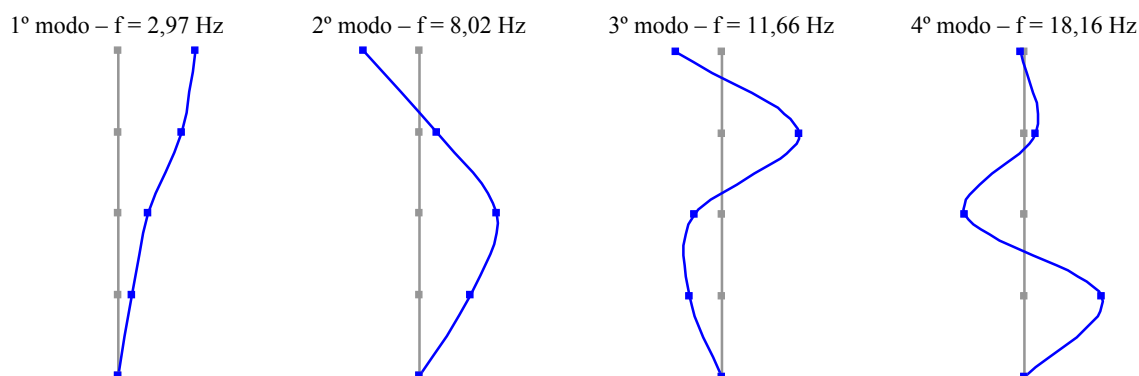


Figura 4.60 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método SSI-COV(PC).

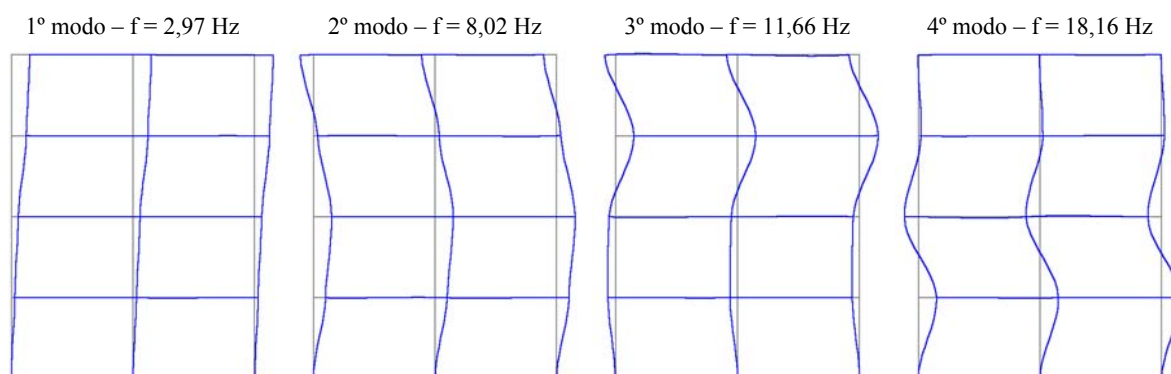


Figura 4.61 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método SSI-COV(PC).

4.3.4 Métodos de ajuste às séries de resposta no tempo

O segundo grupo de métodos de identificação no domínio do tempo apresentados neste trabalho, é constituído por métodos que consistem no ajuste de modelos directamente às séries de resposta. Conforme se referiu em 4.1, são métodos de uma fase, onde não há uma primeira fase de estimativa de funções de interface (funções de densidade espectral ou funções de correlação da resposta) entre as séries de resposta e o método de identificação modal em si mesmo.

A apresentação que será feita sobre estes métodos focará principalmente o método de identificação estocástica em subespaços SSI-DATA (ajuste directo às séries de resposta e não às funções de correlação da resposta como é feito no método SSI-COV). Faz-se também uma breve referência aos métodos que se baseiam no ajuste de modelos ARMAV e ARV, os quais, embora tenham sido objecto de algum esforço de estudo e investigação (Piombo *et al.*, 1993; Andersen, 1997) com vista à sua utilização na identificação modal de estruturas de engenharia civil, têm vindo a perder interesse em face das dificuldades sentidas na sua aplicação e também devido ao desenvolvimento do método SSI-DATA.

4.3.4.1 Método de identificação estocástica em subespaços SSI-DATA

O desenvolvimento do método de identificação estocástica em subespaços com ajuste directo às séries de resposta dum sistema – método SSI-DATA – resultou de trabalhos de investigação relativamente recentes, desenvolvidos no domínio da identificação de sistemas com aplicações mais relacionadas com a engenharia electrotécnica ou a engenharia de sistemas de controlo (Van Overschee e De Moor, 1996; Ljung, 1999). A sua aplicação na identificação modal de estruturas de engenharia civil deve-se sobretudo aos trabalhos desenvolvidos na Universidade Católica de *Leuven* na Bélgica (Peeters, 2000) e na Universidade de *Aalborg* na Dinamarca (Kirkegaard e Andersen, 1997). É ainda de referir a aplicação do método SSI-DATA na análise de dados experimentais obtidos na *Vincent Thomas Bridge* em *Los Angeles* (Pridham e Wilson; 2003). O facto de que o método se encontra actualmente implementado no programa ARTeMIS (SVS, 2002) leva a supor que a breve prazo haverá uma experiência mais generalizada da sua aplicação na identificação modal de estruturas, quer de engenharia civil, quer de engenharia mecânica.

Tal como o método SSI-COV anteriormente apresentado, o método SSI-DATA consiste no ajuste dum modelo à informação experimental, sendo esse modelo parametrizado sob a forma das matrizes da representação de estado dum sistema estocástico no tempo discreto (ver capítulo 2). No entanto, no método SSI-DATA não é necessário efectuar a avaliação explícita das funções de correlação da resposta dos sistemas. No método SSI-DATA, essa avaliação é substituída por uma operação que, de acordo com a apresentação efectuada por Van Overschee e De Moor (1996), pode ser interpretada como uma projecção geométrica do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado”. Note-se que neste contexto, o conceito de funções de correlação é de certa forma semelhante ao de projecções de espaços. Em ambos os casos, exprime-se a forma como a resposta dum sistema num determinado instante se relaciona com a resposta em instantes anteriores. Da avaliação das funções de correlação ou da determinação das projecções de espaços, resulta um efeito de cancelamento do ruído na resposta que não tem correlação com a resposta em instantes anteriores (ou que não tem projecção no espaço das séries de resposta do “passado”).

A apresentação que se faz em seguida do método SSI-DATA segue uma linha próxima da adoptada por Peeters (2000). Opta-se também por efectuar a apresentação da variante do método SSI-DATA proposta por esse autor, na qual, de forma diversa à seguida nos primeiros algoritmos do método SSI-DATA (Van Overschee e De Moor; 1991, 1993), é efectuada uma separação entre as séries de resposta nos graus de liberdade de referência e as restantes séries de resposta. Nessa variante, faz-se uma projecção do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado” nos graus de liberdade de referência. Diz-se assim que essa variante do método SSI-DATA é baseada nas séries de referência (*reference based*). Note-se que, considerando todos os graus de

liberdade experimentais como sendo de referência, a variante que será apresentada torna-se coincidente com os algoritmos originais do método SSI-DATA.

No método SSI-DATA o ajuste dum modelo às séries de resposta observadas experimentalmente, é efectuado através da utilização de diversas técnicas numéricas robustas, nomeadamente a decomposição ortogonal ou decomposição QR, a decomposição em valores singulares (SVD) e a técnica de mínimos quadrados. Adiante verificar-se-á a forma como essas técnicas são utilizadas.

Sequências de estado dum filtro de Kalman:

No capítulo 2 referiu-se a aplicação do filtro de Kalman de estado estacionário, da qual resulta a representação dum sistema que é designada por modelo de inovação para a frente (*forward innovation model*). O filtro de Kalman tem um papel importante no método SSI-DATA, uma vez que este método envolve a avaliação de sequências de estado dum filtro de Kalman e a sua posterior utilização para estimar as matrizes da representação de estado dum sistema estocástico no tempo discreto, conforme se descreverá mais adiante.

O objectivo da aplicação dum filtro de Kalman é a obtenção duma estimativa óptima do vector de estado dum sistema num instante k , utilizando as respostas observadas até ao instante $k-1$, as matrizes do sistema e as matrizes de correlação do ruído que se considera que actua o sistema e afecta a resposta observada. Essa estimativa óptima do vector de estado é representada por $\hat{\mathbf{x}}_k$. Van Overschee e De Moor (1996) mostram que, considerando que é conhecida a estimativa inicial do estado $\hat{\mathbf{x}}_0 = 0$, a correlação inicial da estimativa do estado $\mathbf{P}_0 = E[\hat{\mathbf{x}}_0 \hat{\mathbf{x}}_0^T] = 0$ e as respostas observadas $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$, a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_k$ do estado dum filtro de Kalman de estado não estacionário, definida através das seguintes expressões recursivas:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{a\ k-1} (\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \mathbf{K}_{a\ k-1} &= (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}^T) (\mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T + (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}^T) (\mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}^T)^T\end{aligned}\tag{4.146}$$

pode ser expressa através de:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{\Gamma}_k^{rev} \mathbf{T}_{1-i|0}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1} \end{bmatrix}\tag{4.147}$$

em que, nas expressões (4.146) e (4.147):

$\hat{\mathbf{x}}_k$ é a estimativa do estado do filtro de Kalman;

\mathbf{K}_a é a matriz de ganho do filtro de Kalman;

\mathbf{P} é a matriz de correlação do estado do filtro de Kalman;

$\mathbf{\Gamma}_k^{rev}$ é a matriz de controlabilidade estocástica revertida, que é definida através de:

$$\mathbf{\Gamma}_k^{rev} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{G} & \mathbf{A}^{k-2} \mathbf{G} & \cdots & \mathbf{A} \mathbf{G} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

$\mathbf{T}_{1-i|0}$ é uma matriz de Toeplitz com as funções de correlação da resposta do sistema:

$$\mathbf{T}_{1-i|0} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{R}_{-1} & \cdots & \mathbf{R}_{1-i} \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_0 & \cdots & \mathbf{R}_{2-i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{R}_{i-1} & \mathbf{R}_{i-2} & \cdots & \mathbf{R}_0 \end{bmatrix} \quad (4.149)$$

A expressão (4.147) indica que a estimativa $\hat{\mathbf{x}}_k$ do estado dum filtro de Kalman pode ser escrita como uma combinação linear das respostas observadas $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{k-1}$. Pode-se assim definir uma sequência de estado dum filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$, através de:

$$\hat{\mathbf{X}}_i = [\hat{\mathbf{x}}_i \ \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \ \cdots \ \hat{\mathbf{x}}_{i+N-1}] = \mathbf{\Gamma}_k^{rev} \mathbf{T}_{1-i|0}^{-1} \mathbf{Y}_p \quad (4.150)$$

em que \mathbf{Y}_p é a matriz de Hankel das séries de resposta do “passado” definida em (4.37).

Conforme se indicará mais adiante, o método SSI-DATA envolve precisamente a avaliação de sequências de estado dum filtro de Kalman.

Princípios da identificação estocástica em subespaços com ajuste às séries de resposta:

O primeiro passo do método SSI-DATA consiste na avaliação da projecção do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado”. Na fundamentação do método está o conceito de que nessa projecção está toda a informação do “passado” que tem interesse para prever a resposta do “futuro” (ou seja, um conceito semelhante ao de correlação, conforme se salientou anteriormente). Essa projecção é definida através da expressão que se indica em seguida, onde se utilizam as matrizes de Hankel das séries de resposta definidas em (4.40):

$$\mathbf{P}_i^{ref} = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p^{ref} = \mathbf{Y}_f \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \right)^T \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \right)^T \right)^{\dagger} \mathbf{Y}_p^{ref} \quad (4.151)$$

Note-se que na expressão (4.151) os produtos $\mathbf{Y}_f (\mathbf{Y}_p^{ref})^T$ e $\mathbf{Y}_p^{ref} (\mathbf{Y}_p^{ref})^T$ são matrizes de Toeplitz das funções de correlação da resposta (ver as expressões (4.47) e (4.51)). Torna-se assim claro que as projecções de espaços consideradas no método SSI-DATA estão relacionadas com as funções de correlação da resposta dum sistema. No entanto, a expressão (4.151) é apenas a definição da projecção de espaços \mathbf{P}_i^{ref} , não dando a indicação da forma como essa projecção é calculada no método SSI-DATA. De facto, neste método, a projecção do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado” é determinada através da utilização do algoritmo de decomposição ortogonal ou decomposição QR.

De acordo com o principal teorema da identificação estocástica em subespaços com ajuste às séries de resposta (Van Overschee e De Moor, 1996), a projecção \mathbf{P}_i^{ref} pode ser decomposta no produto da matriz de observabilidade \mathbf{O}_i pela sequência de estado dum filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$:

$$\mathbf{P}_i^{ref} = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{X}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} \end{bmatrix} [\hat{\mathbf{x}}_i \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+N-1}] \quad (4.152)$$

A expressão (4.152) indica que a matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} resulta do produto duma matriz (\mathbf{O}_i) com $2n$ colunas por uma matriz ($\hat{\mathbf{X}}_i$) com $2n$ linhas, pelo que a sua característica é $2n$ (se $n_e \geq 2n$). A característica da matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} é portanto igual à ordem $2n$ dum sistema. Uma das formas de estimar a característica duma matriz é através do algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD). Aplicando então esse algoritmo à matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} e eliminando os valores singulares nulos (ou muito pequenos) e os correspondentes vectores singulares, obtém-se:

$$\mathbf{P}_i^{ref} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (4.153)$$

sendo \mathbf{U}_1 de $(n_e \times 2n)$, \mathbf{S}_1 de $(2n \times 2n)$ e \mathbf{V}_1 de $(N \times 2n)$.

A partir da decomposição em valores singulares (4.153) da matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} , pode-se avaliar a matriz de observabilidade \mathbf{O}_i e a matriz da sequência de estado dum filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$, através das expressões seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_i &= \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \\ \hat{\mathbf{X}}_i &= \mathbf{O}_i^\dagger \mathbf{P}_i^{ref} \end{aligned} \quad (4.154)$$

Através do procedimento descrito, chegou-se à ordem do sistema (através do número de valores singulares não nulos da matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref}) e também à matriz de observabilidade \mathbf{O}_i e à matriz da sequência de estado dum filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$. No entanto, o resultado a que se pretende chegar é à identificação das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{G} , \mathbf{C} , e \mathbf{R}_0 da representação de estado dum sistema estocástico no tempo discreto. Para tal é necessário recorrer a uma segunda projecção \mathbf{P}_{i-1}^{ref} , que é definida fazendo com que a separação entre os blocos de linhas das séries do passado e os das séries do futuro, desça um bloco, ou seja, considerando as matrizes de Hankel definidas em (4.41). A segunda projecção \mathbf{P}_{i-1}^{ref} é portanto definida através de:

$$\mathbf{P}_{i-1}^{ref} = \mathbf{Y}_{f-} / \mathbf{Y}_{p+}^{ref} = \mathbf{O}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (4.155)$$

Note-se que a matriz de observabilidade \mathbf{O}_{i-1} pode ser obtida simplesmente através da eliminação das últimas n_e linhas da matriz \mathbf{O}_i , o que, utilizando a notação do *MatLab*, pode ser expresso através de:

$$\mathbf{O}_{i-1} = \mathbf{O}_i(1:n_e(i-1), :) \quad (4.156)$$

A sequência de estado dum filtro de Kalman $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$ pode então ser estimada através de:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{O}_{i-1}^\dagger \mathbf{P}_{i-1}^{ref} \quad (4.157)$$

A partir das séries de resposta é portanto possível estimar as duas sequências de estado $\hat{\mathbf{X}}_i$ e $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$. Considerando a expressão (2.94) da representação de estado dum sistema estocástico no tempo discreto, pode-se escrever o sistema de equações indicado em seguida:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix} \quad (4.158)$$

em que $\mathbf{Y}_{i|i}$ é uma matriz de Hankel com apenas um bloco de linhas e \mathbf{W}_i e \mathbf{V}_i são os resíduos, ou seja, as séries correspondentes ao ruído (respectivamente, ruído do processo e ruído de medição).

Uma vez que as respostas e as sequências de estado são conhecidas, e que os resíduos não são correlacionados com a sequência de estado $\hat{\mathbf{X}}_i$, considerando a expressão (4.158) pode-se chegar à seguinte solução de mínimos quadrados para estimar as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i^\dagger \quad (4.159)$$

Desta forma, \mathbf{W}_i e \mathbf{V}_i são os resíduos da solução de mínimos quadrados assim avaliada para as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} , podendo, por sua vez, ser estimados através de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i \quad (4.160)$$

As matrizes de correlação dos resíduos (matrizes \mathbf{Q} , \mathbf{Rv} e \mathbf{S}) podem então ser estimadas através de:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{Rv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i^T & \mathbf{V}_i^T \end{bmatrix} \quad (4.161)$$

Note-se que em termos de identificação modal dum sistema, é suficiente a avaliação das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} , pelo que os passos fundamentais do método SSI-DATA estão já apresentados. No entanto, para alguns cálculos de pós-processamento que adiante serão descritos, é necessário estimar as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 . Assim, considerando as expressões (2.99) apresentadas no capítulo 2, pode-se transformar as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{Q} , \mathbf{Rv} e \mathbf{S} nas matrizes \mathbf{A} , \mathbf{G} , \mathbf{C} e \mathbf{R}_0 . Em primeiro lugar, é necessário resolver uma equação de Lyapunov para determinar a matriz $\mathbf{\Sigma}$:

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (4.162)$$

Em seguida podem-se determinar as matrizes \mathbf{R}_0 e \mathbf{G} através de:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{C} \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T + \mathbf{Rv} \quad (4.163)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T + \mathbf{S} \quad (4.164)$$

Peeters (2000) salienta que só se o número de blocos de linhas das matrizes de Hankel for infinito ($i \rightarrow \infty$) é que a avaliação das matrizes \mathbf{Q} , \mathbf{Rv} e \mathbf{S} através de (4.161) resulta em estimativas assintoticamente não enviesadas. Como na prática essa condição nunca é satisfeita ($i \neq \infty$), as estimativas de \mathbf{Q} , \mathbf{Rv} e \mathbf{S} (e portanto também de \mathbf{R}_0 e \mathbf{G}) são sempre obtidas com um erro de viés.

Para algumas operações de pós-processamento, é ainda necessário converter as matrizes identificadas nas do modelo de inovação para a frente. Para tal, é preciso resolver a equação de Riccati para determinar \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T + (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)(\mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{C}^T)^T \quad (4.165)$$

A matriz de correlação das inovações \mathbf{R}_e é então determinada através de:

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_0 - \mathbf{C} \mathbf{P} \mathbf{C}^T \quad (4.166)$$

A matriz de ganho do filtro de Kalman \mathbf{K}_a é por sua vez obtida através de:

$$\mathbf{K}_a = (\mathbf{G} - \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{C}^T) \mathbf{R}_e^{-1} \quad (4.167)$$

Aspectos relacionados com a implementação do método SSI-DATA:

Conforme se indicou anteriormente, no método SSI-DATA, o cálculo da projecção do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado”, é efectuado através da utilização do algoritmo de decomposição QR. Esse é de facto um dos passos mais importantes do método e é também o mais “pesado” em termos computacionais e que o torna mais moroso do que o método SSI-COV. O algoritmo de decomposição QR é aplicado às matrizes de Hankel das séries de resposta, conforme se indica em seguida:

$$\mathbf{H}^{ref} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_p^{ref} \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{p+}^{ref} \\ \mathbf{Y}_{i|i}^{mov} \\ \mathbf{Y}_{f-} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_H \mathbf{Q}_H^T \quad (4.168)$$

em que $\mathbf{Q}_H (N \times N)$ é uma matriz ortogonal ($\mathbf{Q}_H^T \mathbf{Q}_H = \mathbf{Q}_H \mathbf{Q}_H^T = \mathbf{I}$); e $\mathbf{R}_H ((r + n_e) i \times N)$ é uma matriz triangular inferior.

Uma vez que $(r + n_e) i < N$, é possível simplificar o resultado da decomposição QR da matriz \mathbf{H}^{ref} , omitindo os valores nulos em \mathbf{R}_H e as correspondentes linhas em \mathbf{Q}_H^T . Pode também ser vantajoso, em termos de implementação do método SSI-DATA, considerar que as matrizes \mathbf{R}_H e \mathbf{Q}_H^T são constituídas pelas submatrizes indicadas em seguida:

$$\mathbf{H}^{ref} = \begin{matrix} & \begin{matrix} r i & r & n_e - r & n_e(i-1) \end{matrix} & \begin{matrix} N \rightarrow \infty \\ \mathbf{Q}_{H1}^T \\ \mathbf{Q}_{H2}^T \\ \mathbf{Q}_{H3}^T \\ \mathbf{Q}_{H4}^T \end{matrix} & \begin{matrix} r i \\ r \\ n_e - r \\ n_e(i-1) \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{H11} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{H21} & \mathbf{R}_{H22} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{H31} & \mathbf{R}_{H32} & \mathbf{R}_{H33} & 0 \\ \mathbf{R}_{H41} & \mathbf{R}_{H42} & \mathbf{R}_{H43} & \mathbf{R}_{H44} \end{bmatrix} \quad (4.169)$$

Em (4.169) indica-se também o número de linhas e de colunas das submatrizes de \mathbf{R}_H e de \mathbf{Q}_H^T . Considerando essas submatrizes, as projecções do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado” podem ser expressas através de (Peeters, 2000):

$$\mathbf{P}_i^{ref} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{H\ 21} \\ \mathbf{R}_{H\ 31} \\ \mathbf{R}_{H\ 41} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{H\ 1}^T \quad \mathbf{P}_{i-1}^{ref} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{H\ 41} & \mathbf{R}_{H\ 42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{H\ 1}^T \\ \mathbf{Q}_{H\ 2}^T \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

A matriz $\mathbf{Y}_{i|i}$ que é utilizada na expressão (4.159) para estimar as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} , também pode ser expressa em termos das submatrizes de \mathbf{R}_H e de \mathbf{Q}_H^T , conforme se indica em seguida:

$$\mathbf{Y}_{i|i} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{H\ 21} & \mathbf{R}_{H\ 22} & 0 \\ \mathbf{R}_{H\ 31} & \mathbf{R}_{H\ 32} & \mathbf{R}_{H\ 33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{H\ 1}^T \\ \mathbf{Q}_{H\ 2}^T \\ \mathbf{Q}_{H\ 3}^T \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

Todas as matrizes do lado direito da expressão (4.159) podem portanto ser expressas em termos das submatrizes de \mathbf{R}_H e de \mathbf{Q}_H^T . Note-se ainda que nessa expressão os factores \mathbf{Q}_H cancelam-se mutuamente, em virtude de \mathbf{Q}_H ser uma matriz ortogonal. Assim, de facto no primeiro passo do método SSI-DATA, que consiste na aplicação do algoritmo de decomposição QR à matriz de Hankel das séries de resposta, só é necessário determinar o factor \mathbf{R}_H . Note-se que por exemplo em *MatLab* a função *qr* permite que só seja efectuada a determinação desse factor.

No primeiro passo do método SSI-DATA há uma importante redução da informação, uma vez que a matriz de Hankel \mathbf{H}^{ref} é substituída pela matriz \mathbf{R}_H . Esse primeiro passo do método é também o mais exigente em termos computacionais, conforme já se salientou.

Um dos aspectos mais importantes nos métodos paramétricos de identificação modal é a determinação da ordem dos modelos a ajustar à informação experimental. Referiu-se anteriormente que no método SSI-DATA, a ordem do modelo a ajustar às séries de resposta resulta da decomposição em valores singulares da matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} , sendo dada pelo número de valores singulares não nulos. No entanto, na prática, a determinação dessa ordem não é tão simples, em virtude dos aspectos já salientados quando se abordaram os métodos de identificação por ajuste às funções de correlação da resposta. Assim, conforme foi descrito para esses métodos, para a determinação da ordem dos modelos a identificar com o método SSI-DATA, também é conveniente utilizar diagramas de estabilização.

Para a construção dos diagramas de estabilização é necessário analisar modelos de diferentes ordens, comparando os correspondentes parâmetros modais com os obtidos com modelos de ordem

imediatamente inferior. Para tal, o número de blocos de linhas i na matriz de Hankel \mathbf{H}^{ref} deve ser tal que $r \cdot i \geq n_{máx}$ (sendo $n_{máx}$ a máxima ordem que se pretende considerar no diagrama de estabilização). Assim, a construção do diagrama de estabilização pode ser implementada de modo a não repetir determinadas fases do método SSI-DATA, nomeadamente, a decomposição QR da matriz de Hankel \mathbf{H}^{ref} e a decomposição em valores singulares da matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} . Os modelos de diferentes ordens, podem então ser obtidos, considerando em correspondência, diferentes números de valores e vectores singulares da matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} , no cálculo da matriz de observabilidade \mathbf{O}_i e da sequência de estado $\hat{\mathbf{X}}_i$, de acordo com a expressão (4.154).

Variantes do método SSI-DATA:

Tal como no método SSI-COV, no método SSI-DATA há também três variantes que, neste caso, correspondem a diferentes ponderações que são efectuadas sobre a matriz da projecção \mathbf{P}_i^{ref} . Essas três variantes do método SSI-DATA podem ser descritas numa forma unificada, considerando para tal duas matrizes de ponderação \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 , a primeira das quais multiplica a matriz da projecção à esquerda enquanto que a segunda multiplica-a à direita, conforme se indica em seguida:

$$\mathbf{P}_{i,w}^{ref} = \mathbf{W}_1 \mathbf{P}_i^{ref} \mathbf{W}_2 \quad (4.172)$$

O algoritmo de decomposição em valores singulares indicado na expressão (4.153) é assim aplicado à matriz da projecção ponderada $\mathbf{P}_{i,w}^{ref}$. As três variantes do método SSI-DATA correspondem a diferentes escolhas das matrizes de ponderação \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 . A matriz \mathbf{W}_1 deve ser definida de modo a ter característica completa, enquanto que a matriz \mathbf{W}_2 deve ser definida de modo a que a característica de \mathbf{Y}_p^{ref} seja igual à característica do produto matricial $\mathbf{Y}_p^{ref} \mathbf{W}_2$ (Van Overschee e De Moor, 1996).

A ponderação que as matrizes \mathbf{W}_1 e \mathbf{W}_2 introduzem na projecção de espaços, determina a base do espaço de estado onde é feita a avaliação das matrizes do sistema que é identificado.

As três variantes do método SSI-DATA são então:

- Método UPC (*unweighted principal components*) que será designado abreviadamente por SSI-DATA(UPC). Neste caso as matrizes de ponderação são iguais à matriz identidade ($\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{W}_2 = \mathbf{I}$), ou seja o método SSI-DATA(UPC) corresponde ao procedimento que acima foi descrito genericamente para o método SSI-DATA.

- Método PC (*principal components*) que será designado abreviadamente por SSI-DATA(PC). Neste caso as matrizes de ponderação são dadas por:

$$\begin{aligned} W_1 &= I \\ W_2 &= (Y_p^{ref})^T \left(Y_p^{ref} (Y_p^{ref})^T \right)^{-1/2} Y_p^{ref} \end{aligned} \quad (4.173)$$

- Método CVA (*canonical variate analysis*) que será designado abreviadamente por SSI-DATA(CVA) e no qual os valores singulares da matriz da projecção ponderada são interpretados como sendo os cosenos dos ângulos principais entre dois subespaços, conforme referido anteriormente para o método SSI-COV(CVA). Neste caso as matrizes de ponderação são dadas por:

$$\begin{aligned} W_1 &= (Y_f Y_f^T)^{-1/2} \\ W_2 &= I \end{aligned} \quad (4.174)$$

Tal como indicado anteriormente para o método SSI-COV(CVA), o interesse na variante SSI-DATA(CVA) está no efeito que as matrizes de ponderação têm em termos de dar um peso maior a modos de vibração que contribuam pouco para a resposta que está a ser analisada, permitindo assim identificar melhor as suas características.

Neste método SSI-DATA(CVA), após o cálculo da decomposição em valores e vectores singulares da matriz da projecção ponderada, a matriz dos vectores singulares U_l deve ser corrigida através de:

$$U_l = W_1^{-1} U_l = (Y_f Y_f^T)^{1/2} U_l \quad (4.175)$$

Funções de densidade espectral dos modelos identificados com o método SSI-DATA:

Conforme se referiu e exemplificou para os métodos com ajuste às funções de correlação da resposta dos sistemas, para efeitos de validação dos resultados obtidos com métodos paramétricos de identificação modal, é importante efectuar a comparação das funções de densidade espectral correspondentes aos modelos identificados, com essas mesmas funções estimadas com técnicas não paramétricas (com utilização da FFT).

Com o método SSI-DATA são identificadas as matrizes A , G , C e R_0 , pelo que as funções de densidade espectral dos modelos identificados com esse método, podem ser avaliadas por aplicação das expressões (4.105) e (4.106) (também já apresentadas no capítulo 2).

Exemplo: Exemplifica-se em seguida a aplicação das três variantes do método SSI-DATA tendo em conta os registos obtidos no ensaio realizado no modelo de um edifício de 4 pisos, os quais têm vindo a ser considerados para exemplificar os diversos métodos de identificação modal estocástica. Trata-se de séries amostradas a 62,5 Hz com um total de 114688 valores, o que corresponde a uma duração total de cerca de 30 minutos.

Para aplicar as três variantes do método SSI-DATA foram desenvolvidos programas em *MatLab*. Esses programas têm implementada a técnica proposta por Peeters (2000) baseada nas séries de referência, no entanto, para os resultados que se apresentam em seguida, consideraram-se todas as séries com sendo de referência, situação em que essa técnica torna-se coincidente com os algoritmos originais do método SSI-DATA.

Nas figuras 4.62 a 4.64 apresentam-se os diagramas de estabilização correspondentes à aplicação das três variantes do método SSI-DATA que foram descritas anteriormente.

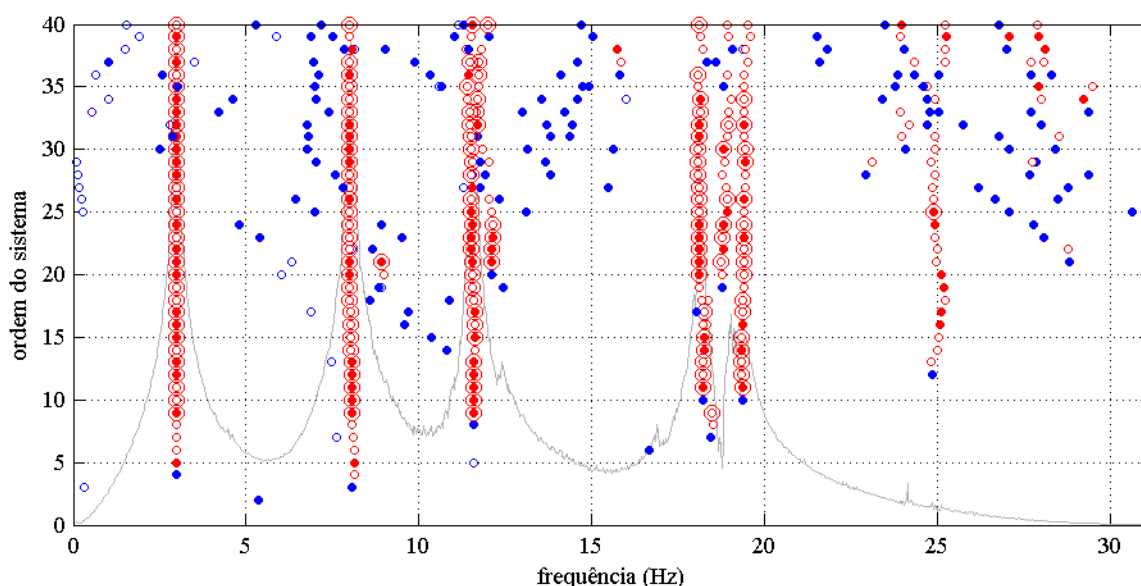


Figura 4.62 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-DATA(UPC).

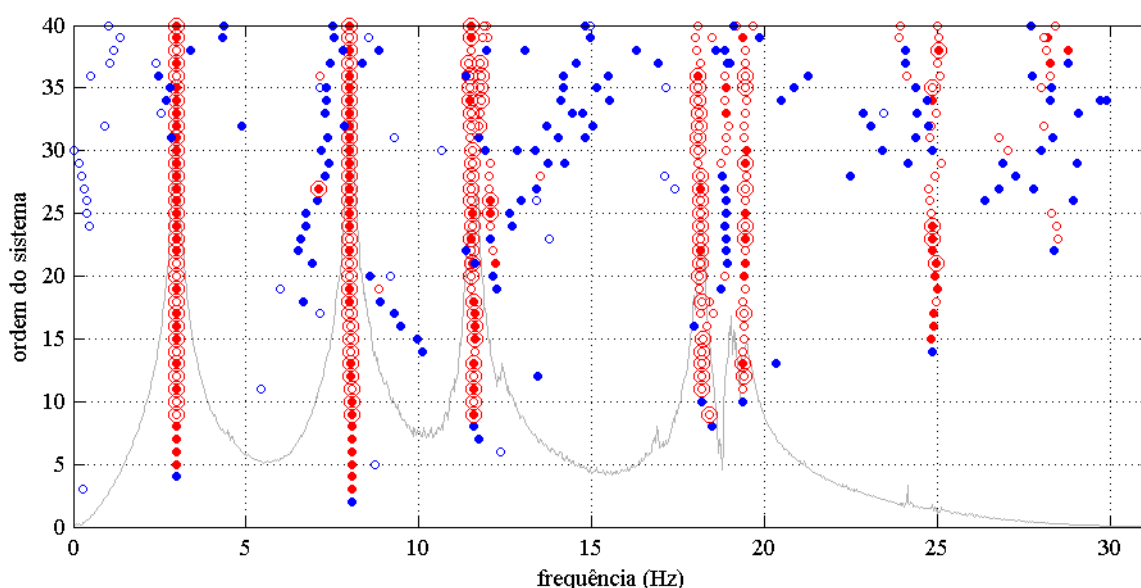


Figura 4.63 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-DATA(PC).

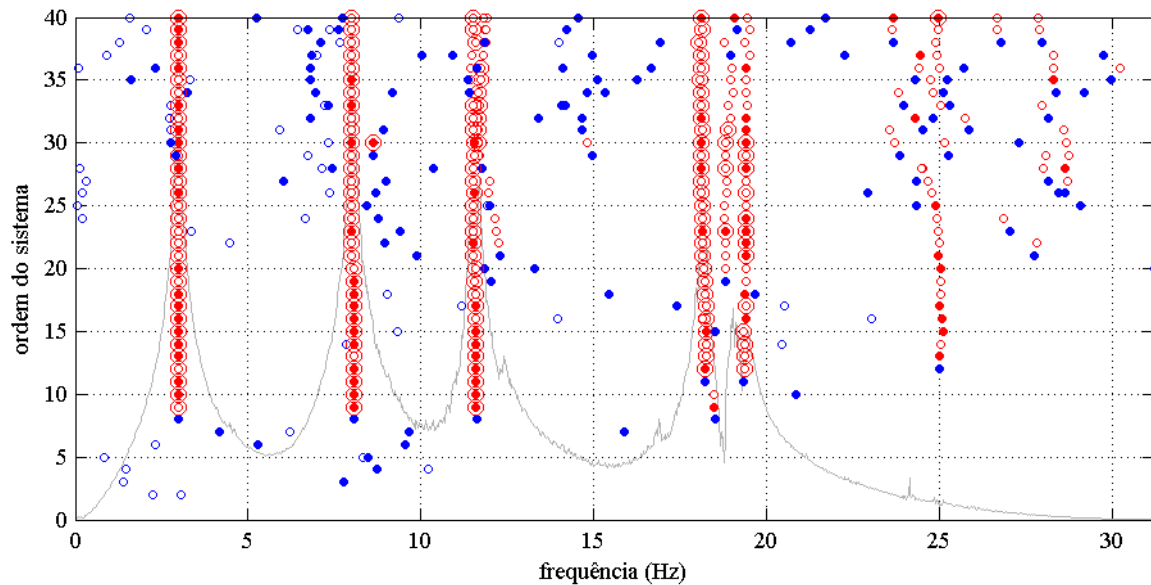


Figura 4.64 – Diagrama de estabilização resultante da aplicação do método SSI-DATA(CVA).

Os diagramas de estabilização representados nas figuras 4.62 a 4.64 foram construídos até à ordem máxima de 40. Analisando esses diagramas de estabilização, podem-se identificar as linhas verticais dos pólos correspondentes aos 4 modos de vibração do modelo na direcção longitudinal. Para a identificação das características desses modos de vibração, seleccionaram-se modelos com ordens de 34, 31 e 34, respectivamente, para as variantes UPC, PC e CVA do método SSI-DATA. No quadro 4.17 resumem-se essas características.

Quadro 4.17 – Características dinâmicas identificadas com as três variantes do método SSI-DATA.

modo	1º modo			2º modo			3º modo			4º modo		
método	UPC	PC	CVA	UPC	PC	CVA	UPC	PC	CVA	UPC	PC	CVA
f (Hz)	2,98	2,97	2,98	8,00	7,99	8,00	11,69	11,72	11,67	18,14	18,09	18,12
ξ (%)	0,60	0,64	0,63	0,96	0,73	0,75	1,46	0,70	1,33	0,86	0,58	0,79
piso i	Φ_{i1}			Φ_{i2}			Φ_{i3}			Φ_{i4}		
1	+0,184	+0,185	+0,185	+0,669	+0,669	+0,669	-0,419	-0,420	-0,418	+1,000	+1,000	+1,000
2	+0,381	+0,381	+0,381	+1,000	+1,000	+1,000	-0,330	-0,335	-0,339	-0,748	-0,735	-0,740
3	+0,811	+0,813	+0,810	+0,224	+0,224	+0,225	+1,000	+1,000	+1,000	+0,149	+0,143	+0,143
4	+1,000	+1,000	+1,000	-0,708	-0,709	-0,709	-0,591	-0,586	-0,594	-0,032	-0,031	-0,028

No que se refere às características dinâmicas identificadas, os resultados obtidos com as três variantes do método SSI-DATA, são bastante concordantes entre si (ver quadro 4.17).

Na figura 4.65 apresentam-se os espectros médios calculados a partir das matrizes identificadas com as três variantes do método SSI-DATA, comparando-os com o correspondente espectro médio estimado com utilização do algoritmo da FFT (aplicado às funções RD). Como se pode verificar através desses espectros, há um bom ajuste entre os dados experimentais e os modelos identificados, embora no caso de alguns modos (especialmente o 3º e o 4º) esse ajuste pudesse ser um pouco melhor. Note-se que esse pior ajuste no que se refere aos 3º e 4º modos, deve traduzir-se também em estimativas um pouco por excesso para os respectivos coeficientes de amortecimento (o que de facto acontece tendo em conta os valores estimados através de outros métodos).

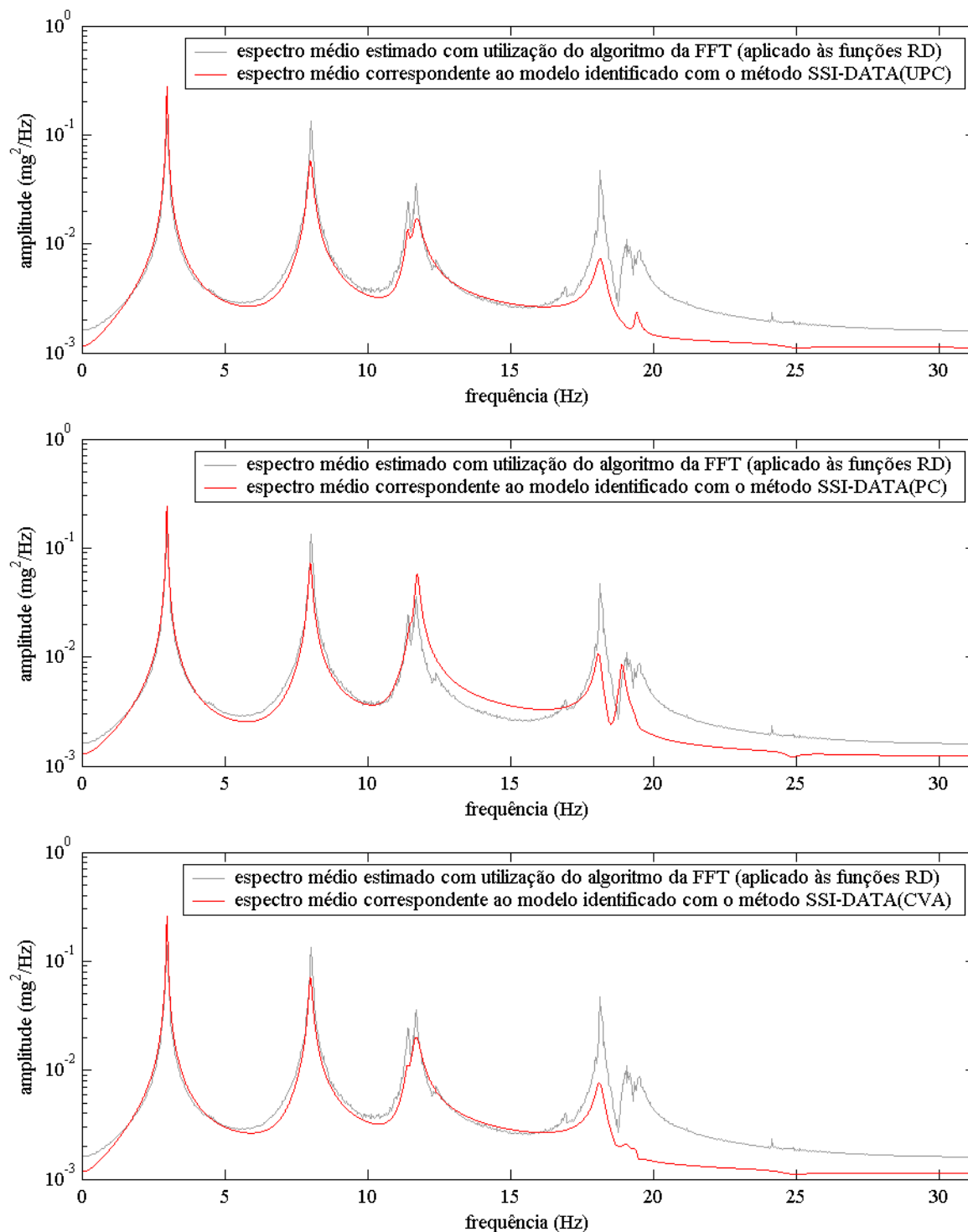


Figura 4.65 – Espectros médios experimentais e calculados com os modelos identificados com as três variantes do método SSI-DATA.

Nas figuras 4.66 e 4.67 apresentam-se duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas com o método SSI-DATA(UPC) (saliente-se que as componentes modais identificadas com os métodos SSI-DATA(PC) e SSI-DATA(CVA) são muito próximas das obtidas com o método SSI-DATA(UPC), pelo que a sua representação gráfica não difere muito das apresentadas nas figuras 4.66 e 4.67).

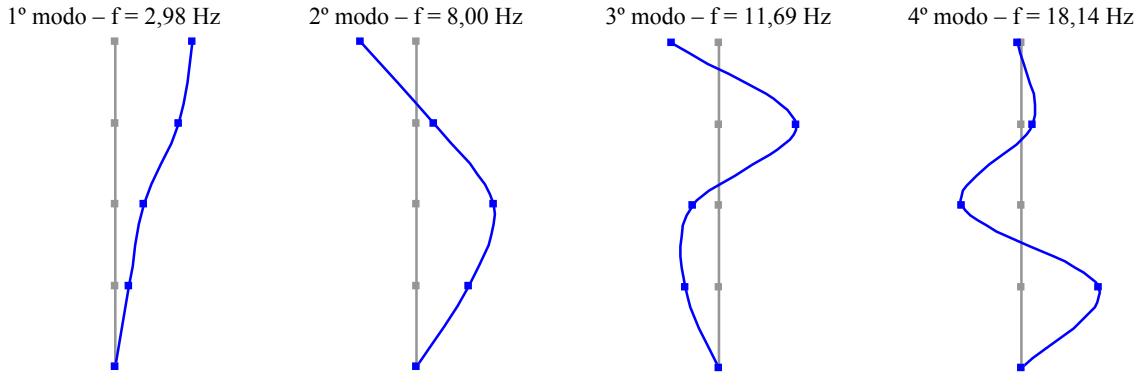


Figura 4.66 – Representação gráfica das componentes modais identificadas com o método SSI-DATA(UPC).

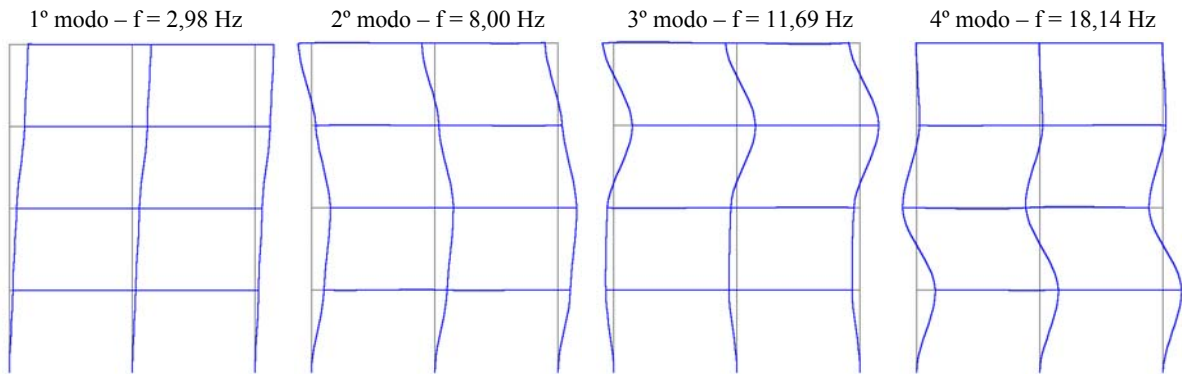


Figura 4.67 – Deformadas para representação das configurações modais identificadas com o método SSI-DATA(UPC).

Separação da resposta observada em respostas modais:

Uma das operações de pós-processamento, que pode ser efectuada a partir das matrizes identificadas com o método SSI-DATA é a separação da resposta observada dum sistema nas respostas correspondentes a cada um dos seus modos de vibração. Descreve-se em seguida a técnica apresentada por Peeters (2000) que pode ser utilizada para esse fim.

Para aplicar a referida técnica, assume-se que o sistema identificado é escrito sob a forma do modelo de inovação para a frente (ver capítulo 2):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_a \mathbf{e}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{4.176}$$

O modelo traduzido na expressão (4.176) pode ser escrito em termos de coordenadas modais através de:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{m,k+1} &= \mathbf{\Lambda}_d \tilde{\mathbf{x}}_{m,k} + \mathbf{K}_{am} \mathbf{e}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}_{m,k} + \mathbf{e}_k\end{aligned}\tag{4.177}$$

em que $\tilde{\mathbf{x}}_{m,k} = \Psi^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k$ (vector de estado em termos de coordenadas modais) e $\mathbf{K}_{am} = \Psi^{-1} \mathbf{K}_m$ (matriz de ganho dum filtro de Kalman em termos de coordenadas modais).

Uma vez que a matriz Λ_d em (4.177) é uma matriz diagonal, cada elemento do vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}_{m,k}$ representa a contribuição de um único modo dum sistema.

Explicitando a segunda equação de (4.177) em termos de \mathbf{e}_k e substituindo a expressão obtida na primeira equação, obtém-se a seguinte representação de estado dum sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{m,k+1} &= (\Lambda_d - \mathbf{K}_{am} \mathbf{V}) \tilde{\mathbf{x}}_{m,k} + \mathbf{K}_{am} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{e}_k &= -\mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}_{m,k} + \mathbf{y}_k\end{aligned}\tag{4.178}$$

Após se ter efectuado a identificação dum sistema utilizando o método SSI-DATA, as matrizes Λ_d , \mathbf{K}_{am} e \mathbf{V} são conhecidas, pelo que a expressão (4.178) pode ser utilizada para avaliar o vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}_{m,k}$ e o vector \mathbf{e}_k , considerando como entrada em (4.178) as respostas medidas \mathbf{y}_k . O vector \mathbf{e}_k representa assim o erro de predição, ou seja, a parte da resposta medida que não é modelada com o sistema representado através das matrizes identificadas.

A partir do vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}_{m,k}$ pode-se avaliar a resposta prevista com o modelo identificado, utilizando para tal a expressão:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}_{m,k}\tag{4.179}$$

Uma vez que cada elemento do vector de estado $\tilde{\mathbf{x}}_{m,k}$ representa a contribuição de um único modo, a resposta prevista $\tilde{\mathbf{y}}_k$ pode também ser separada em contribuições modais. Uma maneira prática de efectuar essa separação consiste em, para cada modo, efectuar o produto da expressão (4.179) anulando todas as colunas de \mathbf{V} excepto as duas correspondentes ao modo em questão.

Exemplo: Ilustra-se em seguida a técnica de separação da resposta observada nas respostas correspondentes a cada modo dum sistema, em cada grau de liberdade experimental. Para tal consideraram-se as matrizes identificadas com o método SSI-DATA(UPC) cujos resultados em termos de parâmetros modais foram já apresentados. Trata-se portanto das matrizes dum modelo de ordem 34 identificado com uma matriz de Hankel das séries de resposta, formada de modo a possibilitar a identificação de modelos até uma ordem de 40.

Para aplicar a técnica descrita foi desenvolvido um programa em *MatLab*.

Nas figuras 4.68 a 4.73 apresentam-se amostras simultâneas das séries da resposta observada, da resposta em cada um dos 4 modos de vibração identificados e ainda do erro de predição, em cada um dos graus de liberdade considerados (os deslocamentos horizontais na direcção longitudinal nos 4 pisos do modelo do edifício).

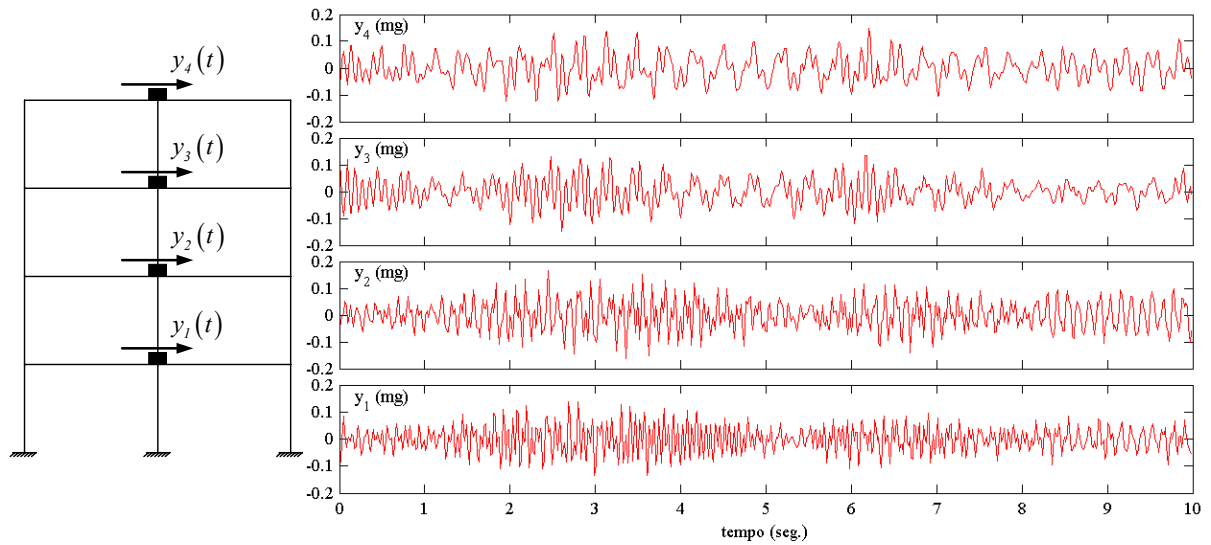


Figura 4.68 – Amostras das séries de resposta nos 4 pisos do modelo.

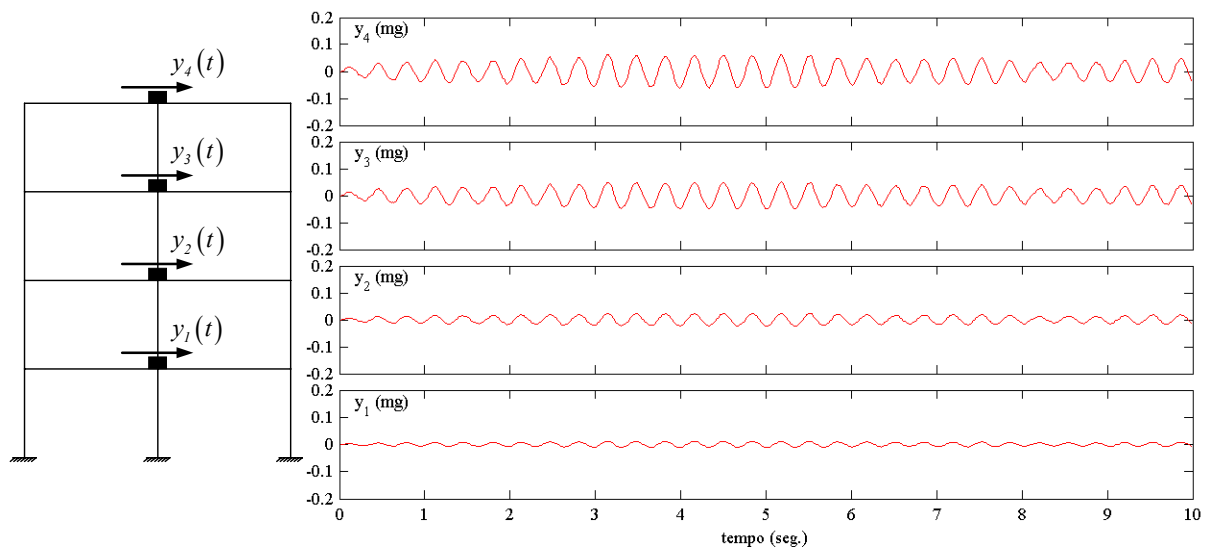


Figura 4.69 – Amostras das séries de resposta no 1º modo nos 4 pisos do modelo.

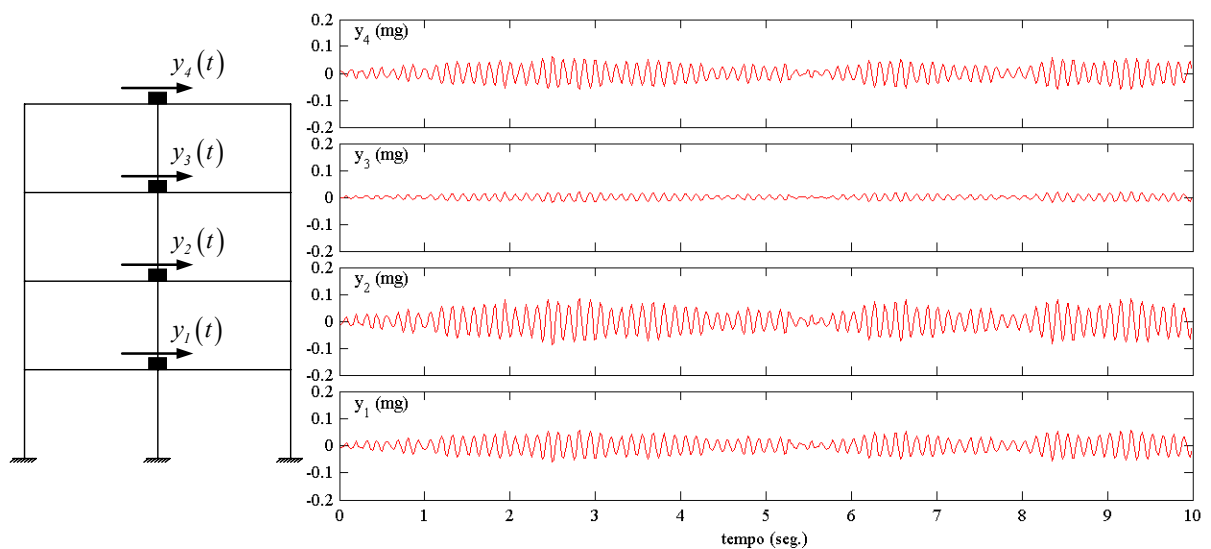


Figura 4.70 – Amostras das séries de resposta no 2º modo nos 4 pisos do modelo.

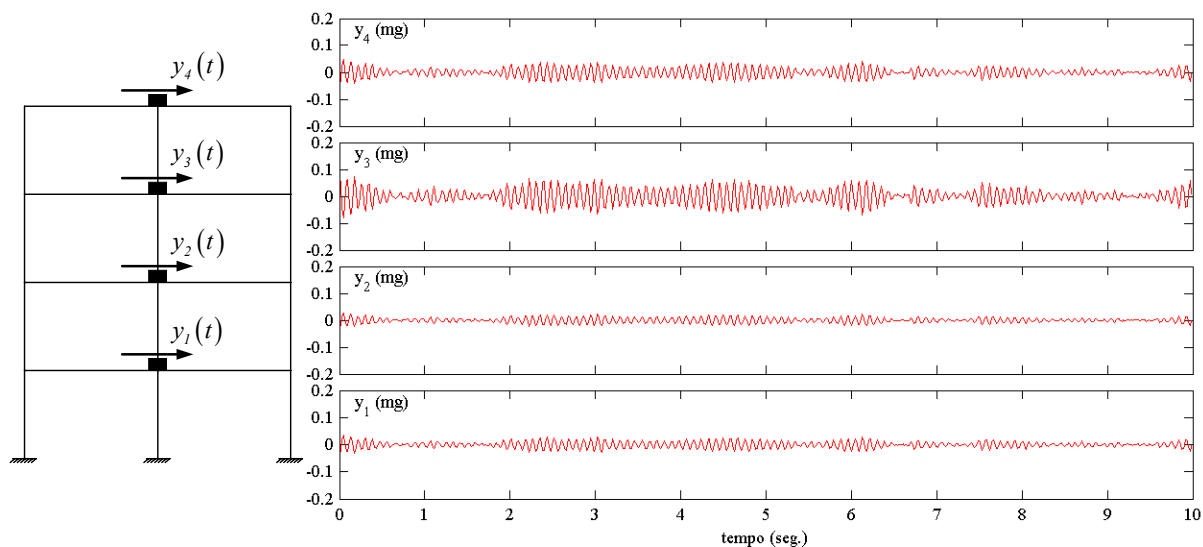


Figura 4.71 – Amostras das séries de resposta no 3º modo nos 4 pisos do modelo.

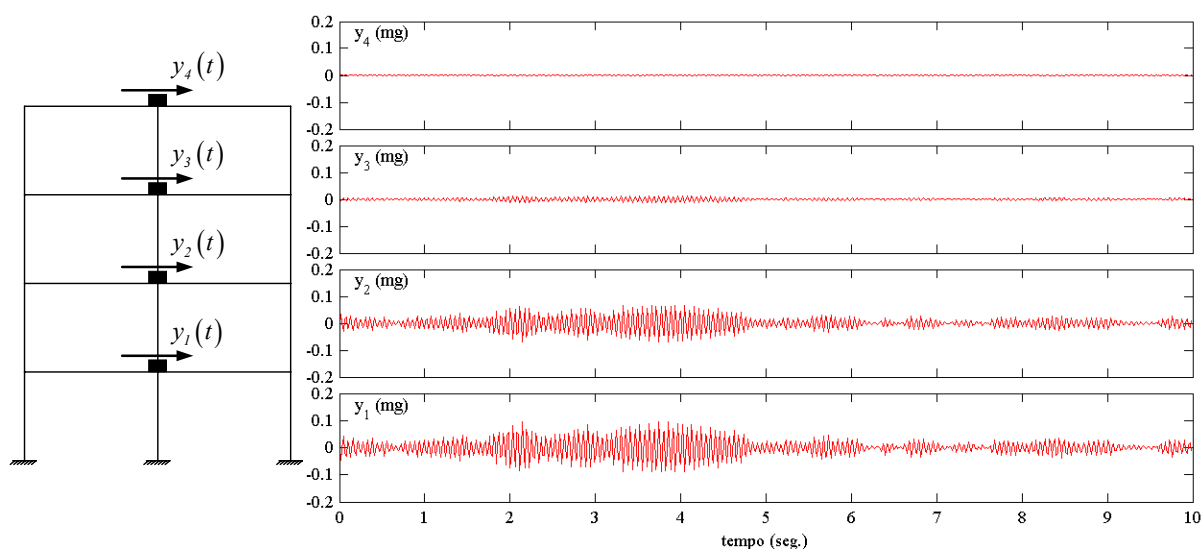


Figura 4.72 – Amostras das séries de resposta no 4º modo nos 4 pisos do modelo.

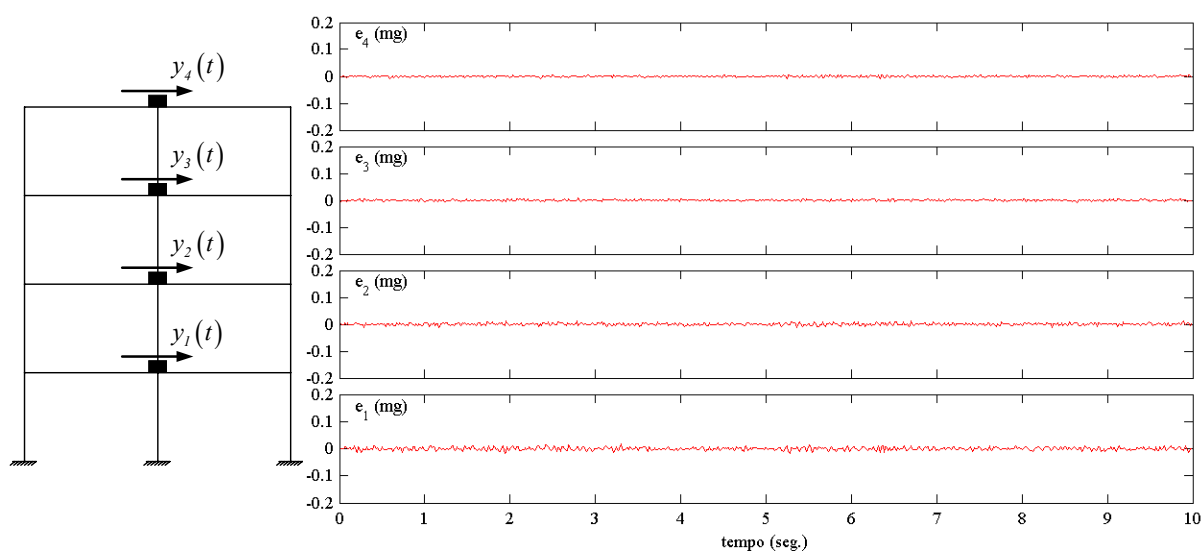


Figura 4.73 – Amostras das séries do erro de predição nos 4 pisos do modelo.

4.3.4.2 Modelos ARMAV

No capítulo 2 abordou-se brevemente a representação de sistemas através de modelos ARMAV, salientando-se a sua equivalência com a representação de estado de sistemas estocásticos no tempo discreto. Refere-se agora a utilização do ajuste de modelos desse tipo com vista à identificação das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil.

A utilização de modelos ARMAV, para a identificação modal de estruturas de engenharia civil, foi objecto de trabalhos desenvolvidos por Piombo *et al.* (1993) e Andersen (1997).

O ajuste de modelos ARMAV às séries de resposta obtidas experimentalmente é efectuado utilizando o chamado método do erro de predição (PEM) (Ljung, 1999). Com este método os parâmetros matriciais dos modelos ARMAV são estimados através da minimização do erro de predição. A aplicação do método PEM resulta num problema de optimização não linear, uma vez que o erro de predição depende dos próprios parâmetros que são estimados. Este problema de optimização não linear é resolvido através de técnicas numéricas tais como o método de *Gauss-Newton* ou o método de *Levenberg-Marquardt* (Andersen *et al.*, 1996).

A utilização de modelos ARMAV para a identificação modal de estruturas de engenharia civil tem alguns inconvenientes relacionados com a resolução do problema de optimização não linear referido no parágrafo anterior, nomeadamente (Peeters, 2000): o exigir um grande esforço computacional com tempos de execução muito longos; o facto de não haver garantia quanto à convergência do método de resolução; a existência de mínimos locais; e a sensibilidade à solução inicial. Estes inconvenientes, bem como o desenvolvimento do método SSI-DATA anteriormente apresentado, levaram a que se tenha perdido consideravelmente o interesse que houve há alguns anos (Piombo *et al.*, 1993; Andersen, 1997) na utilização dos modelos ARMAV. Por este motivo, optou-se por neste trabalho fazer apenas uma breve referência a este tipo de métodos de identificação modal estocástica, sem a descrição pormenorizada e posterior exemplificação que foi apresentada para os métodos anteriormente abordados.

4.3.4.3 Modelos ARV

Conforme se indicou no capítulo 2, as características dinâmicas dos sistemas estão relacionadas apenas com a parte auto-regressiva dos modelos ARMAV, pelo que, para efeitos de identificação modal de sistemas estruturais é possível utilizar modelos que apenas têm essa parte auto-regressiva, designados por modelos vectoriais auto-regressivos (ARV).

Verifica-se também que o problema de optimização não linear, que resulta da aplicação do método PEM ao ajuste de modelos ARMAV, é devido à parte de média móvel desses modelos. Assim,

omitindo essa parte de média móvel, a aplicação do método PEM, agora a um modelo ARV, resulta num problema de mínimos quadrados, cuja resolução é mais imediata do que a do problema de optimização não linear que é necessário resolver para o ajuste de modelos ARMAV.

A questão que se coloca com a utilização de modelos ARV para a modelação dinâmica de sistemas estruturais, tem a ver com a ordem que é necessário considerar nesses modelos. A única forma de utilizar um modelo ARV, em substituição dum modelo ARMAV, é considerando ordens muito elevadas, teoricamente infinitas (Peeters, 2000). Esta exigência faz com que os modelos assim identificados tenham um número elevado de pólos que não correspondem a modos de vibração dos sistemas, o que dificulta a análise de selecção dos pólos correspondentes a esses modos (por exemplo, num diagrama de estabilização). Ainda assim, há alguns trabalhos onde é aplicada a identificação de modelos ARV com vista a efectuar a caracterização dinâmica de sistemas estruturais (Pandit, 1991; De Roeck *et al.*, 1995; Hung *et al.*, 2003).

Devido à dificuldade indicada no parágrafo anterior, considera-se que o método de identificação modal estocástica com ajuste de modelos ARV não tem vantagens significativas em relação ao método SSI-DATA (limitando esta comparação aos métodos de ajuste às séries de resposta no tempo). Neste trabalho, optou-se assim por fazer apenas uma breve referência a este método.

4.4 Comparação dos resultados obtidos com os diversos métodos exemplificados

Neste capítulo foram descritos e exemplificados um total de 16 métodos de identificação modal estocástica, sendo alguns deles apenas ligeiras variantes dos outros. Os resultados que foram obtidos com cada um desses métodos, considerando as acelerações registadas num ensaio realizado num modelo de um edifício de 4 pisos, foram apresentados ao longo do capítulo, imediatamente após se terem descrito os fundamentos e procedimentos de cada um dos métodos. Repete-se em seguida a apresentação desses resultados, de modo a efectuar a sua análise comparativa numa forma mais clara e imediata.

Nos quadros 4.18 a 4.21 apresentam-se então as características identificadas com cada um dos 16 métodos de identificação modal estocástica, para cada um dos 4 modos de vibração na direcção longitudinal do modelo do edifício de 4 pisos.

Note-se que os métodos BFD e FDD não têm em si mesmo uma técnica para estimar os coeficientes de amortecimento, pelo que os valores apresentados nos quadros 4.18 a 4.21 foram obtidos com o método da meia potência e com o método de ajuste dum espectro analítico (conforme está indicado nos quadros). O mesmo se passa relativamente aos métodos RD-BFD e RD-FDD, para os quais, no entanto, só se utilizou o método de ajuste dum espectro analítico.

Quadro 4.18 – Características identificadas para o 1º modo de vibração.

método	BFD	FDD	EFDD	RD-BFD	RD-FDD	RD-EFDD	ITD	MRITD
f (Hz)	2,96	2,96	2,98	2,96	2,96	2,98	2,97	2,97
ξ (%)	1,35 ^(a) 0,73 ^(b)	1,35 ^(a) 0,73 ^(b)	0,80	0,87 ^(b)	0,87 ^(b)	0,83	0,77	0,78
Φ_{i1}	1	+0,189	+0,190	+0,184	+0,187	+0,187	+0,187	+0,187
	2	+0,385	+0,385	+0,380	+0,383	+0,383	+0,383	+0,383
	3	+0,811	+0,811	+0,812	+0,811	+0,811	+0,811	+0,811
	4	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
método	LSCE	PTD	SSI-COV			SSI-DATA		
			PC	UPC	CVA	UPC	PC	CVA
f (Hz)	2,97	2,97	2,97	2,97	2,97	2,98	2,97	2,98
ξ (%)	0,79	0,79	0,77	0,76	0,77	0,60	0,64	0,63
Φ_{i1}	1	+0,185	+0,185	+0,187	+0,181	+0,187	+0,184	+0,185
	2	+0,382	+0,379	+0,383	+0,385	+0,383	+0,381	+0,381
	3	+0,811	+0,809	+0,811	+0,802	+0,811	+0,811	+0,813
	4	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000

(a) método da meia potência (b) método de ajuste dum espectro analítico

Quadro 4.19 – Características identificadas para o 2º modo de vibração.

método	BFD	FDD	EFDD	RD-BFD	RD-FDD	RD-EFDD	ITD	MRITD
f (Hz)	8,03	8,03	8,04	8,03	8,03	8,03	8,02	8,02
ξ (%)	0,61 ^(a) 0,60 ^(b)	0,61 ^(a) 0,60 ^(b)	0,63	0,51 ^(b)	0,51 ^(b)	0,56	0,50	0,50
Φ_{i2}	1	+0,662	+0,662	+0,659	+0,662	+0,662	+0,662	+0,662
	2	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
	3	+0,230	+0,230	+0,234	+0,230	+0,230	+0,229	+0,229
	4	-0,708	-0,708	-0,708	-0,709	-0,709	-0,708	-0,708
método	LSCE	PTD	SSI-COV			SSI-DATA		
			PC	UPC	CVA	UPC	PC	CVA
f (Hz)	8,02	8,02	8,02	8,02	8,02	8,00	7,99	8,00
ξ (%)	0,47	0,52	0,51	0,52	0,51	0,96	0,73	0,75
Φ_{i2}	1	+0,659	+0,663	+0,662	+0,663	+0,662	+0,669	+0,669
	2	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
	3	+0,232	+0,226	+0,229	+0,229	+0,229	+0,224	+0,225
	4	-0,713	-0,699	-0,708	-0,708	-0,708	-0,709	-0,709

(a) método da meia potência (b) método de ajuste dum espectro analítico

Quadro 4.20 – Características identificadas para o 3º modo de vibração.

método	BFD	FDD	EFDD	RD-BFD	RD-FDD	RD-EFDD	ITD	MRITD
f (Hz)	11,69	11,69	11,66	11,69	11,69	11,69	11,67	11,69
ξ (%)	0,86 ^(a) 0,71 ^(b)	0,86 ^(a) 0,71 ^(b)	0,73	0,74 ^(b)	0,74 ^(b)	0,60	0,74	0,90
Φ_{i3}	1	-0,410	-0,410	-0,410	-0,403	-0,404	-0,402	-0,404
	2	-0,351	-0,352	-0,372	-0,343	-0,344	-0,339	-0,333
	3	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
	4	-0,587	-0,587	-0,588	-0,586	-0,586	-0,592	-0,582
método	LSCE	PTD	SSI-COV			SSI-DATA		
			PC	UPC	CVA	UPC	PC	CVA
f (Hz)	11,69	11,60	11,66	11,66	11,67	11,69	11,72	11,67
ξ (%)	0,64	1,11	0,71	0,79	0,79	1,46	0,70	1,33
Φ_{i3}	1	-0,338	-0,415	-0,405	-0,406	-0,405	-0,419	-0,418
	2	-0,289	-0,351	-0,341	-0,338	-0,340	-0,330	-0,335
	3	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
	4	-0,595	-0,608	-0,587	-0,587	-0,600	-0,591	-0,594

(a) método da meia potência (b) método de ajuste dum espectro analítico

Quadro 4.21 – Características identificadas para o 4º modo de vibração.

método	BFD	FDD	EFDD	RD-BFD	RD-FDD	RD-EFDD	ITD	MRITD
f (Hz)	18,16	18,16	18,18	18,13	18,13	18,17	18,16	18,16
ξ (%)	0,38 ^(a) 0,41 ^(b)	0,38 ^(a) 0,41 ^(b)	0,40	0,27 ^(b)	0,27 ^(b)	0,30	0,38	0,38
Φ_{i4}	1	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
	2	-0,750	-0,750	-0,748	-0,756	-0,756	-0,755	-0,751
	3	+0,149	+0,150	+0,145	+0,152	+0,152	+0,153	+0,149
	4	-0,034	-0,034	-0,029	-0,037	-0,037	-0,038	-0,034
método	LSCE	PTD	SSI-COV			SSI-DATA		
			PC	UPC	CVA	UPC	PC	CVA
f (Hz)	18,16	18,15	18,16	18,16	18,16	18,14	18,09	18,12
ξ (%)	0,31	0,41	0,38	0,39	0,38	0,86	0,58	0,79
Φ_{i4}	1	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000	+1,000
	2	-0,758	-0,752	-0,751	-0,752	-0,752	-0,748	-0,740
	3	+0,156	+0,164	+0,150	+0,146	+0,150	+0,149	+0,143
	4	-0,042	-0,039	-0,034	-0,034	-0,031	-0,032	-0,028

(a) método da meia potência (b) método de ajuste dum espectro analítico

Analisando os valores apresentados nos quadros 4.18 a 4.21, pode-se verificar que na maioria dos casos, há uma concordância bastante boa entre as características avaliadas com os 16 métodos de identificação modal aplicados ao exemplo considerado. Em termos das frequências e das componentes modais, os resultados são mesmo muito idênticos, mostrando que sob esse aspecto todos os métodos tiveram um bom desempenho.

Quanto aos coeficientes de amortecimento, há duas situações em que se verificam diferenças um pouco maiores:

- para o 1º modo, com o método da meia potência há uma avaliação por excesso desse parâmetro (conforme já se salientou, o método da meia potência tem essa desvantagem);
- para os 3º e 4º modos, com as variantes UPC e CVA do método SSI-DATA, também há uma avaliação por excesso do amortecimento (eventualmente com modelos de ordens diferentes das seleccionadas, poder-se-ia ter obtido amortecimentos mais próximos dos estimados com os restantes métodos).

O bom desempenho dos diversos métodos deve-se em grande parte à boa qualidade da informação experimental obtida no ensaio efectuado, apesar de se tratar de acelerações com amplitudes muito pequenas. Acresce ainda que os modos longitudinais do modelo do edifício, têm frequências relativamente afastadas e amortecimentos baixos, caso isso não se verificasse, os métodos paramétricos seriam em princípio melhores do que os métodos não paramétricos.

Ao compararem-se diferentes métodos, é natural colocar-se a questão de qual deles é o que permite obter melhores resultados. Neste caso não é possível responder a essa pergunta com exactidão, uma vez que não se conhecem as “verdadeiras” características dinâmicas do modelo. No entanto, pelos resultados obtidos que foram apresentados ao longo deste capítulo, pode-se afirmar que:

- no que se refere aos métodos no domínio da frequência (não paramétricos) os métodos em que as funções de densidade espectral são estimadas a partir das funções RD (métodos RD-BFD, RD-FDD e RD-EFDD) permitem que a identificação das características dinâmicas seja efectuada duma forma mais clara;
- quanto aos métodos paramétricos, aquele que pode ser considerado como tendo dado melhores resultados é o método SSI-COV(PC) tendo em conta a clareza do correspondente diagrama de estabilização e o bom ajuste das funções de correlação e de densidade espectral do modelo identificado a essas mesmas funções consideradas como dados do método e estimadas com utilização da FFT.

Em relação aos dois tipos de métodos de identificação estocástica em subespaços (SSI-COV e SSI-DATA) é interessante notar que em ambos há uma fase que pode ser entendida como de *rejeição do ruído*. No primeiro caso é a técnica de estimativa das funções de correlação, enquanto que no segundo, é o algoritmo de decomposição QR utilizado para determinar a projecção de espaços. Pelos resultados obtidos com o exemplo considerado, constata-se que a decomposição QR do método SSI-DATA não resultou em melhores resultados do que a estimativa das funções de correlação através do método RD. No entanto, será talvez excessivo generalizar esta conclusão, podendo-se considerar que os métodos SSI-COV e SSI-DATA são muito equivalentes em termos de identificação dos parâmetros modais (Peeters, 2000).

4.5 Implementação dos métodos de identificação modal estocástica

Para a elaboração deste trabalho foram desenvolvidos diversos programas para utilização dos métodos de identificação modal estocástica, quer no caso de exemplo considerado neste capítulo quer nas aplicações do capítulo 6. Esta componente do trabalho foi muito importante no sentido em que permitiu obter uma melhor compreensão dos métodos de identificação modal estocástica, para além de, obviamente, ter possibilitado obter os resultados que foram apresentados neste capítulo e que serão apresentados no capítulo 6.

À parte de alguns pequenos procedimentos, inicialmente desenvolvidos em *Fortran* e em *MathCad*, os programas elaborados foram desenvolvidos essencialmente em *LabView* e *MatLab*. Estas linguagens de programação, ou ambientes de desenvolvimento, permitiram efectuar esse trabalho de implementação dos métodos, com algumas vantagens relativamente a outras linguagens mais *tradicionais*. Essas vantagens resultam da existência de rotinas já desenvolvidas, nomeadamente com as funções de base para processamento de sinal e análise espectral (o que acontece nas duas linguagens) e a facilidade de implementação de rotinas que envolvam operações com matrizes (o que

de facto é uma particularidade do *MatLab* que foi fundamental, especialmente para os métodos no domínio do tempo).

Faz-se em seguida uma breve descrição dos programas desenvolvidos.

Programas desenvolvidos em LabView:

O programa mais elaborado que se desenvolveu em *LabView*, foi um programa onde se implementou o método básico no domínio da frequência (BFD). Esse programa, a que se deu a designação de **modal ID**, é constituído fundamentalmente por 6 módulos que o utilizador põe a executar a partir do painel frontal do programa principal, premindo o botão correspondente a cada um. Esses módulos são os seguintes:

- **configuration** – módulo para definição dos parâmetros a considerar no processamento ou para a sua leitura num ficheiro ASCII; esses parâmetros envolvem a definição da geometria do sistema estrutural em análise, a indicação do nome dos ficheiros onde estão os registos a analisar e dos pontos onde esses registos foram obtidos, o número de amostras em que os registos devem ser subdivididos para a estimativa das funções de densidade espectral e o tipo de janela de processamento de sinal a utilizar;
- **plot model** – módulo para visualização da geometria do sistema estrutural em análise;
- **check time data** – módulo para verificação dos registos, permitindo efectuar a sua integração, avaliação de valores máximos e rms, extracção de amostras e sua transferência automática para uma folha de *Excel*;
- **spectral matrix** – módulo para cálculo das estimativas das funções de densidade espectral utilizando a técnica devida a Welch (1967);
- **check spectra** – módulo que permite analisar, para quaisquer dois canais, os respectivos auto-espectros e espectro cruzado, a função de coerência e a amplitude e fase da estimativa da FRF de transmissibilidade;
- **select modes** – módulo no qual são avaliados os espectros normalizados médios (ANPSD) e onde pode ser feita a selecção dos seus picos e a avaliação das correspondentes componentes modais, escolhendo para referência qualquer um dos registos; estas componentes podem ser transferidas automaticamente para uma folha de *Excel*.

Note-se que o programa **modal ID** permite analisar a informação obtida em mais do que um ensaio com pontos de referência comuns de ensaio para ensaio.

Nas figuras 4.74 a 4.77 apresentam-se os painéis frontais e o código em LabView do programa principal **modal ID** e de três dos seus módulos (**check time data**, **check spectra** e **select modes**).

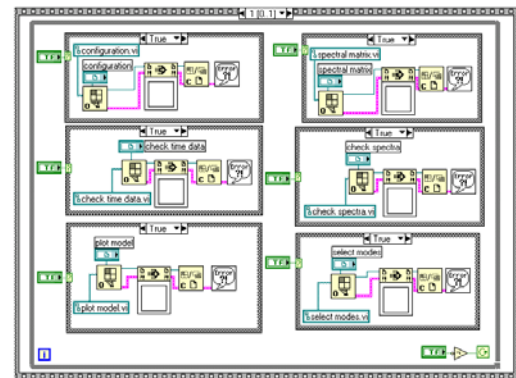


Figura 4.74 – Pannel frontal e código em *LabView* do programa principal **modal ID**.

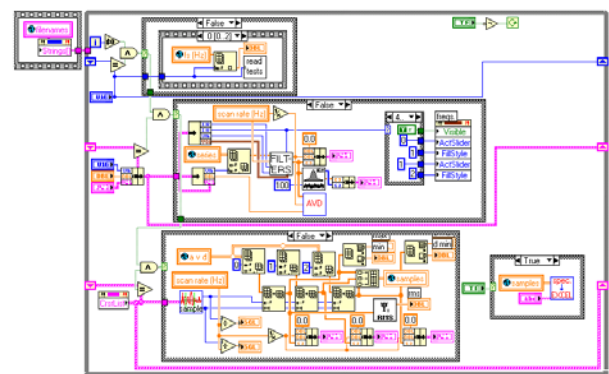
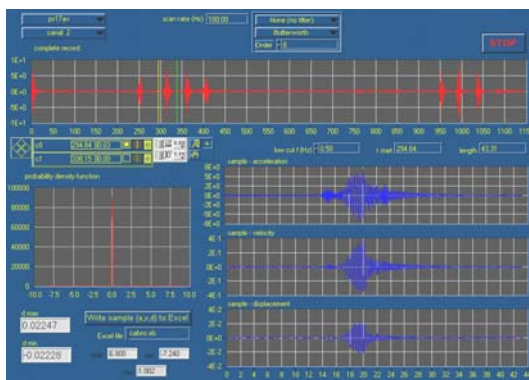


Figura 4.75 – Pannel frontal e código em *LabView* do módulo **check time data**.

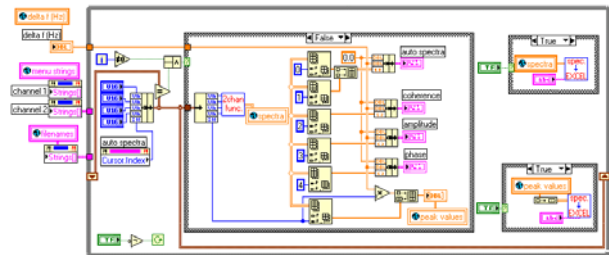
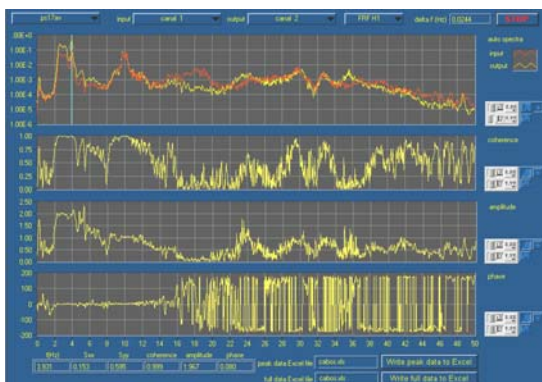


Figura 4.76 – Pannel frontal e código em *LabView* do módulo **check spectra**.

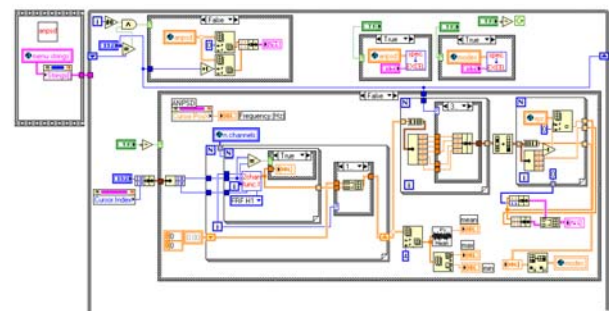
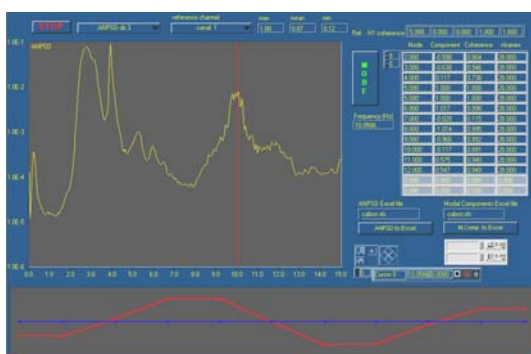


Figura 4.77 – Pannel frontal e código em *LabView* do módulo **select modes**.

O programa **modal ID** foi inicialmente desenvolvido durante a fase de análise da informação obtida nos ensaios realizados na ponte Salgueiro Maia (LNEC – Rodrigues, 2000), os quais serão apresentados no capítulo 6. Desde então o programa tem sido utilizado em vários outros estudos, tendo sofrido também alguns melhoramentos.

Para além do programa **modal ID** também foram desenvolvidos em *LabView* outros programas mais simples, com funções diversas tais como: procedimentos de pré-processamento (filtragem e decimação); estimativa dos coeficientes de amortecimento através do método da meia potência e através do método de ajuste dum espectro analítico; método ITD; avaliação de funções RD com possibilidade de utilização de qualquer uma das condições iniciais anteriormente descritas.

Programas desenvolvidos em MatLab:

Os resultados apresentados neste capítulo para ilustrar os diversos métodos de identificação modal estocástica, foram obtidos com programas desenvolvidos em *MatLab*. Esta linguagem tem algumas vantagens relativamente ao *LabView*, principalmente no que se refere à implementação dos métodos de identificação no domínio do tempo. Todas as operações que envolvem o manuseamento de matrizes, como por exemplo a formação das matrizes de Hankel, são facilmente implementadas em *MatLab*. Acresce ainda que nesta linguagem, ou em algumas das suas *toolboxes*, há já disponíveis as técnicas numéricas que são aplicadas nos métodos paramétricos de identificação modal, como é o caso da decomposição em valores singulares, da decomposição QR ou do cálculo da pseudo-inversa duma matriz para a determinação de soluções de mínimos quadrados.

Indicam-se em seguida os procedimentos implementados em *MatLab*:

- os métodos no domínio da frequência BFD, FDD e EFDD com as funções de densidade espectral estimadas com utilização da FFT;
- as três técnicas referidas para estimar as funções de correlação, ou seja, o método directo, o método com utilização da FFT e o método RD (neste caso foram desenvolvidas funções que permitem considerar os quatro tipos de condições iniciais anteriormente descritos);
- os métodos no domínio da frequência RD-BFD, RD-FDD e RD-EFDD com as funções de densidade espectral estimadas a partir das funções RD;
- os métodos ITD e MRITD;
- os métodos LSCE e PTD;
- as três variantes do método SSI-COV;
- as três variantes do método SSI-DATA.

Note-se que nos desenvolvimentos efectuados em *MatLab*, não houve a preocupação de desenvolver um programa de aplicação geral nem com um interface amigável com o utilizador, como houve com o programa **modal ID** implementado em *LabView*. Houve acima de tudo a preocupação de compreender os diversos métodos de identificação e a forma de os implementar. Os programas desenvolvidos, foram-no especificamente para o exemplo considerado neste capítulo, permitindo apenas a análise da informação de um único ensaio. Poderão, no entanto, ser facilmente adaptados no futuro para outros casos, ou mesmo integrados num programa de aplicação geral.

4.6 Outros métodos de identificação modal estocástica

Referem-se em seguida, brevemente, outras técnicas de identificação modal estocástica, as quais não foram descritas com pormenor nem exemplificadas anteriormente, por se considerar que não têm tido e possivelmente não virão a ter, nem uma utilização tão generalizada nem um interesse tão grande, quanto os métodos que tiveram uma abordagem mais detalhada ao longo deste capítulo.

Técnicas de análise conjunta no tempo-frequência:

A utilização das técnicas de análise conjunta no tempo-frequência para a identificação modal estocástica de sistemas estruturais, tem sido objecto de alguns trabalhos desenvolvidos no politécnico de *Torino* em Itália (Bonato *et al.*, 2002), incluindo a sua aplicação em estruturas de monumentos (De Stefano *et al.*, 2002). Estes autores salientam como ponto importante dessas técnicas, a sua aplicabilidade em situações em que a excitação sobre os sistemas não é estacionária.

Métodos paramétricos no domínio da frequência:

Os métodos paramétricos anteriormente apresentados neste trabalho são métodos no domínio do tempo através dos quais é efectuado o ajuste de modelos ou às funções de correlação da resposta ou directamente às próprias séries de resposta. Também é possível utilizar métodos em que é efectuado um ajuste de modelos às funções de densidade espectral (ou seja, no domínio da frequência). Guillaume *et al.* (1999) apresentam um desses métodos, no qual o ajuste é efectuado com base no método da máxima verosimilhança (*maximum likelihood*). Uma das vantagens dessa metodologia é a possibilidade de avaliar intervalos de confiança para todos os parâmetros modais estimados.

Método de identificação das componentes modais por filtragem digital das séries de resposta:

Nos trabalhos efectuados na ponte da Arrábida (LNEC - Rodrigues *et al.*, 1997) e na ponte da Figueira da Foz e seus viadutos de acesso (LNEC – Campos Costa *et al.*, 1997), cujos resultados serão apresentados no capítulo 6, utilizou-se uma técnica de identificação modal que consistiu em:

- avaliação dos auto-espectros das séries de resposta através duma técnica implementada em *MathCad* baseada no princípio da máxima entropia, que consiste, essencialmente, no ajuste dum modelo auto-regressivo (AR) à resposta da estrutura medida experimentalmente, e na avaliação dos auto-espectros desse modelo;
- identificação das frequências dos picos de ressonância mais evidentes nos auto-espectros;
- nas frequências de ressonância identificadas, avaliaram-se as relações de amplitude e fase entre os sinais de resposta, aplicando-lhes filtros passa-banda centrados nessas frequências e analisando os sinais assim obtidos;
- estimativa dos coeficientes de amortecimento através do método da meia potência.

Embora se tenha adoptado esta técnica nas duas primeiras aplicações que serão apresentadas no capítulo 6, considera-se que ela tem algumas deficiências, tais como a dificuldade em ser automatizada.

4.7 Considerações finais

Neste capítulo apresentaram-se e exemplificaram-se um total de 16 métodos de identificação modal estocástica (sendo no entanto alguns deles apenas ligeiras variantes dos outros). Referiram-se ainda outros métodos para além desses, embora se considere que os métodos que foram analisados com maior detalhe são de facto os mais importantes. Na figura 4.78 apresenta-se um esquema onde se sistematizam os métodos de identificação modal estocástica analisados neste capítulo.

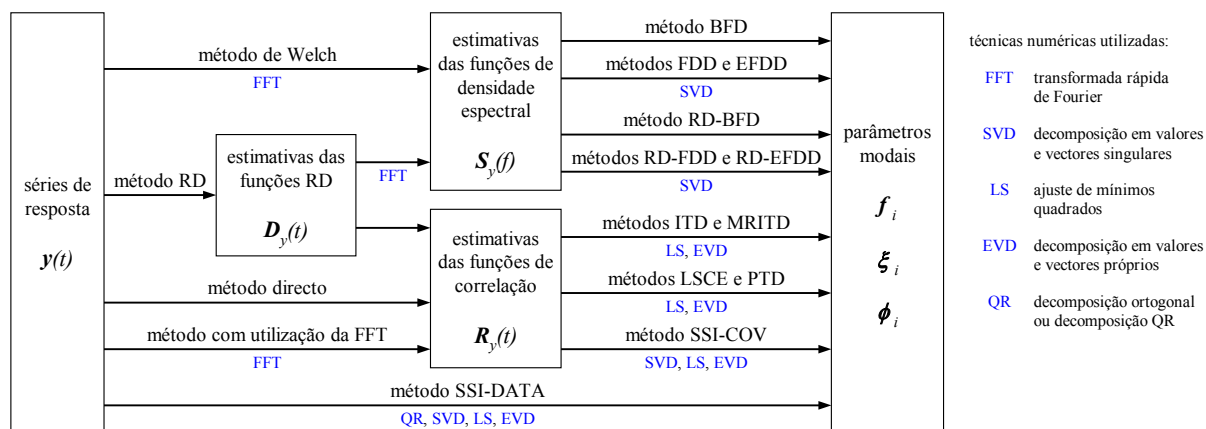


Figura 4.78 – Sistematização geral dos principais métodos de identificação modal estocástica.

Conforme está indicado na figura 4.78, os métodos de identificação modal estocástica analisados neste capítulo envolvem fundamentalmente a utilização de cinco técnicas numéricas: o algoritmo da FFT; a decomposição em valores e vectores singulares (SVD); a técnica de ajuste de mínimos quadrados (LS); a decomposição em valores e vectores próprios (EVD); e a decomposição ortogonal ou decomposição QR.

Os métodos analisados foram subdivididos em métodos no domínio da frequência ou não paramétricos e métodos no domínio do tempo ou paramétricos.

Focaram-se três métodos no domínio da frequência (BFD, FDD e EFDD) em que se analisam as estimativas das funções de densidade espectral obtidas através do procedimento devido a Welch (1967). Explorou-se também a ideia de aplicar esses métodos às funções de densidade espectral estimadas a partir das funções RD, dando origem a três variantes (RD-BFD, RD-FDD e RD-EFDD) que mostraram ter vantagens em relação aos métodos originais. Essas vantagens são devidas ao efeito de redução do ruído resultante da aplicação do método RD e ao evitar do efeito de *leakage* que pode ser conseguido se as funções RD forem avaliadas com uma duração tal que permita que se verifique o seu decaimento completo dentro dessa duração.

Os métodos no domínio do tempo foram subdivididos em métodos de ajuste às funções de correlação da resposta e métodos de ajuste às séries de resposta. Do primeiro tipo abordaram-se os métodos ITD, MRITD, LSCE, PTD e três variantes do método SSI-COV. Do segundo tipo, descreveram-se, fundamentalmente, as três variantes do método SSI-DATA.

Todos os métodos analisados foram exemplificados considerando os registos obtidos num ensaio realizado num modelo de um edifício de 4 pisos. Os resultados obtidos com os diferentes métodos são bastante concordantes entre si, mostrando uma boa performance de todos eles. Tal deve-se em parte à boa qualidade da informação experimental analisada e também ao facto do sistema considerado para exemplo ter modos com frequências bem separadas e baixos amortecimentos. No caso de haver um maior conteúdo de ruído nos registos obtidos experimentalmente ou do sistema em análise ter modos com frequências próximas e/ou amortecimentos elevados, devem sobressair melhor as diferenças entre os métodos e os pontos fortes de uns em relação aos outros.

Tecem-se em seguida alguns comentários relativamente às particularidades dos diferentes métodos de identificação modal estocástica.

No método BFD as frequências dos modos de vibração dum sistema são identificadas a partir da selecção dos picos de ressonância das funções de densidade espectral e as componentes modais são avaliadas através das relações de amplitude e fase, nessas frequências, entre as respostas medidas em

diferentes pontos e num ponto de referência. As configurações assim estimadas não são configurações de modos naturais de vibração mas sim de modos operacionais de deformação, uma vez que no método não há de facto uma separação entre as contribuições de cada modo. Note-se no entanto que esta diferença não é importante em sistemas com modos com frequências bem separadas e amortecimentos baixos. A *ferramenta* numérica utilizada no método BFD é essencialmente o algoritmo da FFT, o que tem como vantagem o facto do método ser de execução rápida e como desvantagens o facto da identificação modal ser efectuada com uma resolução finita em frequência e de haver o efeito de *leakage* nas funções de densidade espectral que são analisadas.

O método BFD não tem em si mesmo uma técnica para estimar os coeficientes de amortecimento, utilizando-se normalmente associado a ele, ou o método da meia potência ou um método de ajuste dum espectro analítico aos picos isolados dos auto-espectros das séries de resposta. A primeira destas técnicas pode resultar em estimativas pouco correctas para os coeficientes de amortecimento. A segunda técnica é um pouco melhor, mas também é difícil aplicá-la na situação de modos com frequências muito próximas.

O método FDD introduz algumas melhorias ao método BFD, nomeadamente, o facto de que através do algoritmo SVD, a matriz de funções de densidade espectral da resposta é decomposta nas contribuições de cada modo. A identificação das frequências e configurações de modos com frequências próximas é assim melhor efectuada com o método FDD do que com o método BFD. A limitação da resolução finita em frequência mantém-se, assim como as questões relacionadas com as técnicas utilizadas para estimar os coeficientes de amortecimento.

O método EFDD tem algumas vantagens relativamente ao método FDD, nomeadamente na técnica de estimar as frequências e as componentes modais (a limitação da resolução finita em frequência é de alguma forma ultrapassada) e introduz também uma técnica para estimar os coeficientes de amortecimento.

Os três métodos RD-BFD, RD-FDD e RD-EFDD são idênticos aos métodos BFD, FDD e EFDD, tendo apenas uma diferença na técnica que é utilizada para estimar as funções de densidade espectral. Nesses três métodos essas funções são estimadas a partir das funções RD avaliadas utilizando o método do decremento aleatório. Pelos motivos anteriormente indicados, as funções de densidade espectral assim avaliadas permitem que a identificação modal seja efectuada duma forma mais clara e consequentemente com melhores resultados.

Os métodos no domínio do tempo ou métodos paramétricos, consistem no ajuste de modelos à informação experimental. Esses modelos são traduzidos nas matrizes da representação de estado dum sistema estocástico no tempo discreto, as quais são de facto o resultado desses métodos de

identificação. Os parâmetros modais identificados são portanto calculados a partir dessas matrizes, pelo que as características dinâmicas avaliadas com esses métodos correspondem às dos modelos ajustados. Com os métodos no domínio do tempo é ultrapassada a limitação da resolução finita em frequência que se verifica nos métodos BFD e FDD.

Um ponto comum a todos os métodos paramétricos é a escolha da ordem do modelo que melhor se ajusta à informação experimental e que, portanto, deve ser considerado para extrair os parâmetros modais que se pretendem identificar. Para esse fim é de grande utilidade utilizar diagramas de estabilização que mostram as características dos pólos avaliados para modelos de ordem crescente, comparando-as com as de um modelo de ordem imediatamente inferior.

Do primeiro grupo de métodos no domínio do tempo, os métodos ITD, MRITD, LSCE e PTD consistem no fundo num ajuste de mínimos quadrados às funções de correlação da resposta dum sistema. O método SSI-COV introduz uma operação adicional que é a decomposição em valores singulares, que tem como efeito o limitar o ajuste de mínimos quadrados a um subespaço onde há uma menor influência do ruído existente na resposta dum sistema. Tal traduz-se no facto de em geral se conseguirem bons ajustes à informação experimental com modelos de ordem mais baixa do que a que é necessária com os outros métodos baseados no ajuste às funções de correlação.

Do segundo grupo de métodos no domínio do tempo, o método SSI-DATA é semelhante ao método SSI-COV. Como principal diferença há o facto de que a avaliação das funções de correlação da resposta é substituída por uma operação, implementada através do algoritmo de decomposição QR, que pode ser interpretada como uma projecção geométrica do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado”.

Como desvantagem do método SSI-DATA relativamente ao método SSI-COV, há o facto de ser um método de execução mais lenta. Como vantagem, Peeters (2000) indica o facto de com as matrizes identificadas com o método SSI-DATA ser possível efectuar a conversão para as matrizes do modelo de inovações que permite efectuar a operação de separação da resposta observada em respostas modais.

Capítulo 5

Comparação com Modelos Analíticos e sua Modificação

5.1 Considerações gerais

Um dos interesses práticos na avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas é a sua comparação com as características calculadas com modelos analíticos, nomeadamente, com modelos de elementos finitos. Pode ainda haver interesse na modificação desses modelos, para que as propriedades dinâmicas com eles calculadas sejam tão próximas quanto possível das identificadas experimentalmente. Tal constitui uma boa forma de comprovação dos modelos analíticos, a qual dá uma maior confiança à sua utilização para a avaliação da resposta dinâmica das estruturas em causa.

Neste capítulo são assim introduzidos alguns aspectos dum domínio directamente relacionado com a identificação modal, que é o da comparação com modelos analíticos e sua modificação. Considera-se que este tema é por si só tão vasto que poderia ser objecto de outro trabalho de âmbito semelhante ao deste, pelo que a apresentação que será efectuada não é de forma alguma exaustiva. No entanto, não se quis deixar de abordar alguns aspectos com ele relacionados, quer por já se fazer aplicação deles nos exemplos apresentados no capítulo 6, quer para perspectivar melhor todo o interesse da identificação modal estocástica.

Inicialmente serão focadas algumas questões que estão relacionadas com a simples compatibilização dos resultados experimentais com os resultados analíticos, de modo a que a sua comparação tenha sentido. De seguida analisar-se-ão diversas formas, relativamente simples, de efectuar essa comparação e de a quantificar de maneira clara.

Uma das questões, que ainda tem sido levantada como uma desvantagem da identificação modal estocástica, está relacionada com a impossibilidade de se avaliarem experimentalmente os vectores modais normalizados relativamente à matriz de massa (ou, de forma equivalente, a massa modal). Este aspecto é importante para a modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas experimentais. Recentemente têm sido propostas formas de ultrapassar essa questão (Bernal e Gunes, 2002; Parloo *et al.*, 2002; Brincker e Andersen, 2003) algumas das quais serão apresentadas neste capítulo.

Finalmente serão apresentados os métodos de modificação de modelos que podem ser designados por *métodos de modificação directa das matrizes de massa e de rigidez* (Heylen *et al.*, 1997; Maia *et al.*, 1998; Genatios *et al.*, 1998), que podem ser utilizados para o ajuste dessas matrizes obtidas por via de um modelo analítico, tendo em conta as características dinâmicas identificadas experimentalmente.

A apresentação dos temas abordados será ilustrada, sempre que se considere adequado, com a sua aplicação prática ao exemplo que já foi considerado nos capítulos 2 e 4 para concretizar os assuntos aí expostos.

5.2 Compatibilização entre resultados experimentais e analíticos

Quando se pretende comparar as características dinâmicas calculadas com um modelo analítico com as identificadas experimentalmente e com base nestas modificar o modelo, coloca-se a questão de ter ambos os resultados expressos em termos dum mesmo referencial, ou seja, duma mesma idealização do sistema estrutural em causa. Os graus de liberdade desse sistema, considerados para a sua observação experimental (segundo os quais são identificadas as componentes modais), devem ter uma correspondência clara com os graus de liberdade do modelo analítico. Normalmente verifica-se, no entanto, que o número total de graus de liberdade nos modelos analíticos, excede claramente o número de graus de liberdade que na prática é possível observar experimentalmente, havendo assim uma discrepância entre as duas situações que se pretendem comparar.

A disparidade, que normalmente existe entre os graus de liberdade dum modelo analítico e os graus liberdade observados experimentalmente, resulta de diversos factores, nomeadamente:

- nos modelos analíticos é, por um lado, conveniente considerar um elevado número de graus de liberdade e, por outro, é actualmente possível fazê-lo, sem que tal signifique tempos de cálculo excessivos;
- experimentalmente, não é possível na prática observar um sistema em todos os graus de liberdade que podem ser considerados num modelo analítico, porque:
 - no modelo analítico podem ser considerados graus de liberdade que fisicamente são internos ao sistema e portanto não são acessíveis experimentalmente;
 - é muito difícil medir graus de liberdade de rotação;
 - tal representaria um trabalho experimental exagerado;
- experimentalmente, pode não haver mesmo interesse em observar a resposta dos sistemas estruturais numa malha espacial tão refinada como a que pode ser considerada num modelo analítico, porque tal não é necessário para que se consiga efectuar uma identificação inequívoca dos modos de vibração do sistema na banda de frequências de interesse.

A disparidade entre os resultados experimentais e o modelo analítico manifesta-se não só em termos do menor refinamento da malha de pontos observados em relação à malha de nós do modelo analítico, mas também em termos do número limitado de modos que é possível identificar experimentalmente, em virtude das limitações dos transdutores e sistemas de aquisição e das características das acções de excitação (conforme já referido no capítulo 2).

Constatada então a existência de uma discrepância entre os graus de liberdade observados experimentalmente e os graus de liberdade dum modelo analítico, importa ultrapassá-la, compatibilizando ambas as descrições do sistema, para permitir a sua comparação e a utilização de métodos de modificação dos modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente.

Em primeiro lugar, é conveniente que se verifique uma correspondência directa entre os pontos do sistema estrutural onde este é observado experimentalmente e alguns dos nós da malha do respectivo modelo analítico (de elementos finitos). Este requisito pode ser facilmente cumprido se o planeamento do trabalho experimental e a definição do modelo de elementos finitos forem efectuados duma forma integrada.

Cumprida a condição indicada no parágrafo anterior, os graus de liberdade do modelo de elementos finitos (z^a) podem ser subdivididos num subconjunto de graus de liberdade *primários* (z_p^a), que têm uma correspondência directa com os graus de liberdade experimentais, e num subconjunto de graus de liberdade *secundários* (z_s^a):

$$z^a = \begin{bmatrix} z_p^a \\ z_s^a \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

A correspondência directa entre os graus de liberdade observados experimentalmente e os de um modelo de elementos finitos pode ser facilmente estabelecida, no entanto, é ainda necessário compatibilizar a dimensão das matrizes e vectores do modelo de elementos finitos com a dimensão das matrizes e vectores do modelo experimental. Essa compatibilização de dimensões pode ser feita fundamentalmente por duas vias: redução do modelo analítico, ou expansão do modelo experimental.

A redução do modelo analítico corresponde a uma eliminação dos graus de liberdade *secundários* nos seus vectores e matrizes. A redução dos vectores das componentes modais é bastante simples, pois consiste na simples omissão das componentes relativas aos graus de liberdade *secundários* (em alguns casos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6, procede-se dessa forma para comparar as componentes modais calculadas com modelos de elementos finitos, com as

avaliadas com métodos de identificação modal estocástica). A redução das matrizes do modelo analítico não é tão simples, havendo diversas técnicas para o fazer, que serão apresentadas em 5.2.1.

A expansão do modelo experimental corresponde à expansão das componentes modais identificadas para todos os graus de liberdade do modelo de elementos finitos. A maioria das técnicas de expansão, envolvem a utilização do próprio modelo analítico para efectuar a expansão da informação experimental. Em 5.2.2 apresentam-se diversas técnicas de expansão de modelos.

Pode-se colocar a questão de saber qual dos procedimentos, redução do modelo analítico ou expansão do modelo experimental, deverá ser adoptado. A opção adequada depende dos objectivos que se pretendem atingir ao cruzar a informação obtida experimentalmente com a calculada com o modelo analítico.

No caso de apenas se pretender efectuar uma comparação entre um modelo analítico e os resultados experimentais, os métodos de redução de modelos, serão em princípio suficientes. Nestes métodos de redução de modelos há sempre alguma perda ou dispersão da informação espacial do modelo, o que os torna menos adequados se o objectivo for o de localizar os nós ou elementos onde se verificam as maiores diferenças entre o modelo analítico e os resultados experimentais, ou ainda se o objectivo for o de modificar o modelo ajustando-o às características dinâmicas identificadas.

Os métodos de expansão de modelos são portanto, em princípio, preferíveis em situações em que o objectivo é a localização das zonas onde se verificam as diferenças entre o modelo analítico e os resultados experimentais ou a própria modificação do modelo analítico. No entanto, se o número de graus de liberdade do modelo analítico for consideravelmente superior ao número de graus de liberdade observados experimentalmente, através da expansão, a informação obtida por via experimental acaba por se diluir excessivamente (Maia *et al.*, 1998), sendo então difícil atingir o objectivo pretendido de localização de diferenças ou de modificação do modelo analítico.

5.2.1 Técnicas de redução de modelos

Com as técnicas de redução de modelos exprimem-se as matrizes e vectores do modelo analítico em termos dos graus de liberdade *primários*. Define-se então uma relação entre esses graus de liberdade e os graus de liberdade *secundários*, que pode ser expressa através de matrizes de transformação T_s ou T , conforme se indica nas expressões seguintes:

$$\mathbf{z}_s^a = \mathbf{T}_s \mathbf{z}_p^a \quad (5.2)$$

$$\mathbf{z}^a = \mathbf{T} \mathbf{z}_p^a = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_s \end{bmatrix} \mathbf{z}_p^a \quad (5.3)$$

A matriz de transformação T permite obter as matrizes reduzidas, de massa M_r e de rigidez K_r , a partir das matrizes completas M e K , através das relações (Heylen *et al.*, 1997):

$$M_r = T^T M T \quad \text{e} \quad K_r = T^T K T \quad (5.4)$$

A maneira de definir as matrizes de transformação T ou T_s , distingue as diversas técnicas de redução de modelos, que adiante serão apresentadas. Antes porém, importa demonstrar que as matrizes reduzidas M_r e K_r são apenas uma descrição aproximada do modelo analítico, relativamente às matrizes completas M e K (Heylen *et al.*, 1997). Para tal, considere-se a equação de equilíbrio dinâmico do modelo analítico, assumindo que o amortecimento é nulo, particionando as matrizes em termos dos graus de liberdade *primários* e *secundários*, e considerando que nos graus de liberdade *secundários* não há forças exteriores aplicadas:

$$(K - \omega^2 M) z^a = P \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} K_{pp} & K_{ps} \\ K_{sp} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{pp} & M_{ps} \\ M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_p^a \\ z_s^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

A partir da 2ª equação do sistema (5.5) pode-se determinar a relação:

$$z_s^a = - (K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1} (K_{sp} - \omega^2 M_{sp}) z_p^a \quad (5.6)$$

Considerando agora a relação (5.6) e introduzindo-a na 1ª equação do sistema (5.5) obtém-se:

$$\underbrace{\left((K_{ss} - \omega^2 M_{ss}) - (K_{ps} - \omega^2 M_{ps})(K_{ss} - \omega^2 M_{ss})^{-1}(K_{sp} - \omega^2 M_{sp}) \right)}_{\text{rigidez dinâmica}} z_p^a = P_p \quad (5.7)$$

Com as matrizes reduzidas M_r e K_r a equação de equilíbrio dinâmico é:

$$\underbrace{(K_r - \omega^2 M_r)}_{\text{rigidez dinâmica}} z_p^a = P_p \quad (5.8)$$

Comparando as expressões para a rigidez dinâmica nas equações (5.7) e (5.8), é imediato verificar que não é possível conseguir, com as matrizes reduzidas M_r e K_r , que em todas as frequências haja uma equivalência dessa rigidez dinâmica entre o modelo reduzido e o modelo completo.

Técnica de redução dinâmica:

Na técnica de redução dinâmica (Kidder, 1973), a matriz de transformação é dada pela relação (5.6) avaliada numa determinada frequência ω_r , ou seja:

$$\mathbf{T}_s = -(\mathbf{K}_{ss} - \omega_r^2 \mathbf{M}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{sp} - \omega_r^2 \mathbf{M}_{sp}) \quad (5.9)$$

Com esta técnica as matrizes reduzidas \mathbf{M}_r e \mathbf{K}_r permitem fazer uma avaliação exacta do comportamento dinâmico do modelo completo apenas na frequência ω_r . Nas restantes frequências há sempre algum grau de aproximação que é tanto maior quanto mais afastadas de ω_r forem as frequências em causa.

Uma situação especial da técnica de redução dinâmica é a redução de Guyan (Guyan, 1965) em que se considera $\omega_r = 0$, nesse caso a matriz de transformação é dada por:

$$\mathbf{T}_s = -(\mathbf{K}_{ss})^{-1} (\mathbf{K}_{sp}) \quad (5.10)$$

Técnica SEREP:

Na técnica SEREP (*system equivalent reduction expansion process*) (O'Callahan *et al.*, 1989) a matriz de transformação é avaliada impondo que a relação (5.3) se verifique para todos os modos de vibração calculados com o modelo completo na banda de frequências de interesse, ou seja:

$$\Phi^a = \mathbf{T} \Phi_p^a \quad (5.11)$$

Uma vez que normalmente o número de modos na banda de frequências de interesse é menor do que o número de graus de liberdade *primários*, a equação (5.11) é indeterminada. Assim para determinar a matriz \mathbf{T} na expressão (5.11), utiliza-se a pseudo-inversa de Φ_p^a , obtendo-se:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_p^a \\ \Phi_s^a \end{bmatrix} \underbrace{\left((\Phi_p^a)^T \Phi_p^a \right)^{-1} (\Phi_p^a)^T}_{(\Phi_p^a)^\dagger \text{ pseudo-inversa de } \Phi_p^a} \quad (5.12)$$

Com esta técnica consegue-se que as frequências e modos de vibração do modelo reduzido sejam coincidentes com as do modelo completo. Pode no entanto acontecer que as matrizes reduzidas não tenham característica completa (Heylen *et al.*, 1997).

Técnica IRS:

Na técnica IRS (*improved reduced system*) (O'Callahan, 1989) a matriz de transformação é determinada através dum processo iterativo que consiste nos passos seguintes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad T_s^i &= -K_{ss}^{-1} K_{sp} + K_{ss}^{-1} \begin{bmatrix} M_{sp} & M_{ss} \end{bmatrix} T^{i-1} (M_r^{i-1})^{-1} K_r^{i-1} \\
 2) \quad T^i &= \begin{bmatrix} I \\ T_s^i \end{bmatrix} \\
 3) \quad M_r^i &= (T^i)^T M T^i \\
 4) \quad K_r^i &= (T^i)^T K T^i
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

O processo iterativo indicado nas expressões (5.13) é iniciado considerando que:

$$T^0 = 0 \quad \text{e} \quad (M_r^0)^{-1} K_r^0 = \Phi_p^a \begin{bmatrix} \omega_r^2 \end{bmatrix} (\Phi_p^a)^+ \tag{5.14}$$

em que: ω_r são as frequências naturais do sistema, calculadas com o modelo analítico.

5.2.2 Técnicas de expansão de modelos

Com as técnicas de expansão de modelos, as componentes modais avaliadas experimentalmente para os graus de liberdade primários são expandidas para todos os graus de liberdade do modelo analítico.

As matrizes de transformação das técnicas de redução acima apresentadas podem também ser utilizadas em técnicas de expansão, uma vez que elas definem uma relação (5.2) entre os graus de liberdade *primários* e os graus de liberdade *secundários*. Essas matrizes, que são estabelecidas com base no modelo analítico, podem ser utilizadas para expandir para os graus de liberdade *secundários*, as componentes modais identificadas para os graus de liberdade *primários*, através da relação:

$$\Phi_s^e = T_s \Phi_p^e \tag{5.15}$$

em que: Φ_p^e são as componentes modais identificadas experimentalmente para os graus de liberdade *primários*;

Φ_s^e são as componente modais expandidas para os graus de liberdade *secundários*.

Apresentam-se em seguida outras técnicas de expansão de modelos.

Técnica de substituição pelas componentes modais calculadas com o modelo:

Esta é uma técnica bastante simples que consiste apenas em considerar, nos vectores de componentes modais experimentais, como valores referentes aos graus de liberdade *secundários*, as componentes modais calculadas com o modelo analítico, ou seja:

$$\Phi^e = \begin{bmatrix} \Phi_p^e \\ \Phi_s^a \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Para completar as componentes modais experimentais com as componentes modais calculadas, ambos os vectores de componentes modais referentes aos graus de liberdade *primários*, devem estar normalizados de maneira a que se verifique a relação:

$$\|\Phi_p^e\| = \|\Phi_s^a\| \quad (5.17)$$

Técnica das coordenadas modais:

Nesta técnica (Lipkens e Vandeurzen, 1987), as componentes modais experimentais nos graus de liberdade *primários* são consideradas como uma combinação linear das componentes modais calculadas com o modelo analítico para esses mesmos graus de liberdade, ou seja:

$$\Phi_p^e = \Phi_p^a \mathbf{q} \quad (5.18)$$

A matriz \mathbf{q} dos coeficientes da combinação linear pode ser determinada através de:

$$\mathbf{q} = (\Phi_p^a)^\dagger \Phi_p^e \quad (5.19)$$

e utilizada para efectuar a expansão das componentes modais identificadas, através de:

$$\Phi_s^e = \Phi_s^a \mathbf{q} \quad (5.20)$$

Técnicas de interpolação e extrapolação:

Para estimar as componentes modais nos graus de liberdade não observados (*secundários*) podem-se utilizar técnicas de interpolação ou extrapolação a partir das componentes modais identificadas para os graus de liberdade *primários*. Para tal, podem ser utilizadas *splines* ou funções polinomiais. Note-se que com este tipo de técnicas não se utiliza de facto o modelo analítico para efectuar a expansão dos valores experimentais, o que pode ser considerado como uma vantagem uma vez que, para efeitos de comparação, há uma separação mais clara entre as componentes experimentais e as calculadas com o modelo. Estas técnicas são também vantajosas, no caso dos pontos do sistema estrutural, observados experimentalmente, não coincidirem com os nós do modelo analítico, permitindo fazer a transformação das componentes modais, de uns para os outros.

5.3 Comparação entre resultados experimentais e analíticos

Uma vez resolvida a questão da compatibilização entre resultados experimentais e analíticos, pode-se efectuar a sua comparação de modo a poder-se ajuizar sobre a qualidade dos modelos analíticos em face da informação experimental. Dependendo do resultado dessa fase de comparação entre os resultados experimentais e analíticos, pode-se tomar uma decisão sobre a necessidade ou não de modificar os modelos analíticos. Essa comparação pode ser efectuada com base em diversos critérios ou indicadores de correlação que são apresentados em seguida.

Exemplo: O exemplo que foi considerado nos capítulos 2 e 4, para concretizar os fundamentos analíticos e os procedimentos dos métodos de identificação modal estocástica, é também utilizado neste capítulo para ilustrar o tema da comparação com modelos analíticos e sua modificação. Relativamente a este exemplo, importa salientar que a questão da compatibilização entre os resultados experimentais e analíticos foi já resolvida, uma vez que em ambas as situações está-se a analisar um sistema com 4 graus de liberdade.

Rescrevem-se em seguida as matrizes e vectores do modelo analítico:

Matriz de massa [kg]	Matriz de rigidez $10^6 [N.m^{-1}]$	Frequências [Hz]	Matriz modal (vectores próprios)
$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1777 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1773 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1770 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1712 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 22,202 & -11,179 & 0,504 & 0,017 \\ -11,179 & 17,359 & -7,445 & 0,403 \\ 0,504 & -7,445 & 13,613 & -6,651 \\ 0,017 & 0,403 & -6,651 & 6,216 \end{bmatrix}$	$\mathbf{f}_i^a = \begin{bmatrix} 3,73 \\ 10,23 \\ 16,25 \\ 21,65 \end{bmatrix}$	$\Phi^a = \begin{bmatrix} 0,256 & 0,747 & -0,669 & 1,000 \\ 0,526 & 1,000 & -0,176 & -0,936 \\ 0,826 & 0,177 & 1,000 & 0,435 \\ 1,000 & -0,895 & -0,580 & -0,128 \end{bmatrix}$

Quanto aos resultados experimentais, vão-se considerar os valores identificados com o método EFDD:

Frequências [Hz]	Matriz modal (componentes modais identificadas)
$\mathbf{f}_i^e = \begin{bmatrix} 2,98 \\ 8,04 \\ 11,66 \\ 18,18 \end{bmatrix}$	$\Phi^e = \begin{bmatrix} 0,184 & 0,659 & -0,410 & 1,000 \\ 0,380 & 1,000 & -0,372 & -0,748 \\ 0,812 & 0,234 & 1,000 & 0,145 \\ 1,000 & -0,708 & -0,588 & -0,029 \end{bmatrix}$

Comparação entre as frequências dos modos de vibração:

O primeiro aspecto a considerar na comparação entre as características dinâmicas identificadas experimentalmente e as calculadas com um modelo de elementos finitos é a confrontação dos valores das frequências. Para o fazer importa ter em atenção que se devem comparar as frequências de modos de vibração correspondentes, pelo que é necessário analisar também as respectivas configurações, caso contrário, podem-se estar a fazer comparações sem sentido.

Para comparar as frequências experimentais com as calculadas é comum listarem-se os seus valores num quadro, eventualmente também com a indicação de erros relativos entre esses valores. Uma forma de comparação que permite ter uma visualização mais imediata da qualidade do ajuste

entre ambos os valores, é através de um gráfico em que se traçam os valores das frequências calculadas com o modelo em função dos valores das frequências identificadas para os correspondentes modos de vibração. No caso do ajuste ser perfeito, os pontos desse gráfico devem estar todos localizados numa recta de declive unitário e ordenada na origem nula; os desvios relativamente a essa situação ideal, são assim facilmente perceptíveis ao analisar esse tipo de representação gráfica.

Exemplo: No quadro 5.1 comparam-se as frequências calculadas com o modelo com as identificadas experimentalmente, indicando-se também os erros dos valores calculados relativamente aos experimentais.

Quadro 5.1 – Frequências calculadas com o modelo e identificadas experimentalmente.

modo	f modelo (Hz)	f experimental (Hz)	erro relativo (%)
1	3,73	2,98	+ 25
2	10,23	8,04	+ 27
3	16,25	11,66	+ 39
4	21,65	18,18	+ 19

Na figura 5.1 faz-se também uma comparação entre as frequências calculadas com o modelo e as identificadas experimentalmente.

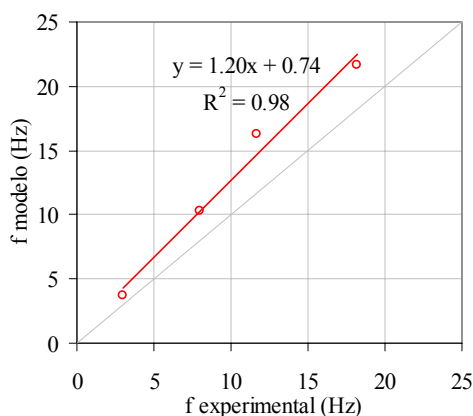


Figura 5.1 – Comparação entre as frequências calculadas com o modelo e as identificadas experimentalmente.

Analisando o quadro 5.1 e a figura 5.1 pode-se verificar que há ainda diferenças importantes entre as frequências calculadas com o modelo analítico e as identificadas com um método de identificação modal estocástica. O modelo analítico é ainda muito rígido relativamente ao modelo físico onde foi efectuado o ensaio de medição de vibrações ambiente. Conforme já foi referido no capítulo 4, essas diferenças justificam-se devido a alguns danos que o modelo físico ensaiado apresentava e que não foram representados no modelo analítico.

É importante também notar que há modos em que a diferença relativa entre frequências calculadas e experimentais é maior do que noutros modos. Esta informação é por si só muito importante para a modificação do modelo analítico e/ou identificação das zonas do modelo físico que estão mais danificadas.

Associando a análise das diferenças entre frequências com as configurações dos respectivos modos de vibração, podem-se, de certa forma, tirar algumas conclusões sobre quais os elementos do modelo analítico cujas propriedades devem ser modificadas ou sobre quais as zonas do modelo físico que têm mais danos. Neste caso, é para o 3º modo de vibração que se verifica uma maior diferença relativa entre frequências calculadas e experimentais. Os elementos a modificar ou os danos no modelo físico devem assim estar situados em zonas em que a configuração do 3º modo apresenta maiores amplitudes ou onde é maior a energia de deformação associada a essa configuração.

Comparação visual das configurações modais:

A forma mais imediata de efectuar a comparação entre as componentes modais calculadas com um modelo analítico e as identificadas experimentalmente, é através da comparação da sua representação gráfica. Para tal, deve haver o cuidado de ter as componentes modais normalizadas da mesma maneira.

Exemplo: Nas figuras 5.2 e 5.3 comparam-se as componentes modais calculadas com o modelo analítico com as identificadas com o método EFDD. As representações gráficas da figura 5.2, foram obtidas através do processo já utilizado no capítulo 4, correspondendo portanto às deformadas do modelo de elementos finitos, resultantes da imposição de deslocamentos longitudinais nos diversos pisos, com valores iguais às componentes modais que se pretende representar.

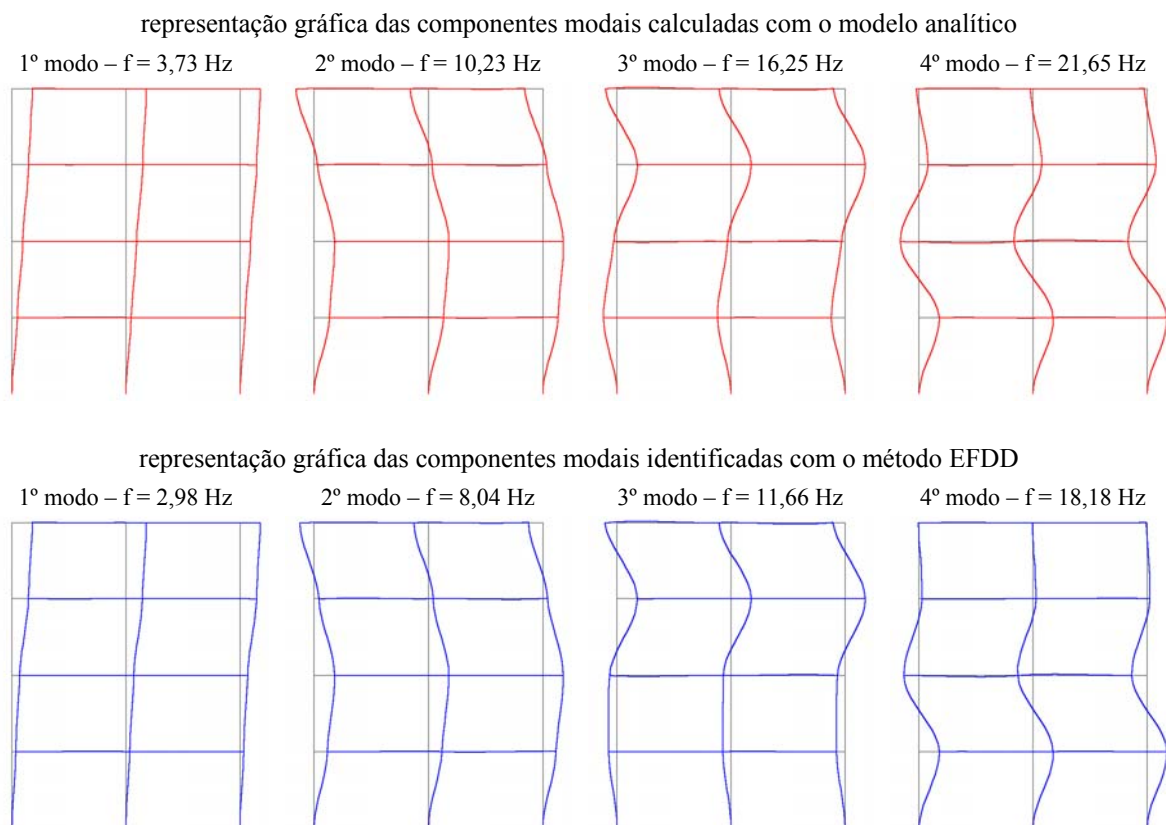


Figura 5.2 – Comparação entre componentes modais calculadas e identificadas com o método EFDD.

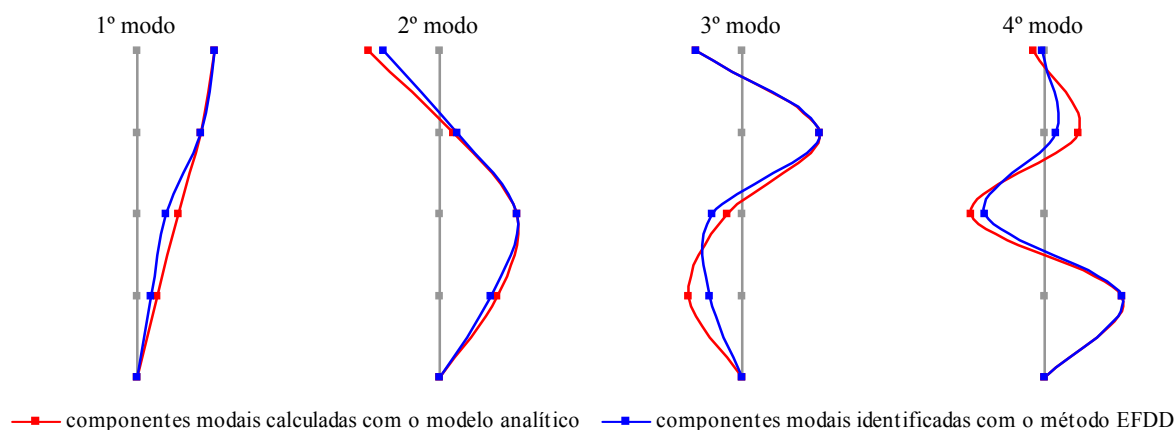


Figura 5.3 – Comparação entre componentes modais calculadas e identificadas com o método EFDD.

Tal como se comentou em relação às frequências, existem também algumas diferenças entre as componentes modais calculadas com o modelo analítico e as identificadas experimentalmente.

Uma outra forma de comparar as componentes modais, calculadas com um modelo analítico com as identificadas experimentalmente, é através de um gráfico em que se traçam em ordenadas as componentes modais calculadas com o modelo analítico e em abcissas as componentes modais identificadas experimentalmente. Esse gráfico, que pode ser designado por *gráfico de 45°* (Heylen *et al.*, 1997), permite ter uma visualização imediata do ajuste entre as componentes modais analíticas e as experimentais, pois no caso desse ajuste ser perfeito, todos os pontos representados ficam situados numa recta de declive unitário com ordenada na origem nula.

Exemplo: Na figura 5.4 apresentam-se os gráficos de 45° que comparam as componentes modais calculadas com o modelo analítico com as identificadas com o método EFDD.

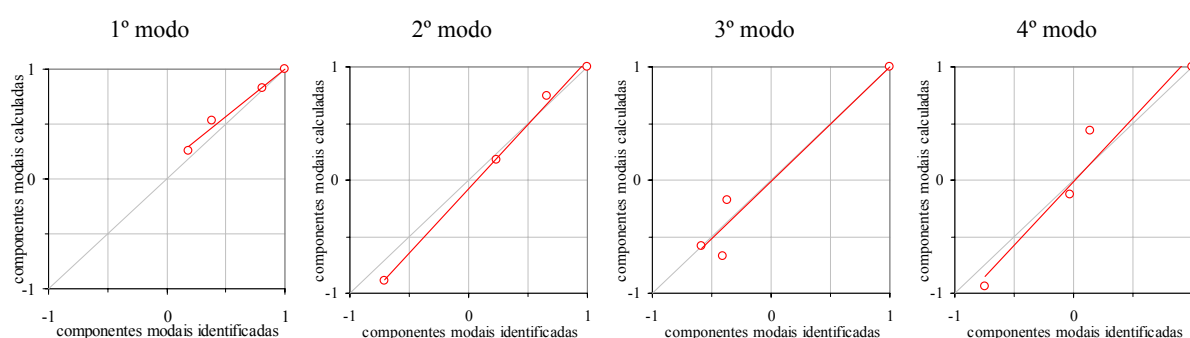


Figura 5.4 – Gráficos de 45° comparando as componentes modais calculadas com as identificadas.

Coeficiente MAC:

Para comparar as componentes modais calculadas com um modelo analítico com as identificadas experimentalmente, pode-se utilizar o coeficiente MAC (*modal assurance criterion*)

(Allemang e Brown, 1982) que traduz a correlação que é visualizada nos gráficos de 45°, exprimindo-a num único valor. O coeficiente MAC é um coeficiente de correlação que pode ser determinado para cada par de vectores de componentes modais analíticas e experimentais, através da expressão seguinte:

$$MAC^{a-e}(i,j) = \frac{\left| \left(\varphi_i^a \right)^T \varphi_j^e \right|^2}{\left(\left(\varphi_i^a \right)^T \varphi_i^a \right) \left(\left(\varphi_j^e \right)^T \varphi_j^e \right)} \quad (5.21)$$

em que: φ_i^a é o vector de componentes modais calculadas com o modelo analítico para o modo i ;

φ_j^e é o vector de componentes modais identificadas experimentalmente para o modo j .

O coeficiente MAC pode assumir valores que variam entre 0 e 1. Valores iguais a 1 indicam que há uma correlação muito boa entre os vectores de componentes modais, enquanto que valores próximos de 0 mostram que a correlação é muito baixa.

Para comparação entre as componentes modais analíticas e experimentais, é usual determinar a matriz completa de coeficientes MAC, relacionando cada modo analítico com todos os modos experimentais. Os elementos da diagonal principal dessa matriz, devem apresentar valores próximos de 1 ($> 0,8$) para que se considere que existe uma boa correlação entre as componentes modais analíticas e as experimentais.

Exemplo: Considerando as componentes modais calculadas com o modelo analítico e as identificadas com o método EFDD, calculou-se a matriz de coeficientes MAC que se apresenta em seguida. É bastante comum utilizar a representação dos valores dessa matriz, num gráfico de barras tridimensional, tal como o apresentado na figura 5.5, o que permite ter uma percepção mais imediata da correlação entre as componentes modais.

$$MAC = \begin{bmatrix} 0,989 & 0,008 & 0,001 & 0,001 \\ 0,012 & 0,987 & 0,000 & 0,001 \\ 0,001 & 0,000 & 0,942 & 0,049 \\ 0,001 & 0,002 & 0,059 & 0,948 \end{bmatrix}$$

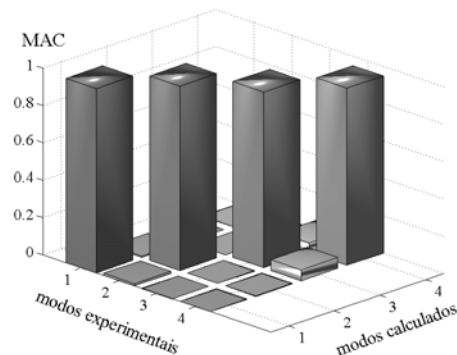


Figura 5.5 – Matriz dos coeficientes MAC.

Neste caso os elementos da diagonal principal da matriz de coeficientes MAC, são já próximos de 1. Note-se no entanto, que desses elementos, o que tem valor mais baixo, é o relativo ao 3º modo de vibração.

Coefficiente COMAC:

Com o coeficiente COMAC (*coordinate modal assurance criterion*) (Lieven e Ewins, 1988) avalia-se a correlação, para cada grau de liberdade, entre todos os modos analíticos e experimentais. Para um grau de liberdade j , o coeficiente COMAC é determinado através da expressão seguinte:

$$COMAC^{a-e}(j) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^a(j) \varphi_i^e(j) \right)^2}{\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^a(j) \varphi_i^a(j) \right) \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^e(j) \varphi_i^e(j) \right)} \quad (5.22)$$

em que: φ_i^a e φ_i^e são os vectores de componentes modais, respectivamente, analíticas e experimentais, correspondentes ao modo i ;

n é o número de modos de vibração.

O coeficiente COMAC pode ter valores que variam entre 0 e 1. Valores iguais a 1 indicam que há uma correlação muito boa entre as componentes modais no grau de liberdade a que se refere o coeficiente, enquanto que valores próximos de 0 mostram que a correlação é muito baixa.

Para calcular o coeficiente COMAC é conveniente que as componentes modais analíticas e experimentais, estejam normalizadas duma maneira consistente (Heylen *et al.*, 1997). Importa também salientar que enquanto com o coeficiente MAC é feita uma comparação modo a modo, com o coeficiente COMAC faz-se uma comparação grau de liberdade a grau de liberdade.

Exemplo: Considerando as componentes modais calculadas com o modelo analítico e as identificadas com o método EFDD, calcularam-se os coeficientes COMAC que se apresentam na figura 5.6.

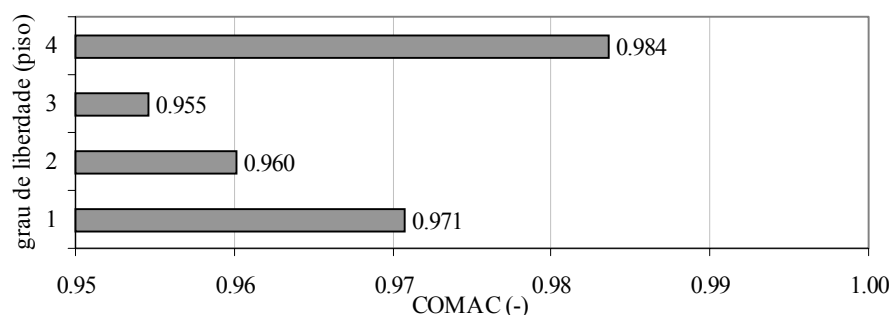


Figura 5.6 – Coeficientes COMAC.

Os valores calculados para os coeficientes COMAC são já próximos de 1, no entanto, é de salientar que a comparação entre os valores obtidos para cada grau de liberdade, permite constatar alguns aspectos importantes.

O menor dos coeficientes COMAC verifica-se no grau de liberdade 3 (3º piso) o que indica que as maiores diferenças entre o modelo analítico e o modelo físico ensaiado, verificam-se nos elementos estruturais directamente relacionados com esse grau de liberdade. Neste exemplo, este facto pode ser encarado sob uma perspectiva de modificação do modelo analítico (os referidos elementos estruturais são os que devem sofrer as maiores alterações) ou sob uma perspectiva de detecção de danos no modelo físico (os referidos elementos estruturais do modelo físico são os que devem estar mais danificados, e de facto, neste caso, sabe-se que assim é, conforme já descrito no capítulo 4).

O coeficiente COMAC pode portanto, dar um contributo importante na localização dos elementos a modificar num modelo analítico, ou na localização dos elementos estruturais danificados num problema de detecção de danos.

5.4 Normalização das componentes modais na identificação modal estocástica

Na abordagem até agora efectuada ao longo deste trabalho têm sido salientadas diversas vantagens da identificação modal estocástica, nomeadamente no que se refere à avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de grandes dimensões como é o caso das estruturas de engenharia civil. Essas vantagens derivam sobretudo da maior facilidade de execução do trabalho experimental necessário para a identificação modal estocástica, em comparação com o exigido pelos ensaios com controlo e medição das forças de excitação, necessários para os métodos de identificação modal *clássica*.

A identificação modal estocástica tem no entanto algumas desvantagens. Uma das que têm sido levantadas está relacionada com a impossibilidade de se avaliarem experimentalmente os vectores modais normalizados relativamente à matriz de massa (ou, de forma equivalente, a massa modal). Este é um aspecto importante para a modificação de modelos analíticos ou para a detecção de danos com base nas características dinâmicas experimentais. De facto, em diversos métodos de modificação de modelos analíticos é necessário que os vectores modais estejam normalizados relativamente à matriz de massa, sendo este o motivo que leva a incluir neste capítulo, o tema que será abordado em seguida.

Uma maneira simples de ultrapassar a dificuldade referida no parágrafo anterior, é assumindo a hipótese que a matriz de massa é conhecida. Outros métodos têm sido recentemente propostos (Parloo *et al.*, 2002; Brincker e Andersen, 2003) que envolvem a realização de diversos ensaios de medição da resposta dum sistema, introduzindo-lhe alterações de massa conhecidas.

Normalização das componentes modais assumindo que a matriz de massa é conhecida:

Uma forma simples de conseguir normalizar relativamente à matriz de massa, os vectores modais obtidos com métodos de identificação modal estocástica, é assumindo a hipótese que a matriz

de massa é conhecida. Por exemplo, que é a obtida com o auxílio dum modelo de elementos finitos. Em muitas situações práticas, é aceitável assumir esta hipótese, pois é possível quantificar razoavelmente bem a massa dos sistemas estruturais (e a sua distribuição), sendo a informação experimental importante para a avaliação das suas características de rigidez e de amortecimento. Assumindo então que a matriz de massa é conhecida, a modificação dum modelo analítico com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente, incidirá sobre os termos da sua matriz de rigidez e na consideração dos valores identificados para os coeficientes de amortecimento, eventualmente, para formação da matriz de amortecimento.

Normalmente, nos métodos de identificação modal estocástica, os vectores de componentes modais identificadas experimentalmente φ^e são normalizados de modo que a sua maior componente seja unitária, ou de forma que o seu módulo seja unitário, ou seja, de maneira que se verifique a relação seguinte:

$$(\varphi^e)^T \varphi^e = 1 \quad (5.23)$$

A relação α entre o vector de componentes modais normalizadas relativamente à matriz de massa φ_m^e e o respectivo vector de componentes modais φ^e , pode ser designada por factor de normalização, sendo igual ao inverso da raiz quadrada da massa modal respectiva:

$$\varphi_{mi}^e = \alpha_i \varphi_i^e = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \varphi_i^e \quad (5.24)$$

Exemplo: Para o exemplo que tem sido utilizado nos capítulos 2, 4 e 5, para ilustrar os temas abordados neste trabalho, considerou-se a matriz de massa obtida com o auxílio dum modelo de elementos finitos, e obteve-se a matriz dos vectores modais normalizados relativamente a essa matriz de massa, considerando as componentes modais identificadas experimentalmente com o método EFDD.

Matriz de massa [kg]	Matriz modal (componentes modais identificadas)	Matriz de massa modal [kg]
$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1777 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1773 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1770 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1712 \end{bmatrix}$	$\Phi^e = \begin{bmatrix} 0,184 & 0,659 & -0,410 & 1,000 \\ 0,380 & 1,000 & -0,372 & -0,748 \\ 0,812 & 0,234 & 1,000 & 0,145 \\ 1,000 & -0,708 & -0,588 & -0,029 \end{bmatrix}$	$(\Phi^e)^T \mathbf{M} \Phi^e = \begin{bmatrix} 3195 & 14 & 46 & -18 \\ 14 & 3500 & -13 & -60 \\ 46 & -13 & 2906 & 51 \\ -18 & -60 & 51 & 2808 \end{bmatrix}$
Factores de normalização [kg ^{-0,5}]	Matriz modal normalizada em relação à matriz de massa 10 ⁻³ [kg ^{-0,5}]	
$\alpha = \begin{bmatrix} 0,0177 \\ 0,0169 \\ 0,0186 \\ 0,0189 \end{bmatrix}$	$\Phi_m^e = \begin{bmatrix} 3,255 & 11,139 & -7,606 & 18,871 \\ 6,723 & 16,903 & -6,901 & -14,115 \\ 14,366 & 3,955 & 18,551 & 2,736 \\ 17,692 & -11,967 & -10,908 & -0,547 \end{bmatrix}$	$(\Phi_m^e)^T \mathbf{M} \Phi_m^e = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$

Normalização das componentes modais introduzindo alterações de massa conhecidas:

Uma via alternativa para normalizar, em relação à matriz de massa, as componentes modais avaliadas com métodos de identificação modal estocástica, consiste na realização de ensaios de medição da resposta dos sistemas estruturais às acções ambiente, em que são introduzidas alterações conhecidas na sua massa. Nesse caso, conforme se demonstrará adiante, através das características dinâmicas identificadas para o sistema na situação normal e na situação com massa alterada, conseguem-se obter os factores de normalização (ou as massas modais), que permitem avaliar as componentes modais normalizadas relativamente à matriz de massa. Na prática, pode haver alguma dificuldade em conseguir efectuar este tipo de ensaios (com introdução duma alteração de massa), essa dificuldade é no entanto, em princípio, menor do que a associada com a realização de ensaios com controlo e medição das forças de excitação.

A técnica referida no parágrafo anterior, de obter os factores de normalização através da introdução de alterações conhecidas na massa dos sistemas, foi proposta por Parloo *et al.* (2002) e posteriormente aprofundada por Brincker e Andersen (2003). A expressão para o factor de normalização proposta por Parloo *et al.* (2002) só é válida assumindo que as alterações de massa introduzidas no sistema não induzem alterações significativas na configuração do modo que se pretende normalizar e que as alterações na respectiva frequência são muito pequenas. Brincker e Andersen (2003) propõem uma expressão diferente, cuja validade exige apenas que as alterações de massa não introduzam mudanças significativas na configuração do modo a normalizar. Considera-se esta última formulação como tendo maior utilidade, pelo que é a que se apresenta em seguida.

Considerando então um sistema estrutural não amortecido, o problema de valores e vectores próprios correspondente ao comportamento em regime livre desse sistema, é expresso através da equação, já apresentada no capítulo 2, que se indica em seguida:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

Particularizando a expressão (5.25) para um modo de vibração de frequência ω_i e configuração $\boldsymbol{\varphi}_i$ que após a introdução de uma alteração $\Delta \mathbf{M}$ na massa do sistema, se modifica passando a ter uma frequência ω_2 e uma configuração $\boldsymbol{\varphi}_2$, obtém-se:

$$\text{Sistema inicial:} \quad (\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

$$\text{Sistema com alteração de massa:} \quad (\mathbf{K} - \omega_2^2 (\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M})) \boldsymbol{\varphi}_2 = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

Igualando as duas expressões (5.26) e (5.27), após algumas simplificações obtém-se a equação seguinte:

$$\mathbf{K}(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{M}(\omega_2^2 \varphi_2 - \omega_1^2 \varphi_1) + \omega_2^2 \Delta \mathbf{M} \varphi_2 = \mathbf{0} \quad (5.28)$$

Assumindo que a alteração de massa é efectuada de maneira que a modificação dos modos de vibração é pouco significativa, ou seja, que $\varphi_1 \approx \varphi_2 = \varphi$, obtém-se:

$$\mathbf{M} \varphi (\omega_1^2 - \omega_2^2) = \omega_2^2 \Delta \mathbf{M} \varphi \quad (5.29)$$

Pré-multiplicando ambos os termos de (5.29) por φ^T , e tendo em conta que $\varphi^T \mathbf{M} \varphi$ é a massa modal correspondente ao modo φ , obtém-se a expressão seguinte para o factor de normalização:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 \varphi^T \Delta \mathbf{M} \varphi}} = \sqrt{\frac{f_1^2 - f_2^2}{f_2^2 \varphi^T \Delta \mathbf{M} \varphi}} \quad (5.30)$$

Para que a expressão (5.30) seja válida, é apenas necessário que a alteração de massa introduzida no sistema estrutural não induza uma alteração significativa na configuração dos modos de vibração que se pretendem normalizar. Esta exigência significa no fundo que as alterações de massa devem ser efectuadas de maneira que em todos os graus de liberdade seja introduzida a mesma alteração relativa de massa. Na prática, esta metodologia exige portanto que antes de se efectuar o trabalho experimental, se tenha uma ideia razoável da maneira como se distribui a massa no sistema.

Nesta metodologia é também conveniente que a alteração de massa introduzida no sistema, seja suficiente para induzir uma alteração nas suas frequências naturais de vibração, que seja significativa para a precisão com que é efectuada a identificação dos seus valores.

Exemplo: Para exemplificar a técnica de normalização das componentes modais identificadas, através da introdução de alterações de massa num sistema, efectuaram-se uma série de 4 ensaios de medição de vibrações ambiente num modelo de um edifício de 4 pisos, introduzindo-lhe alterações de massa conhecidas. Esses ensaios foram realizados no modelo que tem sido utilizado para ilustrar os temas abordados neste trabalho, mas com massas adicionais diferentes das até agora consideradas. Para esses ensaios, as massas adicionais no modelo, foram materializadas com cubos de betão, dos utilizados nos ensaios de determinação de tensões de rotura (tendo cada um, uma massa de cerca de 8 kg). Assim, foi possível efectuar mais facilmente a introdução de pequenas alterações de massa (aproximadamente proporcionais à massa inicial) e fazer também uma verificação da capacidade das técnicas de identificação modal utilizadas, para detectar as alterações assim induzidas nas características dinâmicas do modelo.

As diferentes situações de massas adicionais consideradas nos 4 ensaios efectuados, são ilustradas nas figuras 5.7 e 5.8. Os ensaios B, C e D correspondem a alterações de massa de cerca de, respectivamente, 6 %, 12 % e 24 % da massa do sistema no ensaio A.

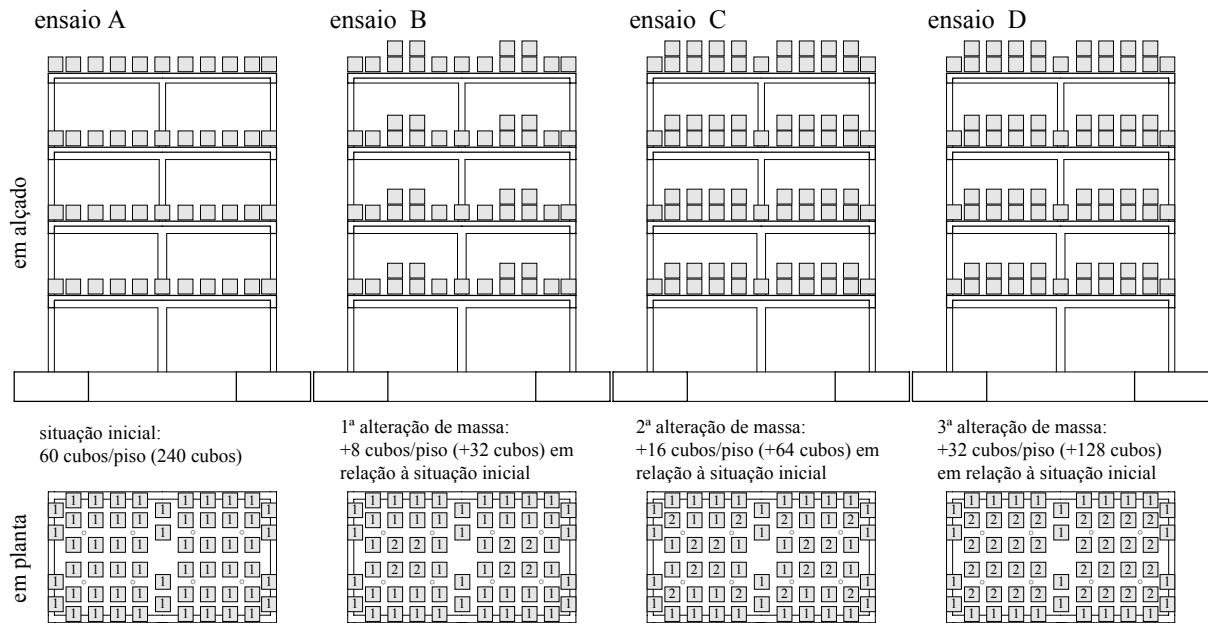


Figura 5.7 – Esquemas do modelo nas diferentes situações de massas adicionais.

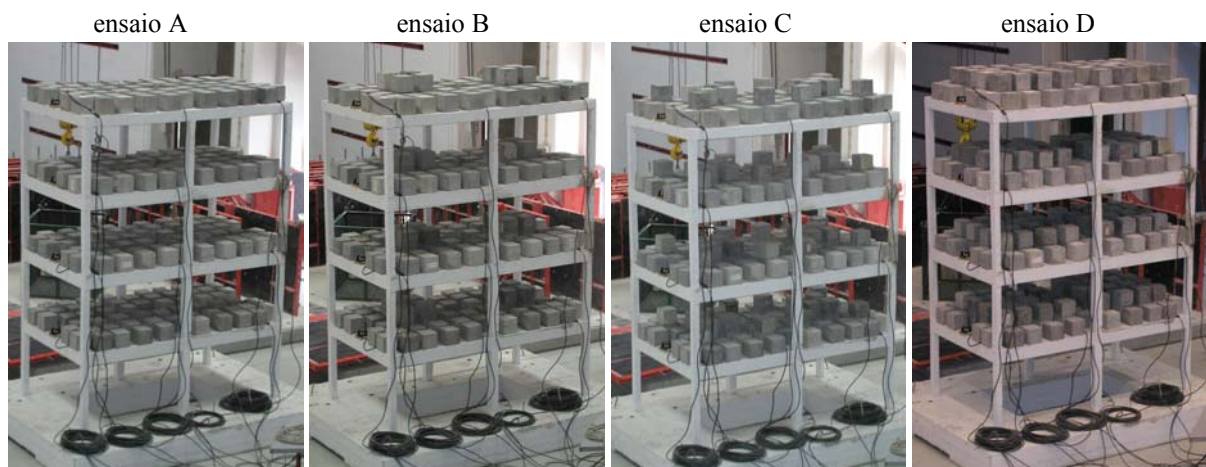


Figura 5.8 – Vistas do modelo nos quatro ensaios com diferentes situações de massas adicionais.

Em cada uma das quatro situações de massas adicionais diferentes, ilustradas nas figuras 5.7 e 5.8, efectuou-se um ensaio de medição de vibrações ambiente. Esses ensaios foram efectuados de forma semelhante ao ensaio descrito no capítulo 4 e cujos registos têm vindo a ser considerados neste trabalho para exemplificar os temas abordados. Na análise que se segue, também só se analisam os registos na direcção longitudinal do modelo, por uma questão de concisão deste exemplo.

O equipamento utilizado nestes ensaios foi configurado de forma idêntica à descrita no capítulo 4, ou seja, com capacidade de discretizar uma amplitude mínima de aceleração de $0,076 \mu g$. Os registos foram obtidos com uma frequência de amostragem de 1000 Hz e a sua duração total em cada ensaio foi de cerca de 60 minutos.

Os registos obtidos nos ensaios foram pré-processados com remoção de média, filtragem passa-baixo com frequência de corte a 25 Hz com um filtro de tipo *Butterworth* de ordem 8 e decimação para uma frequência de 62,5 Hz. Em seguida utilizou-se a técnica do decremento aleatório para estimar as funções RD. Para tal considerou-se a condição inicial de passagem por nível (com o valor do nível óptimo, de acordo com o exposto no capítulo 4) e seleccionaram-se amostras com uma duração de cerca de 33 segundos (2048 valores a 62,5 Hz) de forma a permitir que as funções RD decaíssem praticamente até zero dentro desse período de tempo. Aplicou-se em seguida o método RD-BFD descrito no capítulo 4. Na figura 5.9 apresentam-se os espectros normalizados médios (ANPSD) correspondentes a cada um dos ensaios com massas adicionais diferentes.

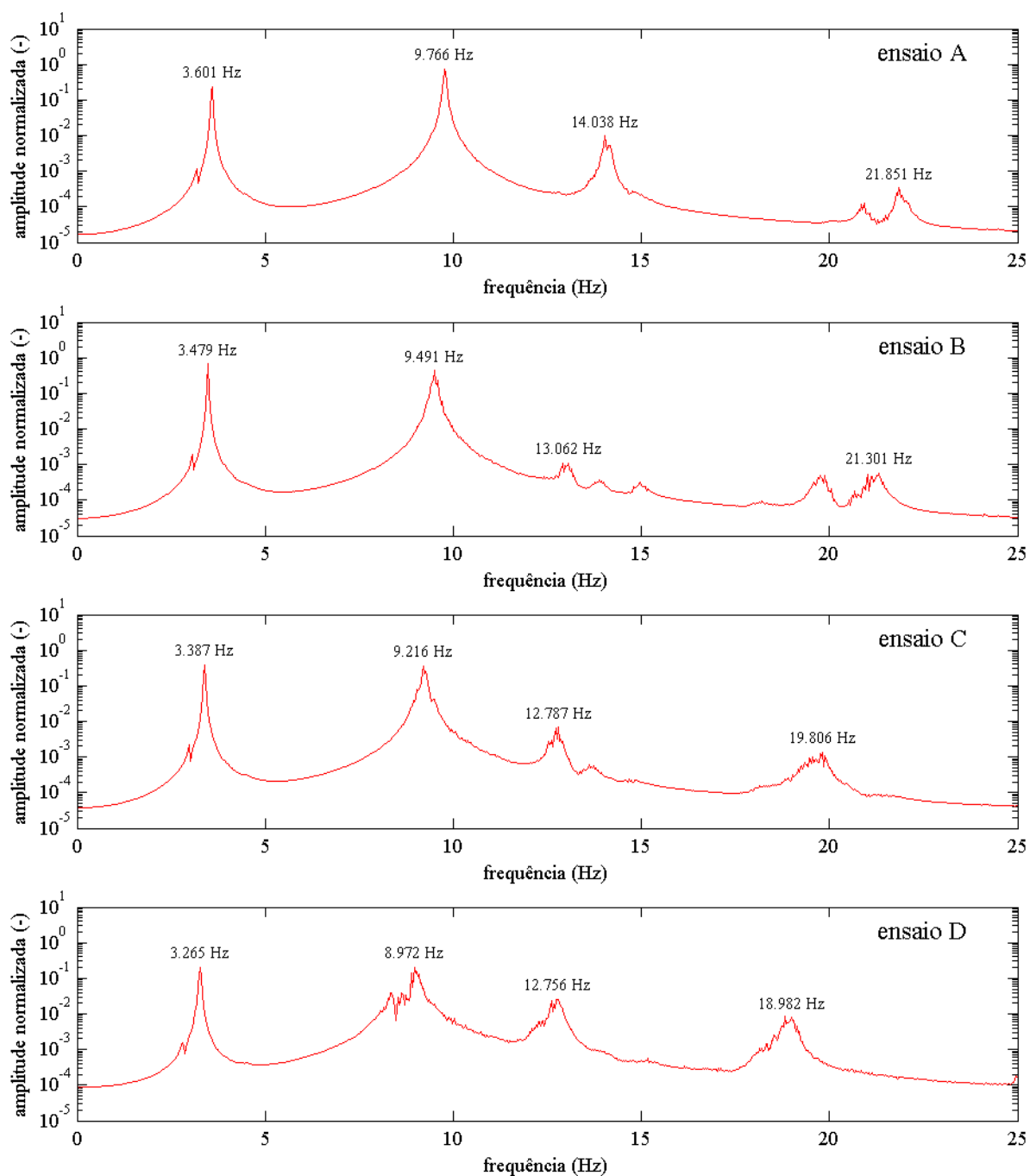


Figura 5.9 – ANPSD para cada um dos ensaios com diferentes situações de massas adicionais.

Os espectros representados na figura 5.9 têm uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,031$ Hz, correspondente à duração com que foram estimadas as funções RD (2048 valores a 62,5 Hz). Nesses espectros estão também indicados os valores das frequências que foram identificadas como correspondentes a modos naturais de vibração do modelo do edifício, na direcção longitudinal. Um primeiro aspecto a comentar tem a ver com o facto de que, com o método de identificação modal utilizado, foi de facto possível detectar as alterações nas frequências naturais de vibração, induzidas pelas mudanças de massa efectuadas no modelo do edifício.

Indicam-se em seguida os valores das frequências e componentes modais identificadas com o método RD-BFD para cada um dos ensaios efectuados com massas adicionais diferentes. Para o ensaio A, que constitui uma situação de referência, indicam-se também os valores da massa inicial (estimados tendo em conta a geometria dos elementos estruturais do modelo, a massa específica do betão armado e as massas adicionais colocadas nesse ensaio) e dos factores de normalização α determinados a partir desses valores assumidos para a massa do sistema. Para os ensaios B, C e D indicam-se também os coeficientes MAC entre os respectivos vectores modais identificados e os vectores modais identificados no ensaio A, a variação de massa introduzida em cada piso nesse ensaio relativamente ao ensaio A, a variação entre as respectivas frequências identificadas relativamente às frequências identificadas no ensaio A, e os factores de normalização α determinados de acordo com a expressão (5.30) tendo em conta as variações de massa e de frequência relativamente ao ensaio A.

ensaio A - situação inicial

$$\begin{array}{llll} \text{freq. [Hz]} & \text{componentes modais identificadas} & \text{massa inicial [kg]} & \text{factores } \alpha \text{ [kg}^{-0,5}\text{]} \\ f = \begin{bmatrix} 3,601 \\ 9,766 \\ 14,038 \\ 21,851 \end{bmatrix} & \Phi = \begin{bmatrix} 0,186 & 0,673 & -0,365 & 1,000 \\ 0,378 & 1,000 & -0,289 & -0,585 \\ 0,826 & 0,176 & 1,000 & 0,079 \\ 1,000 & -0,686 & -0,650 & -0,047 \end{bmatrix} & M = \begin{bmatrix} 1057 \\ 1054 \\ 1050 \\ 992 \end{bmatrix} & \alpha = \begin{bmatrix} 0,0230 \\ 0,0222 \\ 0,0243 \\ 0,0246 \end{bmatrix} \end{array}$$

ensaio B - 1ª alteração de massa

$$\begin{array}{llllll} \text{freq. [Hz]} & \text{componentes modais identificadas} & \text{MAC}_{B-A} [-] & \Delta M_{B-A} \text{ [kg]} & \Delta f_{B-A} \text{ [Hz]} & \text{factores } \alpha \text{ [kg}^{-0,5}\text{]} \\ f = \begin{bmatrix} 3,479 \\ 9,491 \\ 13,062 \\ 21,301 \end{bmatrix} & \Phi = \begin{bmatrix} 0,185 & 0,674 & -0,239 & 1,000 \\ 0,375 & 1,000 & -0,141 & -0,588 \\ 0,825 & 0,167 & 1,000 & 0,169 \\ 1,000 & -0,720 & -0,851 & -0,116 \end{bmatrix} & MAC = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 0,957 \\ 0,991 \end{bmatrix} & \Delta M = \begin{bmatrix} 64,1 \\ 63,3 \\ 63,2 \\ 64,2 \end{bmatrix} & \Delta f = \begin{bmatrix} 0,122 \\ 0,275 \\ 0,977 \\ 0,550 \end{bmatrix} & \alpha = \begin{bmatrix} 0,0245 \\ 0,0217 \\ 0,0386 \\ 0,0246 \end{bmatrix} \end{array}$$

ensaio C - 2ª alteração de massa

$$\begin{array}{llllll} \text{freq. [Hz]} & \text{componentes modais identificadas} & \text{MAC}_{C-A} [-] & \Delta M_{C-A} \text{ [kg]} & \Delta f_{C-A} \text{ [Hz]} & \text{factores } \alpha \text{ [kg}^{-0,5}\text{]} \\ f = \begin{bmatrix} 3,387 \\ 9,216 \\ 12,787 \\ 19,806 \end{bmatrix} & \Phi = \begin{bmatrix} 0,184 & 0,674 & -0,358 & 1,000 \\ 0,371 & 1,000 & -0,320 & -0,815 \\ 0,824 & 0,171 & 1,000 & 0,211 \\ 1,000 & -0,720 & -0,718 & -0,029 \end{bmatrix} & MAC = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 1,000 \\ 0,998 \\ 0,968 \end{bmatrix} & \Delta M = \begin{bmatrix} 127,7 \\ 126,5 \\ 126,1 \\ 128,3 \end{bmatrix} & \Delta f = \begin{bmatrix} 0,214 \\ 0,550 \\ 1,251 \\ 2,045 \end{bmatrix} & \alpha = \begin{bmatrix} 0,0235 \\ 0,0222 \\ 0,0314 \\ 0,0355 \end{bmatrix} \end{array}$$

ensaio D - 3ª alteração de massa

$$\begin{array}{llllll} \text{freq. [Hz]} & \text{componentes modais identificadas} & \text{MAC}_{D-A} [-] & \Delta M_{D-A} \text{ [kg]} & \Delta f_{D-A} \text{ [Hz]} & \text{factores } \alpha \text{ [kg}^{-0,5}\text{]} \\ f = \begin{bmatrix} 3,265 \\ 8,972 \\ 12,756 \\ 18,982 \end{bmatrix} & \Phi = \begin{bmatrix} 0,178 & 0,677 & -0,415 & 1,000 \\ 0,362 & 1,000 & -0,336 & -0,520 \\ 0,823 & 0,170 & 1,000 & -0,333 \\ 1,000 & -0,729 & -0,623 & 0,291 \end{bmatrix} & MAC = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,999 \\ 0,997 \\ 0,807 \end{bmatrix} & \Delta M = \begin{bmatrix} 255,3 \\ 254,5 \\ 255,0 \\ 256,6 \end{bmatrix} & \Delta f = \begin{bmatrix} 0,336 \\ 0,794 \\ 1,282 \\ 2,869 \end{bmatrix} & \alpha = \begin{bmatrix} 0,0302 \\ 0,0273 \\ 0,0319 \\ 0,0435 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para analisar os valores acima indicados é importante ter em conta um aspecto, que já foi referido no capítulo 4, que é o facto do modelo que foi utilizado nestes ensaios estar danificado. Assim, tendo em conta que as alterações de massa introduzidas no modelo implicaram também aumentos da compressão nas secções dos pilares, pode daí ter resultado um aumento de rigidez que não foi uniforme em todos os elementos, mas terá sido maior nas secções mais fendilhadas. Há portanto algumas não-linearidades resultantes dos danos existentes no modelo, que desvirtuam um pouco o exemplo que se pretende dar do método de normalização das componentes modais introduzindo alterações de massa conhecidas, no qual se assume que a rigidez do sistema não sofre alterações.

Como se pode verificar nos valores dos coeficientes MAC acima indicados, as alterações de massa introduzidas no modelo quase não provocaram alterações nas configurações dos dois primeiros modos, mas em relação ao 3º e ao 4º modos já houve algumas alterações, especialmente no 4º modo no ensaio D.

Quanto aos factores de normalização α , pode-se verificar que relativamente aos dois primeiros modos, os valores calculados a partir dos resultados dos ensaios B (0,0245 para o 1º modo e 0,0217 para o 2º modo) e C (0,0235 para o 1º modo e 0,0222 para o 2º modo) são bastante próximos dos determinados assumindo que a matriz de massa é conhecida (0,0230 para o 1º modo e 0,0222 para o 2º modo); já com os resultados do ensaio D, obtiveram-se factores α que se afastam mais destes valores. Relativamente aos dois últimos modos de vibração, os valores calculados para os factores α também diferem um pouco dos determinados assumindo que a matriz de massa é conhecida.

Apesar das dificuldades sentidas com este exemplo para ilustrar o método de normalização das componentes modais por introdução de alterações de massa conhecidas, os resultados obtidos, pelo menos os relativos ao 1º e 2º modos, podem ser considerados como positivos. É no entanto conveniente que esse método seja testado noutras situações, nomeadamente em modelos reduzidos (onde é mais fácil efectuar as alterações de massa) em que não haja dúvidas quanto à linearidade do seu comportamento para diferentes situações de massa do sistema.

5.5 Modificação directa das matrizes de massa e rigidez

A modificação de modelos analíticos, com base nas características dinâmicas avaliadas experimentalmente, pode ser efectuada utilizando diversas metodologias. Uma apresentação geral de diversos desses métodos é feita por Imregun e Visser (1990), Mottershead e Friswell (1993), Friswell e Mottershead (1995), Heylen *et al.* (1997) e Maia *et al.* (1998). No presente trabalho, abordam-se apenas os métodos de modificação directa das matrizes de massa e rigidez.

Nos métodos de modificação directa das matrizes de massa e rigidez, todos os elementos dessas matrizes, correspondentes a um modelo analítico inicial, são otimizados num único passo, tendo em conta as características dinâmicas identificadas experimentalmente. Os procedimentos de optimização utilizados nos métodos de identificação directa baseiam-se na verificação de uma das equações seguintes (Heylen *et al.*, 1997):

- Equação do movimento do sistema em regime livre:

$$\left(\mathbf{K}^m - (\omega_i^e)^2 \mathbf{M}^m \right) \Phi_i^e = \mathbf{0} \quad (5.31)$$

- Relações de ortogonalidade dos vectores modais relativamente às matrizes de massa e rigidez:

$$(\Phi^e)^T \mathbf{M}^m \Phi^e = [\mathbf{m}_i^e] \quad \text{e} \quad (\Phi^e)^T \mathbf{K}^m \Phi^e = [\mathbf{k}_i^e] \quad (5.32)$$

- Simetria das matrizes de massa e rigidez:

$$\mathbf{M}^m - (\mathbf{M}^m)^T = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}^m - (\mathbf{K}^m)^T = \mathbf{0} \quad (5.33)$$

em que: ω_i^e são as frequências naturais do sistema, identificadas experimentalmente;

Φ_i^e e Φ^e são os vectores e a matriz de componentes modais identificadas;

\mathbf{M}^m e \mathbf{K}^m são as matrizes de massa e rigidez modificadas.

Para os métodos de modificação directa das matrizes de massa e rigidez, é importante que a identificação modal seja tão completa quanto possível (idealmente, todos os modos do sistema deverão ser identificados). Também é necessário que os vectores de componentes modais estejam normalizados relativamente à matriz de massa.

Uma vez que os métodos de modificação directa das matrizes de massa e rigidez incidem sobre os elementos dessas matrizes, há alguma perda do significado físico dos resultados da modificação baseada nas características dinâmicas experimentais. Sendo esta talvez uma desvantagem deste tipo de métodos. No entanto, posteriormente à modificação das matrizes, também é possível a partir delas, estabelecer relações com as propriedades físicas dos elementos estruturais dum sistema.

Apresenta-se e exemplifica-se em seguida um dos métodos de modificação directa das matrizes de rigidez e massa. Trata-se do método baseado em multiplicadores de *Lagrange*, havendo também os métodos baseados nas condições de ortogonalidade (5.32) e os métodos de perturbação (Heylen *et al.*, 1997), os quais não são abordados neste trabalho.

Modificação directa das matrizes de rigidez e massa utilizando multiplicadores de Lagrange:

No método de modificação directa das matrizes de rigidez e massa utilizando multiplicadores de *Lagrange* (Baruch, 1978; Caesar, 1982; Berman e Nagy, 1983; Genatios, 1998), consideram-se

como funções a minimizar as *distâncias* entre as matrizes analíticas modificadas e as matrizes analíticas iniciais, ponderadas com a matriz de massa, ou seja as funções:

$$\varepsilon_M = \left\| \mathbf{M}^{-0.5} (\mathbf{M}^m - \mathbf{M}) \mathbf{M}^{-0.5} \right\| \quad (5.34)$$

$$\varepsilon_K = \left\| \mathbf{M}^{-0.5} (\mathbf{K}^m - \mathbf{K}) \mathbf{M}^{-0.5} \right\| \quad (5.35)$$

Para a modificação da matriz de massa, considerando (5.34) como a função a minimizar e a relação (5.32) como restrição, obtém-se a seguinte função de *Lagrange*:

$$\mathfrak{S}_M = \varepsilon_M + \sum_{ij} \lambda_{ij} \left((\Phi_m^e)^T \mathbf{M} \Phi_m^e - \mathbf{I} \right)_{ij} \quad (5.36)$$

em que: λ_{ij} são os multiplicadores de *Lagrange*;

Φ_m^e é a matriz de componentes modais identificadas experimentalmente, normalizadas relativamente à matriz de massa.

Da minimização de (5.36) obtém-se a expressão seguinte para a matriz de massa modificada:

$$\mathbf{M}^m = \mathbf{M} + \mathbf{M} \Phi_m^e \mathbf{M}_a^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{M}_a) \mathbf{M}_a^{-1} (\Phi_m^e)^T \mathbf{M} \quad (5.37)$$

em que: $\mathbf{M}_a = (\Phi_m^e)^T \mathbf{M} \Phi_m^e$.

Para a modificação da matriz de rigidez, considerando (5.35) como função a minimizar e as relações (5.31) a (5.33) como restrições, obtém-se a seguinte função de *Lagrange*:

$$\mathfrak{S}_K = \varepsilon_K + \sum_{ij} \lambda_{ij} \left(\mathbf{K} \Phi_m^e - \mathbf{M} \Phi_m^e \Omega^{e^2} \right)_{ij} + \sum_{ij} \mu_{ij} \left((\Phi_m^e)^T \mathbf{K} \Phi_m^e - \Omega^{e^2} \right)_{ij} + \sum_{ij} \gamma_{ij} (\mathbf{K} - \mathbf{K}^T)_{ij} \quad (5.38)$$

em que: λ_{ij} , μ_{ij} e γ_{ij} são os multiplicadores de *Lagrange*;

Ω^{e^2} é a matriz com os quadrados dos valores das frequências angulares identificadas experimentalmente.

Da minimização de (5.38) obtém-se a expressão seguinte para a matriz de rigidez modificada:

$$\mathbf{K}^m = \mathbf{K} - \mathbf{K} \Phi_m^e (\Phi_m^e)^T \mathbf{M}^m - \mathbf{M}^m \Phi_m^e (\Phi_m^e)^T \mathbf{K} + \mathbf{M}^m \Phi_m^e \left((\Phi_m^e)^T \mathbf{K} \Phi_m^e + \Omega^{e^2} \right) \Phi_m^e \mathbf{M}^m \quad (5.39)$$

Exemplo: A partir das componentes modais identificadas com o método EFDD, calculou-se e apresentou-se anteriormente a matriz modal normalizada em relação à matriz de massa, a qual foi determinada, assumindo a hipótese da matriz de massa ser conhecida (o que para o exemplo em causa, é uma hipótese bastante razoável).

Com base na matriz modal normalizada em relação à matriz de massa e nas frequências identificadas experimentalmente, aplicou-se o método de modificação directa das matrizes de massa e rigidez utilizando multiplicadores de *Lagrange*, apenas para ajustar a matriz de rigidez inicial (uma vez que a matriz de massa é assumida como sendo conhecida). Obtiveram-se assim os resultados que se apresentam em seguida:

Matriz de massa $[kg]$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1777 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1773 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1770 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1712 \end{bmatrix}$$

Modelo inicial

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 22,202 & -11,179 & 0,504 & 0,017 \\ -11,179 & 17,359 & -7,445 & 0,403 \\ 0,504 & -7,445 & 13,613 & -6,651 \\ 0,017 & 0,403 & -6,651 & 6,216 \end{bmatrix} \quad \text{Frequências } [Hz] \quad \mathbf{f}_i^a = \begin{bmatrix} 3,73 \\ 10,23 \\ 16,25 \\ 21,65 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz modal (vectores próprios)} \quad \mathbf{\Phi}^a = \begin{bmatrix} 0,256 & 0,747 & -0,669 & 1,000 \\ 0,526 & 1,000 & -0,176 & -0,936 \\ 0,826 & 0,177 & 1,000 & 0,435 \\ 1,000 & -0,895 & -0,580 & -0,128 \end{bmatrix}$$

Valores identificados

$$\mathbf{f}_i^e = \begin{bmatrix} 2,98 \\ 8,04 \\ 11,66 \\ 18,18 \end{bmatrix} \quad \text{Frequências } [Hz] \quad \mathbf{\Phi}^e = \begin{bmatrix} 0,184 & 0,659 & -0,410 & 1,000 \\ 0,380 & 1,000 & -0,372 & -0,748 \\ 0,812 & 0,234 & 1,000 & 0,145 \\ 1,000 & -0,708 & -0,588 & -0,029 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz modal normalizada } 10^{-3} [kg^{-0.5}] \quad \mathbf{\Phi}_m^e = \begin{bmatrix} 3,255 & 11,139 & -7,606 & 18,871 \\ 6,723 & 16,903 & -6,901 & -14,115 \\ 14,366 & 3,955 & 18,551 & 2,736 \\ 17,692 & -11,967 & -10,908 & -0,547 \end{bmatrix}$$

Modelo modificado

$$\mathbf{K}^m = \begin{bmatrix} 17,420 & -8,344 & 0,000 & 0,086 \\ -8,344 & 10,645 & -2,865 & 0,050 \\ 0,000 & -2,865 & 6,255 & -3,496 \\ 0,086 & 0,050 & -3,496 & 3,411 \end{bmatrix} \quad \text{Frequências } [Hz] \quad \mathbf{f}_i^{am} = \begin{bmatrix} 2,98 \\ 8,04 \\ 11,66 \\ 18,19 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz modal (vectores próprios)} \quad \mathbf{\Phi}^{am} = \begin{bmatrix} 0,184 & 0,652 & -0,399 & 1,000 \\ 0,381 & 1,000 & -0,383 & -0,694 \\ 0,814 & 0,224 & 1,000 & 0,122 \\ 1,000 & -0,708 & -0,615 & -0,020 \end{bmatrix}$$

Os valores calculados com a matriz de rigidez modificada, para as frequências e componentes modais do sistema estrutural, ajustam-se muito melhor aos valores identificados experimentalmente, do que os determinados com a matriz de rigidez do modelo inicial. Esse facto é bem evidente na figura 5.10.

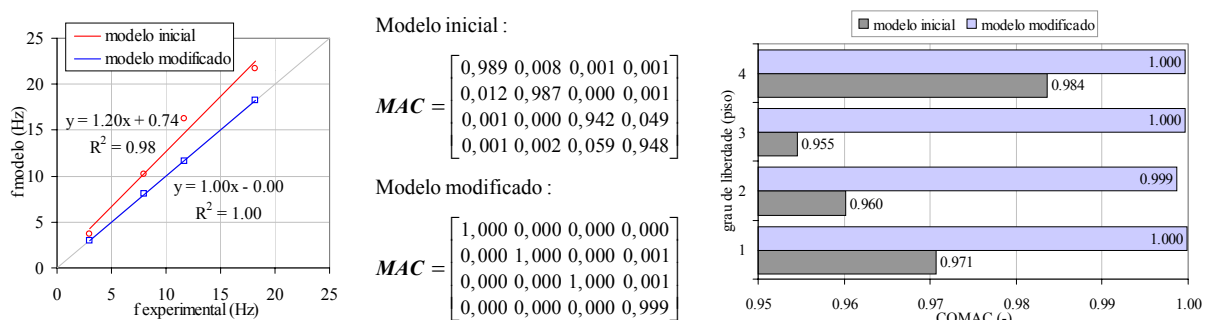


Figura 5.10 – Verificação do ajuste do modelo modificado às características dinâmicas identificadas.

Como se pode verificar, obtiveram-se resultados bastante bons com o método de modificação directa das matrizes de massa e rigidez. Tal deve-se ao facto de a modificação da matriz de rigidez ter sido feita utilizando informação modal completa, pois, tendo o sistema em análise 4 graus de liberdade, e portanto 4 modos de vibração, as frequências e componentes modais de todos esses modos foram identificadas e consideradas para a modificação da matriz de rigidez. No caso da identificação modal não ser completa, os resultados obtidos com estes métodos de modificação de modelos analíticos, não são tão bons como os conseguidos neste exemplo.

5.6 Considerações finais

Neste capítulo abordaram-se alguns aspectos relacionados com a comparação das características dinâmicas identificadas por via experimental com as calculadas com modelos analíticos, e com a modificação destes de modo a ajustá-los aos resultados experimentais. Os temas que foram analisados estão directamente relacionados com a identificação modal experimental, constituindo um dos seus interesses práticos.

Algumas das *ferramentas* de comparação entre características dinâmicas identificadas e calculadas com modelos analíticos, abordadas neste capítulo, serão utilizadas em vários dos exemplos de aplicação que serão apresentados no capítulo 6. Esses métodos foram aqui apresentados no âmbito da comparação entre características dinâmicas experimentais e analíticas, no entanto a sua utilização pode ser alargada a outras situações, como por exemplo, a comparação entre resultados obtidos com métodos de identificação diferentes ou com modelos analíticos diferentes. Nos próprios métodos de identificação modal pode haver interesse em utilizar algumas das *ferramentas* aqui apresentadas; como é o caso do método EFDD (ver capítulo 4) onde se utiliza o coeficiente MAC para a selecção das funções de densidade espectral correspondentes a cada modo de vibração dum sistema estrutural.

Para os métodos de modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas experimentais, é necessário que as componentes modais identificadas sejam normalizadas em relação à massa dos sistemas. Apresentaram-se assim, duas formas de efectuar essa normalização na identificação modal estocástica.

Em termos dos métodos de modificação de modelos analíticos, apresentaram-se e aplicaram-se os *métodos de modificação directa das matrizes de massa e de rigidez*. Neste domínio há muitas outras metodologias cuja análise e aplicação é merecedora de trabalho a desenvolver no futuro.

A modificação de modelos analíticos, com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente, pode também ser efectuada de forma *manual*. Nesse caso, os valores de diversos parâmetros, tais como o módulo de elasticidade dos materiais ou a rigidez dos apoios, são alterados *manualmente* de modo a ajustar as características dinâmicas calculadas às identificadas. Ao efectuar a modificação dos modelos analíticos desta forma, são bastantes úteis, as *ferramentas* de comparação apresentadas neste capítulo. Há também, da parte de quem efectua o trabalho de ajuste dum modelo analítico, um benefício importante em termos de compreensão do comportamento dinâmico da estrutura em análise e da melhor forma de o modelar. Em vários exemplos que serão apresentados no capítulo 6, seguiu-se esta metodologia de modificação *manual* dos parâmetros de modelos de elementos finitos desenvolvidos para diversas estruturas, tendo-se obtido bons ajustes entre as características dinâmicas calculadas e as avaliadas com métodos de identificação modal estocástica.

Capítulo 6

Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil

6.1 Considerações gerais

Durante o período de desenvolvimento deste trabalho, houve oportunidade de efectuar diversos ensaios de medição da resposta de estruturas às acções ambiente, com vista a avaliar as suas características dinâmicas através da aplicação de métodos de identificação modal estocástica. Praticamente todos esses ensaios integraram-se em estudos solicitados ao LNEC no âmbito de ensaios de recepção de estruturas, realizados imediatamente após o fim da sua construção e antes da sua entrada em serviço, ou integrados em trabalhos de inspecção de estruturas já com alguns anos de utilização.

As aplicações efectuadas envolvem estruturas de pontes, edifícios e ainda uma barragem. A maioria dos casos que serão apresentados referem-se a estruturas de pontes, uma vez que estas constituem o tipo estrutural para o qual há mais solicitações, por parte das entidades por elas responsáveis, para a realização de estudos de avaliação do comportamento estrutural (quer estático quer dinâmico).

Apresentam-se em seguida diversos casos de aplicação, subdividindo-os nos três tipos estruturais acima referidos. Para cada um deles, os vários exemplos são apresentados numa ordem cronológica da sua realização, e correspondem a um período desde 1997 a 2002. Conforme será patente na apresentação, durante esse período procurou-se ir melhorando diversos aspectos que se consideram importantes para a realização de estudos de caracterização dinâmica de estruturas com base na medição de vibrações ambiente, nomeadamente aspectos relacionados com:

- questões, aparentemente mais simples, de planeamento, logística e execução do ensaio em si;
- o adequado conhecimento das características dos equipamentos utilizados, de modo a explorar bem as suas capacidades;
- a devida preparação de todas as pessoas envolvidas na realização dum ensaio;
- a verificação, ainda no local de realização dos ensaios, da qualidade da informação obtida;
- a elaboração de modelos de elementos finitos na fase de preparação dos ensaios e a sua utilização na fase de análise da informação;
- o pré-processamento dos registos;

- a utilização de métodos de identificação modal estocástica adequados.

Em vários dos casos de aplicação que serão apresentados, desenvolveram-se modelos de elementos finitos das estruturas ensaiadas, quer na fase de preparação dos ensaios quer na fase de análise da informação obtida. Assim, nesses casos, comparam-se as características dinâmicas identificadas experimentalmente com as calculadas com esses modelos, tendo em conta os aspectos descritos no capítulo 5.

Alguns dos exemplos que serão apresentados integraram-se em estudos de avaliação da capacidade de estruturas de pontes ferroviárias, para suportarem o tráfego de comboios de alta velocidade. Esses estudos envolveram diversos aspectos específicos dessa avaliação, que não serão abordados neste trabalho, referindo-se apenas a análise de identificação modal que foi desenvolvida, e que constituiu uma parte importante dos estudos efectuados.

Nos casos de aplicação descritos em seguida, apresenta-se também uma aplicação particular da identificação modal estocástica, que consiste na determinação das frequências naturais de vibração dos tirantes de pontes atirantadas, com vista à avaliação das forças neles instaladas. Embora nesse caso, o sistema estrutural cujas frequências se pretendem identificar, seja relativamente simples, é uma situação em que a análise da resposta do tirante às acções ambiente (vento) é, normalmente, suficiente para identificar as suas frequências de vibração. Este tipo de aplicação tem demonstrado ser de grande utilidade, quer durante a construção de pontes atirantadas, quer na inspecção de estruturas em serviço.

Uma vez que o número de casos de aplicação, apresentados neste trabalho, é bastante grande, pode parecer que nalgumas situações há apenas uma repetição de procedimentos de ensaio e da aplicação de métodos de análise utilizados anteriormente. No entanto, cada caso que será apresentado, pelas particularidades de cada estrutura ensaiada, constituiu de facto, uma experiência adicional enriquecedora, em termos de compreensão dos próprios fundamentos dos métodos de identificação modal estocástica, das capacidades dos equipamentos utilizados, e das potencialidades da análise da resposta das estruturas às acções ambiente a que estão sujeitas, como forma de identificar as suas características dinâmicas e de avaliar o seu comportamento estrutural global.

Para alguns dos casos de aplicação apresentados em seguida, a descrição do trabalho efectuado é feita de forma mais sucinta, enquanto que para outros faz-se uma apresentação mais detalhada. Procura-se também, sempre que se considera adequado, tecer alguns comentários relativos a cada caso de aplicação, traduzindo dessa forma, uma evolução, por parte do autor deste trabalho, na compreensão dos conceitos de base da identificação modal estocástica, das suas potencialidades e dos procedimentos e técnicas de ensaio mais adequados.

6.2 Estruturas de pontes e viadutos

Pelos motivos anteriormente indicados, a maioria das aplicações apresentadas neste trabalho, dizem respeito a estruturas de pontes. É também de referir que a avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de pontes tem um longa tradição no LNEC, referindo-se como um dos primeiros trabalhos, os ensaios dinâmicos realizados na ponte em arco sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954). Assim, no final da apresentação dos diversos casos de aplicação da identificação modal estocástica em estruturas de pontes, desenvolvidos no âmbito deste trabalho, faz-se ainda uma apreciação geral das características dinâmicas de estruturas de pontes, avaliadas experimentalmente pelo LNEC.

Os casos de aplicação apresentados em seguida, abarcam diversos tipos de estruturas de pontes e uma vasta gama de vãos, desde os 12 m na ponte ferroviária de Canelas até aos 1013 m na ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa. É de salientar, que em todos os casos, verificou-se que com os métodos de identificação modal estocástica aplicados na análise da resposta dessas estruturas, medida experimentalmente, obtiveram-se bons resultados em termos de avaliação das suas características dinâmicas.

6.2.1 Ponte da Arrábida sobre o rio Douro no Porto

Considerações gerais:

O estudo de caracterização dinâmica experimental efectuado na ponte da Arrábida no Porto, (LNEC - Rodrigues *et al.*, 1997) integrou-se em trabalhos de inspecção e avaliação estrutural dessa ponte coordenados pela empresa *A2P Consult* (Appleton *et al.*, 1998). Foi desenvolvido com o objectivo de identificar as características dinâmicas da ponte, contribuindo, dessa forma, para a avaliação do seu comportamento estrutural global. Note-se que na altura de realização desse estudo, a ponte apresentava sinais de deterioração em alguns dos seus elementos estruturais, tendo vindo, posteriormente, a ser objecto de trabalhos de reparação (Frias *et al.*, 2002).

O estudo efectuado na ponte da Arrábida consistiu na realização de ensaios de medição da resposta da estrutura às acções do vento e da passagem do tráfego rodoviário, e na análise dos registos obtidos nesses ensaios, com vista a identificar as características dinâmicas da ponte. Este estudo foi apresentado numa conferência nacional (Rodrigues *et al.*, 1997), em conferências internacionais (Rodrigues e Campos Costa, 1998, 1999) e foi também objecto de um artigo publicado na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas (Rodrigues e Campos Costa, 1998).

Para o autor deste trabalho, o estudo efectuado na ponte da Arrábida, contribuiu de forma decisiva para o seu interesse no tema que nele é abordado. Foi também um dos casos que melhor ilustra uma das vantagens em utilizar a identificação modal estocástica na caracterização dinâmica de estruturas de pontes em serviço. De facto, na ponte da Arrábida seria quase impossível efectuar uma interrupção de tráfego (dado o transtorno que provocaria nos acessos à cidade do Porto) que seria necessária no caso de se ter optado por efectuar ensaios dinâmicos de vibração forçada.

Breve descrição da ponte da Arrábida:

A ponte da Arrábida no Porto é uma ponte de betão armado com um comprimento entre testas dos encontros de 493,2 m e uma largura total de 26,5 m. Os seus elementos estruturais principais são dois arcos de betão armado com uma corda de 270,0 m e uma flecha de 52,0 m. À data de inauguração da ponte, em 1963, e durante vários anos, estes foram os maiores arcos de betão armado do Mundo (Marecos, 1973), representando como tal uma notável realização da Engenharia Portuguesa e em particular do seu projectista, o Prof. Edgar Cardoso. Na figura 6.1 apresenta-se um alçado longitudinal da ponte da Arrábida e na figura 6.2 uma vista geral dessa obra.

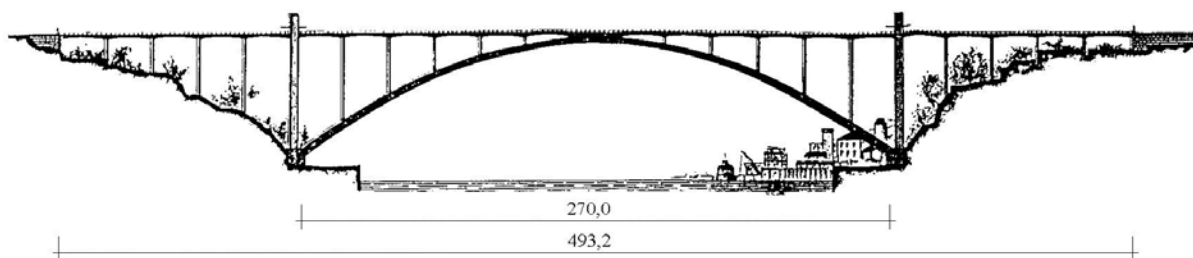


Figura 6.1 – Alçado longitudinal da ponte da Arrábida.



Figura 6.2 – Vista geral da ponte da Arrábida.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios efectuados na ponte da Arrábida, utilizaram-se 6 macro-sismógrafos GSR-16 cujas características foram apresentadas no capítulo 3. Esses aparelhos foram utilizados na sua configuração de maior sensibilidade (com capacidade de discretização de uma amplitude mínima de aceleração de $15,3 \mu g$), tendo-se utilizado uma frequência de amostragem de 50 Hz e obtido registos com uma duração total de 8 minutos (séries de 24000 valores amostrados a 50 Hz).

Os ensaios consistiram na medição da resposta em aceleração da estrutura, aos efeitos da acção do tráfego rodoviário (bastante intenso durante todo o período de realização dos ensaios) e de vento *moderado* na direcção transversal à ponte, no sentido de jusante para montante.

As medições da resposta da estrutura foram efectuadas em 10 pontos diferentes da ponte, cuja localização se encontra indicada na figura 6.3. Efectuaram-se um total de 3 ensaios durante os quais, 4 macro-sismógrafos ficaram sempre colocados nos pontos de referência localizados no interior dos arcos (pontos SM, SJ, NM, NJ) enquanto que os 2 aparelhos restantes foram colocados em pontos situados no tabuleiro da ponte (pontos 1M, 1J, 2M, 2J, 3M, 3J). No quadro 6.1 indicam-se os pontos instrumentados em cada ensaio.

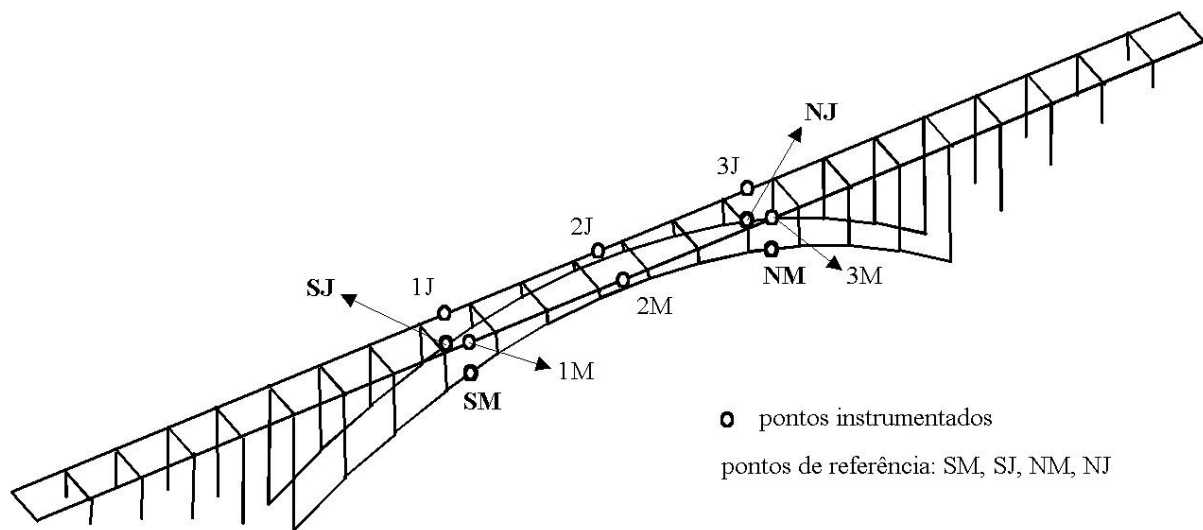


Figura 6.3 – Pontos instrumentados no ensaio da ponte da Arrábida.

Quadro 6.1 – Pontos instrumentados em cada ensaio.

Ensaio	GSR - 206	GSR - 200	GSR - 207	GSR - 201	GSR - 205	GSR - 204
1	SM	SJ	NM	NJ	2M	2J
2	SM	SJ	NM	NJ	3M	3J
3	SM	SJ	NM	NJ	1M	1J

Identificação modal:

O método de identificação modal utilizado em (LNEC - Rodrigues *et al.*, 1997) foi brevemente descrito no capítulo 4, tendo sido designado por *método de identificação das componentes modais por filtragem digital das séries de resposta*. Nesse estudo, os auto-espectros da resposta da estrutura, foram avaliados utilizando uma técnica implementada em *MathCad* (MathSoft, 1997) baseada no princípio da máxima entropia, conforme referido no capítulo 4.

Na figura 6.4, apresentam-se os auto-espectros médios determinados com os registos obtidos nos pontos de referência (SM, SJ, NM e NJ). Nessas figuras, indicam-se também os valores das frequências correspondentes aos picos de ressonância mais evidentes.

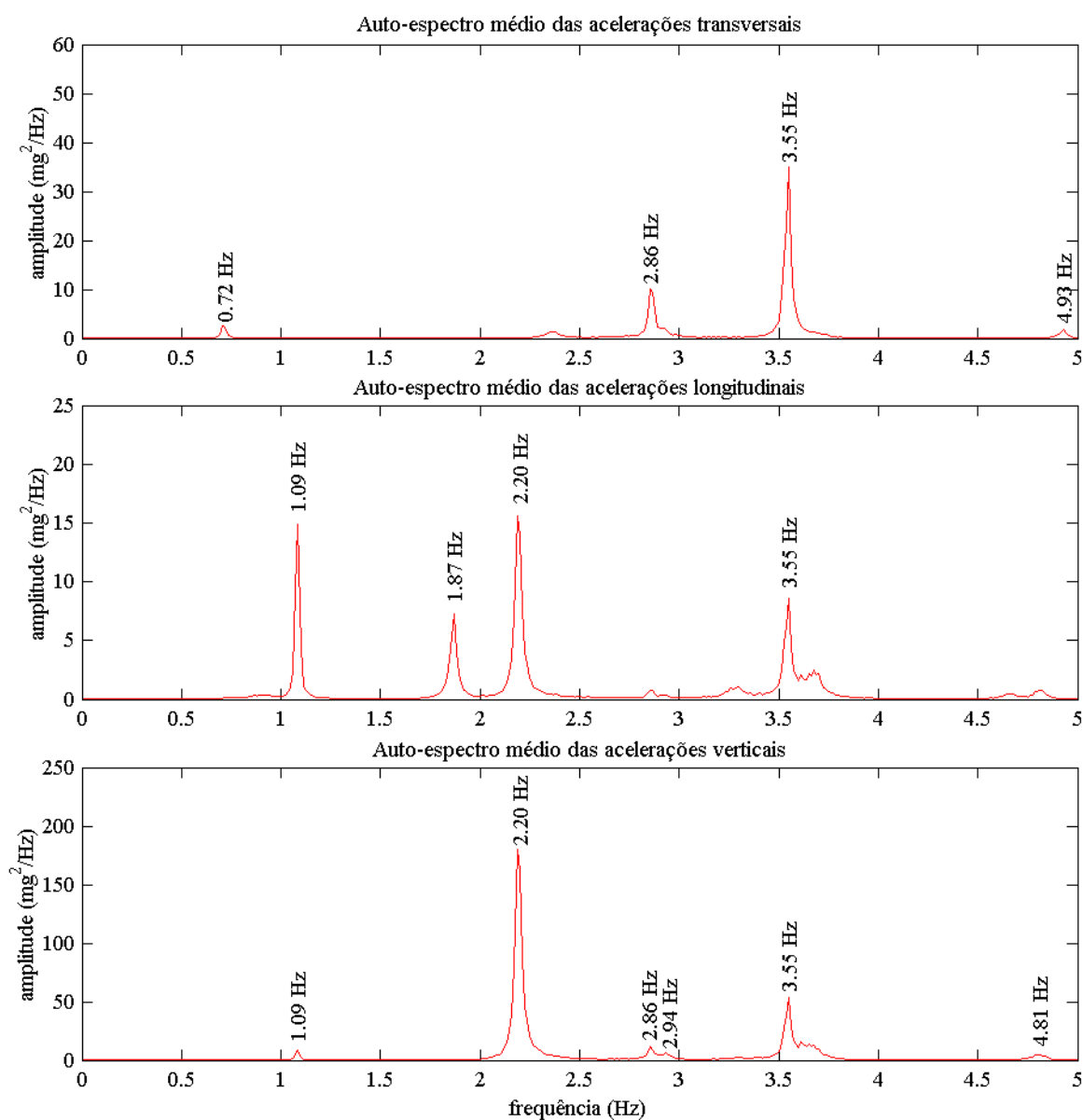


Figura 6.4 – Auto-espectros médios das acelerações registadas nos pontos de referência.

Analisando os auto-espectros avaliados com os registos de acelerações, obtidos nos diversos pontos instrumentados, identificaram-se 16 frequências como correspondentes a modos naturais de vibração da ponte da Arrábida, cujos valores são indicados no quadro 6.2.

Quadro 6.2 – Frequências naturais de vibração identificadas para a ponte da Arrábida.

Modo	Frequência (Hz)	Tipo de modo	Modo	Frequência (Hz)	Tipo de modo
1	0,72	Transversal	9	4,81	Torção
2	0,88	Longitudinal / Vertical	10	4,93	Transversal
3	1,09	Vertical	11	5,47	Vertical ou torção
4	1,87	Longitudinal / Vertical	12	5,86	Vertical ou torção
5	2,20	Vertical	13	6,31	Vertical ou torção
6	2,86	Torção	14	9,93	Vertical ou torção
7	2,94	Vertical	15	11,3	Vertical ou torção
8	3,55	Torção	16	12,5	Vertical ou torção

Aplicando a técnica de avaliação das componentes modais, por filtragem digital das séries de resposta, e de cálculo das deformadas dum modelo de elementos finitos (ainda que simplificado) considerando essas componentes como deslocamentos impostos nos nós correspondentes aos pontos instrumentados, identificaram-se de forma inequívoca, as configurações de 8 modos naturais de vibração da ponte da Arrábida (os modos 1 a 6 e 8 a 9 indicados no quadro 6.2). Não foi possível identificar as configurações do 7º e dos modos a partir do 10º, dada a dificuldade em discriminá-las de outras configurações de modos de ordem mais baixa – para o fazer seria necessário observar a resposta da estrutura num maior número de pontos, de modo a obter uma descrição mais refinada das configurações modais.

Na figura 6.5 apresentam-se as representações gráficas das configurações modais identificadas para a ponte da Arrábida.

Os coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração identificados para a ponte da Arrábida foram estimados através do método da meia potência. Para tal, seleccionaram-se, para cada modo, os sinais de resposta correspondentes à amplitude máxima e à amplitude mínima, na frequência do modo em análise. Em seguida, aplicou-se o método da meia potência aos respectivos auto-espectros, obtendo-se assim duas estimativas do coeficiente de amortecimento de cada modo de vibração (uma correspondente à amplitude máxima e outra à amplitude mínima).

No quadro 6.3 apresentam-se os coeficientes de amortecimento estimados com o procedimento acima descrito. Como se pode verificar, não se indicam valores para todos os modos identificados, pois, nalguns casos não foi possível definir os pontos de meia potência. Pode-se ver também que, para o mesmo modo, obtiveram-se estimativas ligeiramente diferentes consoante se considerou a resposta com amplitude máxima ou a resposta com amplitude mínima.

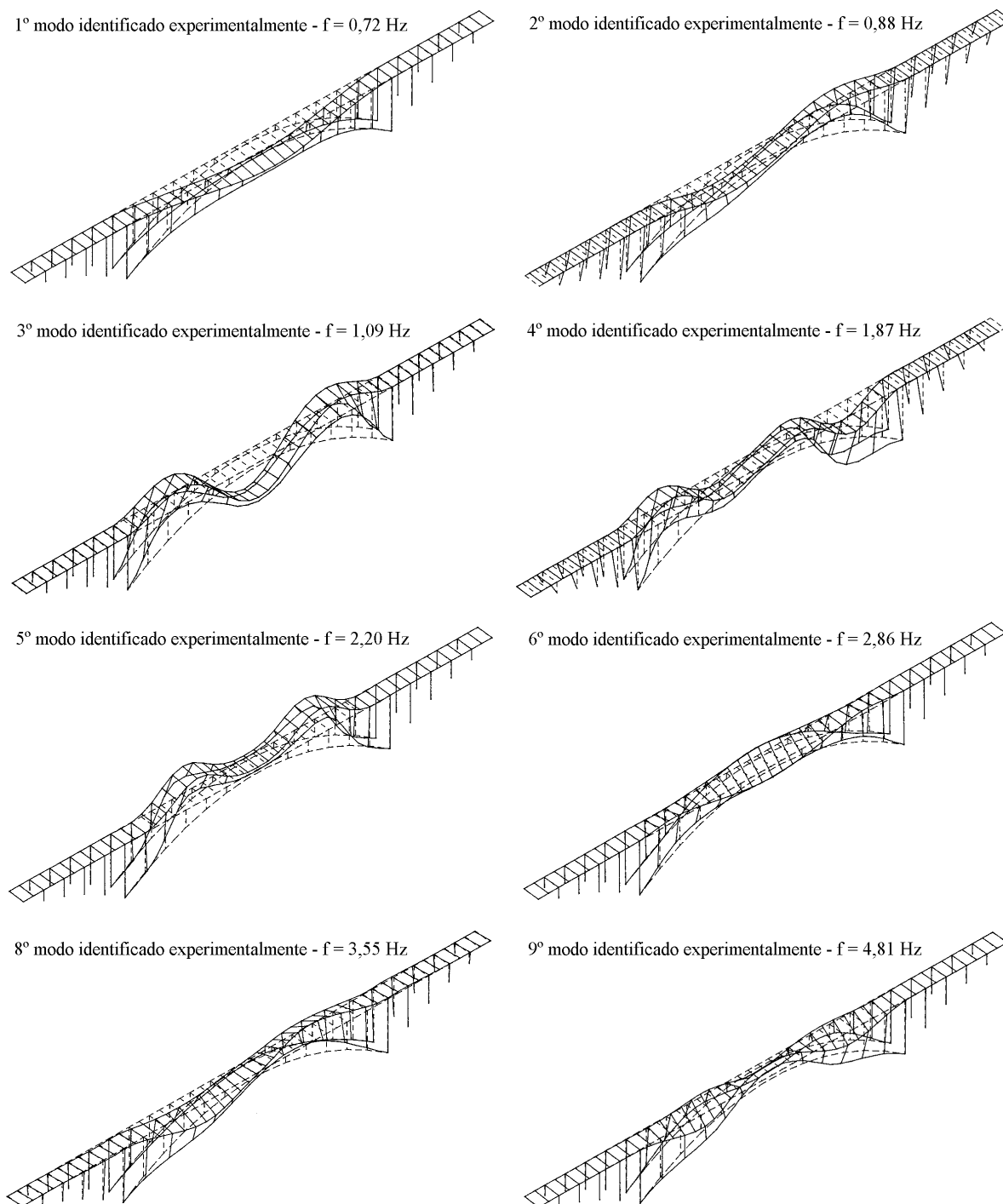


Figura 6.5 – Configurações modais identificadas experimentalmente para a ponte da Arrábida.

Quadro 6.3 – Coeficientes de amortecimento modal avaliados para a ponte da Arrábida.

Modo	f (Hz)	ξ (%)	Modo	f (Hz)	ξ (%)	Modo	f (Hz)	ξ (%)
1	0,72	1,7 ... 2,7	4	1,87	0,7 ... 0,9	7	2,94	0,5
2	0,88	-	5	2,20	0,6 ... 0,8	8	3,55	0,6 ... 1,0
3	1,09	1,9 ... 2,5	6	2,86	1,0 ... 1,4	9	4,81	0,9 ... 1,5

Pode-se verificar no quadro 6.3 que os valores estimados para os coeficientes de amortecimento são relativamente baixos. No caso dos ensaios efectuados na ponte da Arrábida, em

virtude de se ter verificado sempre algum vento *moderado* durante a sua realização, há uma forte possibilidade de nos sinais de resposta haver uma sobreposição entre os efeitos do amortecimento estrutural e do amortecimento aerodinâmico resultante da interacção do vento com a estrutura em vibração; este facto pode ter contribuído também para que os valores estimados para os coeficientes de amortecimento sejam relativamente baixos.

Considerações finais:

Aplicando um método de identificação modal estocástica na análise dos registos da resposta da ponte da Arrábida às acções do tráfego rodoviário e do vento, avaliaram-se:

- Os valores de 16 frequências de modos naturais de vibração da estrutura;
- Para 8 desses modos de vibração identificaram-se as correspondentes configurações;
- Estimaram-se também os coeficientes de amortecimento de 8 dos modos identificados.

As características dinâmicas da ponte da Arrábida, identificadas a partir da informação obtida *in-situ*, constituíram um contributo importante para a caracterização global do estado da estrutura na altura de execução dos ensaios (Março de 1997). Essas características foram consideradas para a calibração de modelos de elementos finitos utilizados na empresa *A2P Consult* para o estudo do comportamento estrutural da ponte e definição dos trabalhos de reparação que posteriormente foram executados (Frias *et al.*, 2002).

Em apreciação geral, aos resultados obtidos no estudo efectuado na ponte da Arrábida, considera-se que os mesmos foram positivos e que os objectivos então propostos foram atingidos. No entanto, tendo em conta a experiência que foi adquirida nos estudos realizados posteriormente, apresentam-se em seguida alguns comentários:

- Nos ensaios realizados, a resposta da estrutura foi medida em apenas 10 pontos; de facto, para definir as configurações dos modos de vibração de ordem mais elevada, teria sido necessário instrumentar um maior número de pontos, o que permitiria efectuar duma forma mais completa, a caracterização dinâmica experimental da estrutura;
- Para as características da ponte da Arrábida (1º modo com uma frequência de 0,72 Hz) e tendo em conta a recomendação indicada no capítulo 3 (duração dos registos correspondente a 2000 ciclos do modo de frequência mais baixa), teria sido conveniente efectuar amostras com uma duração superior aos 8 minutos que foram adoptados;
- Teria sido vantajoso efectuar a medição da velocidade do vento simultaneamente com a medição da resposta da estrutura; tal permitiria, nomeadamente, analisar melhor a

importância do amortecimento aerodinâmico nos coeficientes de amortecimento estimados a partir da análise da resposta da estrutura;

- Antes da realização dos ensaios, não houve disponibilidade de tempo para desenvolver um modelo de elementos finitos da estrutura, a partir do qual se poderiam ter planeado melhor os ensaios, designadamente, no que se refere à escolha dos pontos a instrumentar e dos pontos de referência;
- Foram já apresentados no capítulo 4, alguns comentários gerais relativos ao método de identificação modal utilizado.

6.2.2 Ponte da Figueira da Foz

Considerações gerais:

Tal como no exemplo anterior, o estudo de caracterização dinâmica experimental efectuado na ponte da Figueira da Foz, (LNEC – Campos Costa *et al.*, 1997) integrou-se em trabalhos de inspecção e avaliação estrutural dessa ponte, coordenados pelo Eng.º Armando Rito e pelo Prof. Júlio Appleton. Foi elaborado com o objectivo de identificar as características dinâmicas da ponte, contribuindo, dessa forma, para a avaliação do seu comportamento estrutural global. Saliente-se que na altura de realização desse estudo, a ponte apresentava alguns sinais de deterioração que se encontram descritos em (Rito e Appleton, 2000).

O estudo efectuado na ponte da Figueira da Foz consistiu na realização de ensaios de medição da resposta da estrutura às acções da passagem do tráfego rodoviário e do vento, e na análise adequada dos registos obtidos, com vista a identificar as características dinâmicas da ponte. Este estudo foi apresentado numa conferência nacional (Rodrigues e Campos Costa, 1997), em conferências internacionais (Rodrigues e Campos Costa, 1998, 1999) e foi também objecto de um artigo publicado na Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas (Rodrigues e Campos Costa, 1998).

Para além dos ensaios realizados na ponte atirantada, foram também efectuados ensaios de caracterização dinâmica nos viadutos acesso em ambas as margens. No entanto, a exposição que se apresenta em seguida, refere-se apenas ao estudo efectuado para a ponte atirantada.

Breve descrição da ponte da Figueira da Foz:

A ponte sobre o rio Mondego na cidade da Figueira da Foz é uma ponte de tirantes com um comprimento total de 405 m distribuído pelo vão central de 225 m e por dois vãos laterais de 90 m. A ligação à ponte é estabelecida através de dois viadutos de acesso, o da margem direita com um

comprimento total de 315 m e o da margem esquerda com um comprimento total de 630 m. Na figura 6.6 apresenta-se um esquema em alçado longitudinal da ponte da Figueira da Foz.

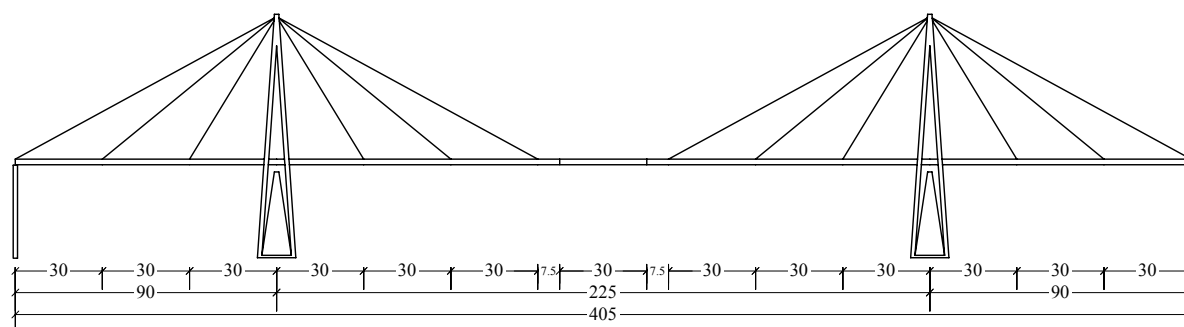


Figura 6.6 – Esquema em alçado longitudinal da ponte da Figueira da Foz.

O tabuleiro da ponte, constituído por vigas, carlingas e longarinas metálicas e por uma laje de betão armado, tem uma largura total de 20,6 m. Na zona de meio vão do tabuleiro, há um troço central com 30 m de comprimento (ver figura 6.6) que está simplesmente apoiado sobre a restante estrutura.

As torres da ponte são de betão armado e têm 84 m de altura acima das fundações. São elementos estruturais auto-estáveis, formados por 4 peças de secção rectangular oca, inclinadas nas duas direcções e suportadas por poços de fundação que atingem uma profundidade máxima de 45 m. Em cada uma das torres há três pares de tirantes, com uma disposição em leque, que têm continuidade para cada um dos lados das torres, apoiando-se nestas sobre selas de desvio.

A ponte da Figueira da Foz foi projectada pelo Prof. Edgar Cardoso tendo sido a primeira ponte atirantada executada em Portugal, datando a sua conclusão de 1982. Na figura 6.7 apresentam-se duas vistas gerais da ponte da Figueira da Foz.



Figura 6.7 – Vistas gerais da ponte da Figueira da Foz.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios efectuados na ponte da Figueira da Foz, utilizaram-se 5 macro-sismógrafos GSR-16 cujas características foram apresentadas no capítulo 3. Esses aparelhos foram utilizados na sua

configuração de maior sensibilidade (com capacidade de discretização de uma amplitude mínima de aceleração de $15,3 \mu g$), tendo-se utilizado uma frequência de amostragem de 50 Hz e obtido registos com uma duração total de 8 minutos (séries de 24000 valores amostrados a 50 Hz).

Os ensaios consistiram na medição da resposta em aceleração da estrutura, aos efeitos da acção do tráfego rodoviário (que teve uma intensidade *moderada* durante o período de realização dos ensaios) e de vento *fraco* na direcção transversal à ponte, no sentido de jusante para montante.

As medições da resposta da estrutura foram efectuadas em 34 pontos diferentes da ponte, cuja localização se encontra indicada na figura 6.8. Procurou-se efectuar uma instrumentação mais fina do que a adoptada nos ensaios da ponte da Arrábida apresentados anteriormente, de modo a obter uma descrição também mais fina, das configurações modais da estrutura.

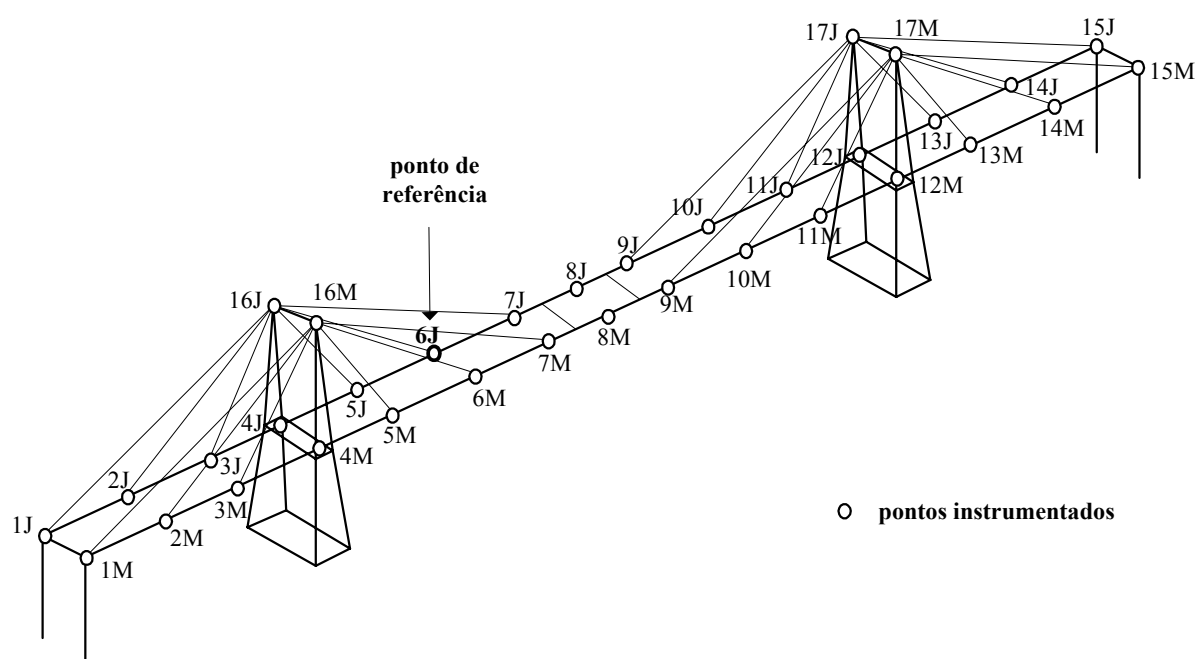


Figura 6.8 – Pontos instrumentados no ensaio da ponte da Figueira da Foz.

Na ponte da Figueira da Foz, efectuaram-se um total de 9 ensaios durante os quais, 1 dos macro-sismógrafos ficou sempre colocado no ponto escolhido para referência (ponto 6J) enquanto que os 4 aparelhos restantes foram sucessivamente colocados nos outros pontos, situados no tabuleiro e no topo das torres. No quadro 6.4 indicam-se os pontos instrumentados em cada ensaio.

Para os ensaios realizados na ponte da Figueira da Foz, a escolha do ponto de referência foi baseada numa análise prévia efectuada com um modelo de elementos finitos desenvolvido na empresa *A2P Consult*. Assim, o ponto 6J foi escolhido de modo a evitar que a referência ficasse num nodo dos primeiros modos globais de vibração da estrutura.

Quadro 6.4 – Pontos instrumentados em cada ensaio.

Ensaio	GSR - 206	GSR - 202	GSR - 200	GSR - 201	GSR - 203
1	6J	6M	1J	2M	2J
2	6J	1M	1J	2M	2J
3	6J	3M	3J	4M	4J
4	6J	5M	5J	7M	7J
5	6J	8M	8J	9M	9J
6	6J	10M	10J	11M	11J
7	6J	12M	12J	13M	13J
8	6J	16M	16J	17M	17J
9	6J	15M	15J	14M	14J

Identificação modal:

A técnica de identificação modal utilizada para analisar os registos obtidos na ponte da Figueira da Foz (LNEC – Campos Costa *et al.*, 1997) foi também o *método de identificação das componentes modais por filtragem digital das séries de resposta*, que já foi brevemente descrito no capítulo 4. Os auto-espectros da resposta da estrutura foram assim avaliados utilizando uma técnica implementada em *MathCad* (MathSoft, 1997), baseada no princípio da máxima entropia, conforme referido no capítulo 4.

Na figura 6.9 apresenta-se o espectro normalizado médio dos registos verticais obtidos nos pontos do tabuleiro e nas figuras 6.10 e 6.11 apresentam-se os auto-espectros médios, nas direcções transversal e longitudinal, avaliados com os registos obtidos no topo das torres (pontos 16M e 16J para a torre da margem esquerda e 17M e 17J para a torre da margem direita). Nessas figuras, indicam-se também os valores das frequências correspondentes aos picos de ressonância mais evidentes.

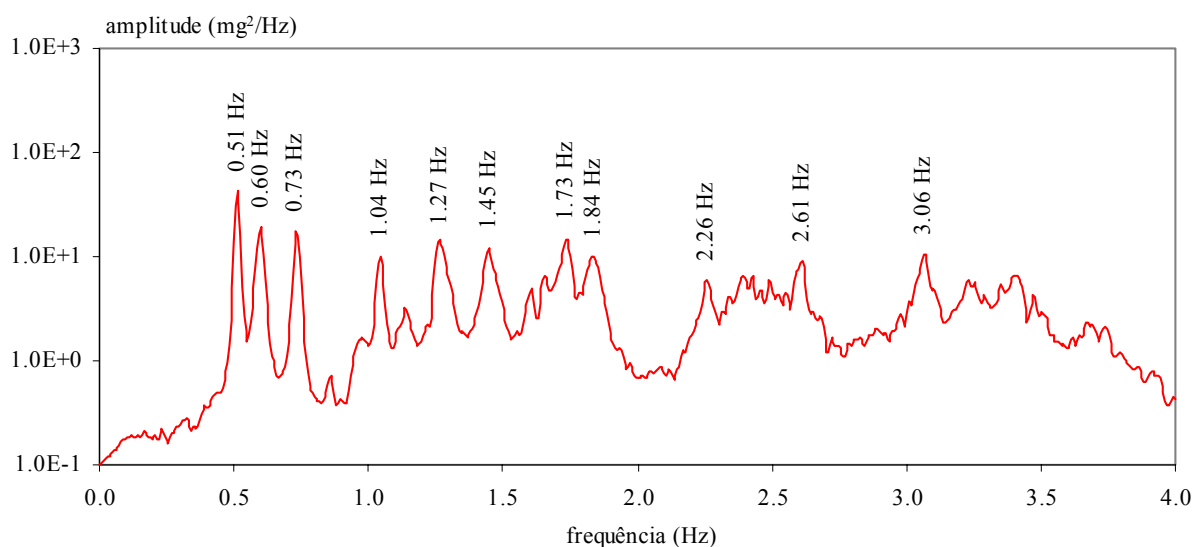


Figura 6.9 – Espectro normalizado médio dos registos verticais obtidos nos pontos do tabuleiro.

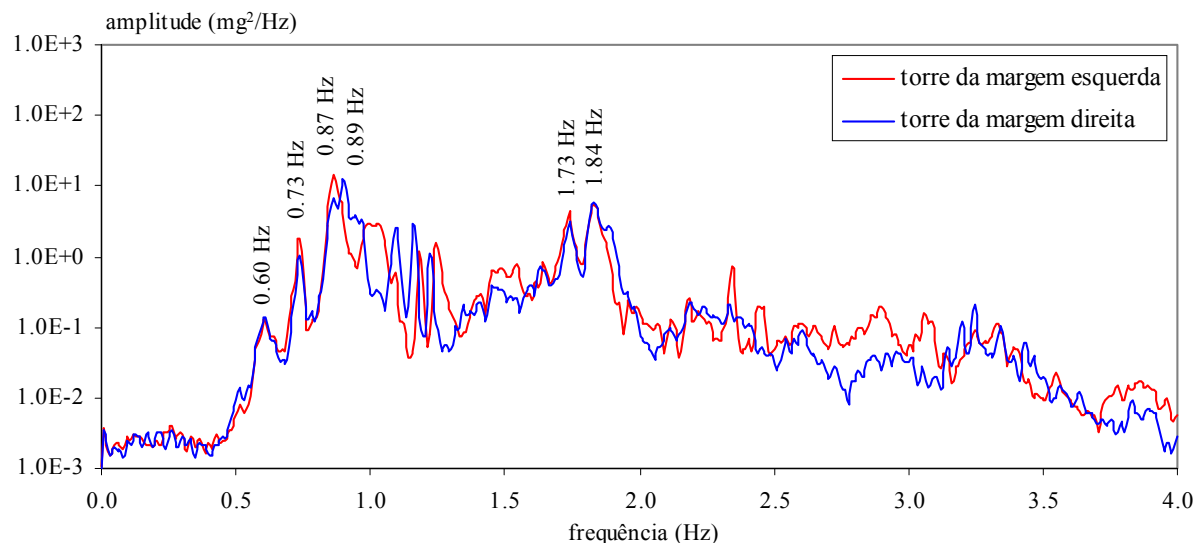


Figura 6.10 – Auto-espectro médio dos registos transversais obtidos no topo das torres.

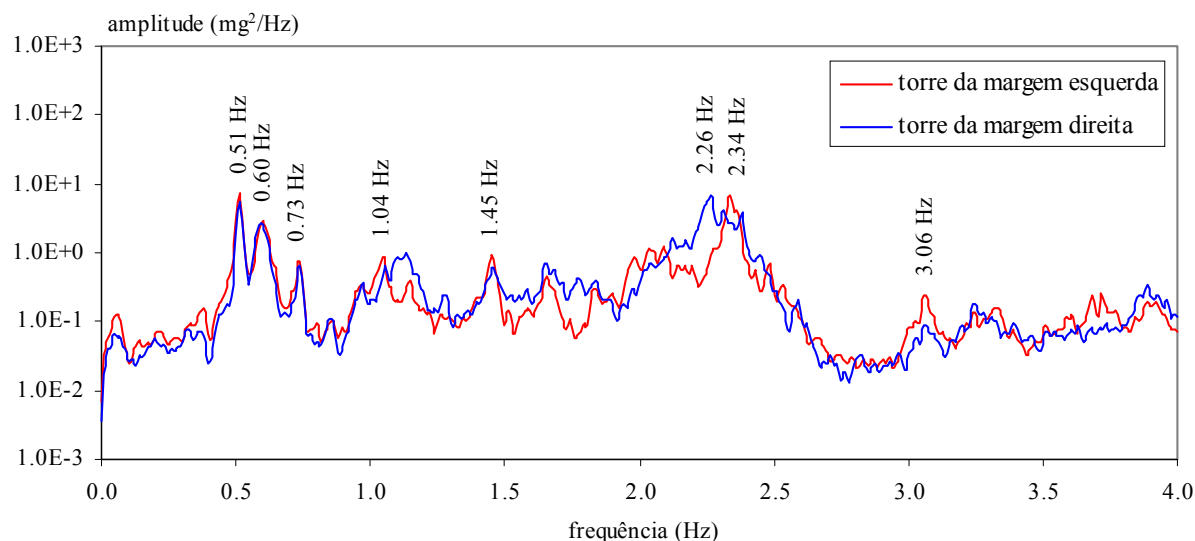


Figura 6.11 – Auto-espectro médio dos registos longitudinais obtidos no topo das torres.

Analisando os auto-espectros avaliados com os registos de acelerações, obtidos nos diversos pontos instrumentados, identificaram-se 14 frequências como correspondentes a modos naturais de vibração da ponte da Figueira da Foz (cujos valores estão indicados nas figuras 6.9 a 6.11).

Aplicando a técnica utilizada para determinação das componentes modais, foi possível avaliar as configurações correspondentes a 10 das frequências identificadas. Para as frequências de 2,26 Hz, 2,34 Hz, 2,61 Hz e 3,06 Hz não se conseguiu definir bem as respectivas configurações, embora se considere que são frequências de modos naturais de vibração da estrutura.

As componentes modais obtidas por filtragem digital das séries de resposta foram utilizadas para o cálculo das deformadas dum modelo de elementos finitos, considerando essas componentes

como deslocamentos impostos nos nós correspondentes aos pontos instrumentados. As representações gráficas das configurações modais assim determinadas para a ponte da Figueira da Foz, são apresentadas nas figuras 6.12 a 6.14.

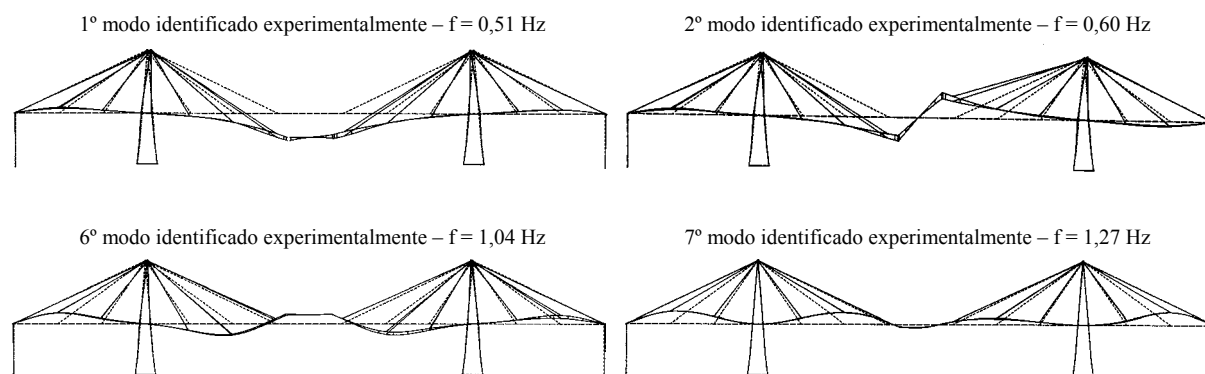


Figura 6.12 – Configurações dos modos verticais identificados para a ponte da Figueira da Foz.

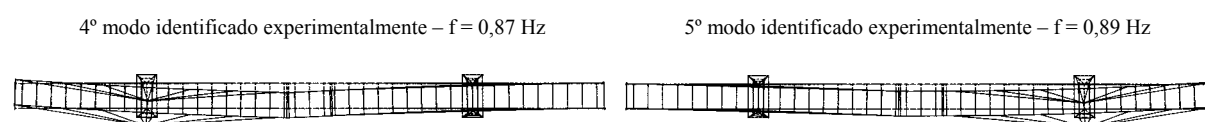


Figura 6.13 – Configurações dos modos transversais identificados para a ponte da Figueira da Foz.

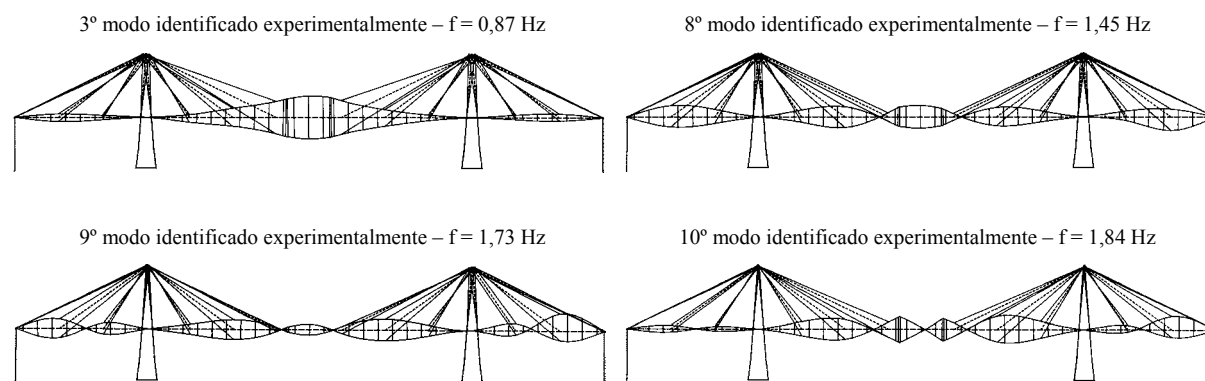


Figura 6.14 – Configurações dos modos de torção identificados para a ponte da Figueira da Foz.

Os coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração identificados para a ponte da Figueira da Foz foram estimados através do método da meia potência. Para estimar os coeficientes de amortecimento dos modos verticais e de torção, considerou-se o auto-espectro dos sinais de resposta obtidos no ponto de referência, e para estimar os coeficientes de amortecimento dos modos transversais, consideraram-se os auto-espectros dos registos obtidos no topo das torres.

No quadro 6.5 indicam-se os valores dos coeficientes de amortecimento estimados com o método da meia potência (apenas para os modos cuja configuração foi identificada). Para o modo

transversal, com frequência de 0,89 Hz, não foi possível avaliar o respectivo coeficiente de amortecimento, em virtude da dificuldade em definir os pontos de meia potência.

Quadro 6.5 – Coeficientes de amortecimento modal avaliados para a ponte da Figueira da Foz.

Modo	f (Hz)	ξ (%)	Modo	f (Hz)	ξ (%)
1	0,51	1,6	6	1,04	2,8
2	0,60	1,3	7	1,27	1,2
3	0,73	1,6	8	1,45	1,5
4	0,87	1,0	9	1,73	1,3
5	0,89	-	10	1,84	1,1

Considerações finais:

A análise dos registos da resposta da ponte da Figueira da Foz às acções do tráfego rodoviário e do vento, utilizando um método de identificação modal estocástica, permitiu avaliar:

- Os valores de 14 frequências de modos naturais de vibração da estrutura;
- As configurações de 10 desses modos de vibração;
- Os coeficientes de amortecimento de 9 dos modos de vibração identificados.

As características dinâmicas da ponte da Figueira da Foz, identificadas a partir da informação obtida *in-situ*, constituíram um contributo importante para a caracterização global do estado da estrutura na altura de execução dos ensaios (Agosto de 1997). Essas características foram consideradas para a calibração de modelos de elementos finitos utilizados no estudo do comportamento estrutural da ponte e definição das medidas de intervenção que foram propostas com vista a melhorar as condições de segurança da obra (Rito e Appleton, 2000).

Em apreciação geral aos resultados obtidos no estudo efectuado na ponte da Figueira da Foz, considera-se que os mesmos foram positivos e que os objectivos então propostos foram alcançados. Comparando com o estudo efectuado anteriormente na ponte da Arrábida, comentam-se em seguida alguns aspectos do trabalho realizado na ponte da Figueira da Foz:

- O número de pontos em que a resposta da estrutura foi observada, foi bastante superior (34 em vez de 10), o que permitiu definir duma maneira mais fina as configurações modais experimentais;
- Em face dos valores baixos das frequências naturais de vibração da estrutura (1º modo com uma frequência de 0,51 Hz), também neste caso teria sido preferível efectuar registos com uma duração superior aos 8 minutos que foram adoptados; note-se no entanto que, em face da capacidade de memória disponível nos macro-sismógrafos GSR-16 (1 MB), tal exigiria um tempo total de execução dos ensaios bastante superior (tendo em conta os tempos de

registo da resposta da estrutura e os tempos necessários para transferência da informação guardada nos macro-sismógrafos para o disco rígido de um computador portátil);

- Na fase de preparação dos ensaios, analisaram-se já as frequências e configurações modais calculadas com um modelo de elementos finitos desenvolvido na empresa *A2P Consult*, o que fundamentou a escolha dos pontos a instrumentar e do ponto de referência.

6.2.3 Ponte Miguel Torga sobre o rio Douro na Régua

Considerações gerais:

O estudo de caracterização dinâmica experimental da ponte Miguel Torga sobre o rio Douro na Régua (LNEC – Rodrigues e Campos Costa, 1999) foi desenvolvido no âmbito dos ensaios de recepção dessa estrutura, realizados pelo LNEC após o fim da construção dessa obra e antes da sua abertura ao tráfego.

O estudo efectuado teve como principal objectivo a identificação das características dinâmicas da estrutura, designadamente das frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos seus modos naturais de vibração. Efectuaram-se assim ensaios de medição da resposta em aceleração da estrutura, sob os efeitos da acção do tráfego de camiões carregados (os mesmos que foram utilizados nos ensaios de carga estáticos) e também da acção do vento. Este estudo foi apresentado numa conferência nacional (Rodrigues e Campos Costa, 1999).

Breve descrição da ponte Miguel Torga:

A ponte Miguel Torga atravessa o vale do rio Douro a 90 m de altura, junto à cidade da Régua, sendo uma obra integrada no lanço Régua - Reconcos do IP3. Esta ponte, projectada pelo Eng.º Armando Rito, é curva em planta (raio de curvatura de 600 m) e em perfil. Tem um único tabuleiro contínuo, com 25,7 m de largura, que se desenvolve ao longo de 11 tramos ($32 + 4 \times 50 + 60 + 80 + 100 + 140 + 180 + 108$ m) perfazendo uma extensão total de 900 m. Na figura 6.15 apresenta-se um alçado e na figura 6.16 uma planta da ponte Miguel Torga.

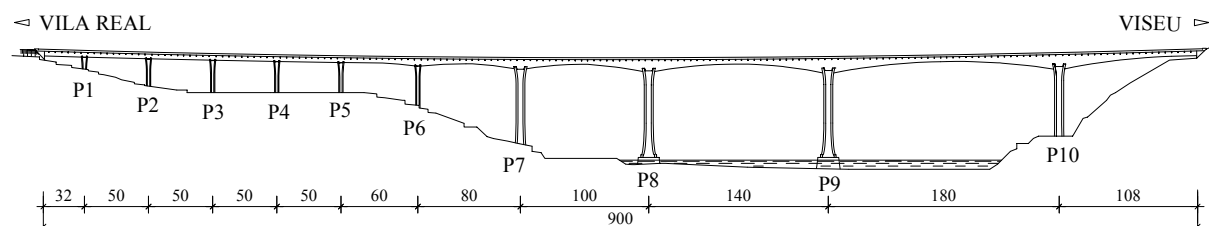


Figura 6.15 – Alçado da ponte Miguel Torga.

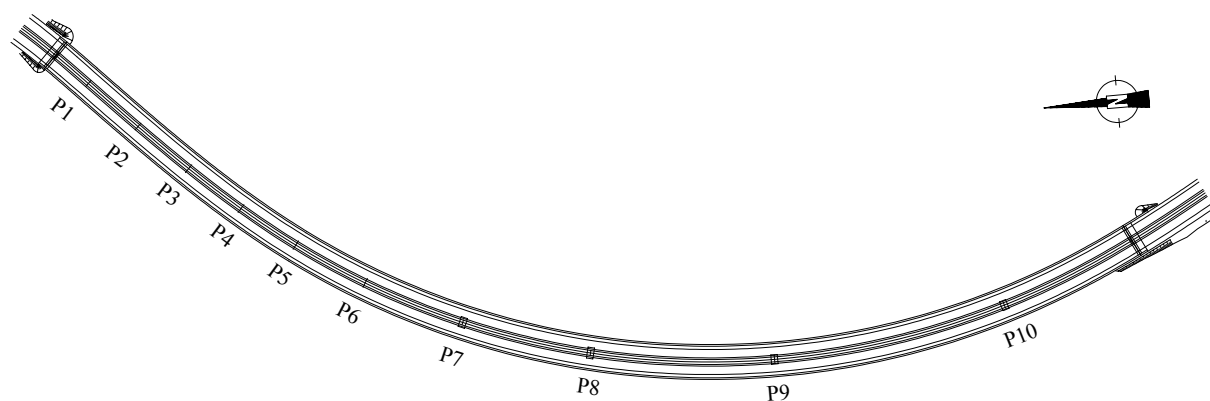


Figura 6.16 – Planta da ponte Miguel Torga.

Os pilares da ponte Miguel Torga são formados por um fuste de secção rectangular oca, praticamente constante ao longo da altura, rigidificado por quatro nervuras de dimensão variável através das quais se processa o necessário aumento de secção na zona da base. As fundações, quer dos pilares quer dos encontros, são directas e quase superficiais.

Na figura 6.17 apresentam-se algumas vistas gerais da ponte Miguel Torga.



Figura 6.17 – Vistas gerais da ponte Miguel Torga.

A secção transversal do tabuleiro da ponte Miguel Torga é constituída por um caixão monocelular de betão armado pré-esforçado de altura variável, com 12 m sobre os pilares P9 e P10 e

4 m a meio do vão de 180 m (ver figura 6.18). Esta secção é formada por duas almas, com 0,6 m de espessura (0,7 m nos três tramos de maior comprimento) ligadas por lajes e ainda por travessas espaçadas de 5 m entre si.

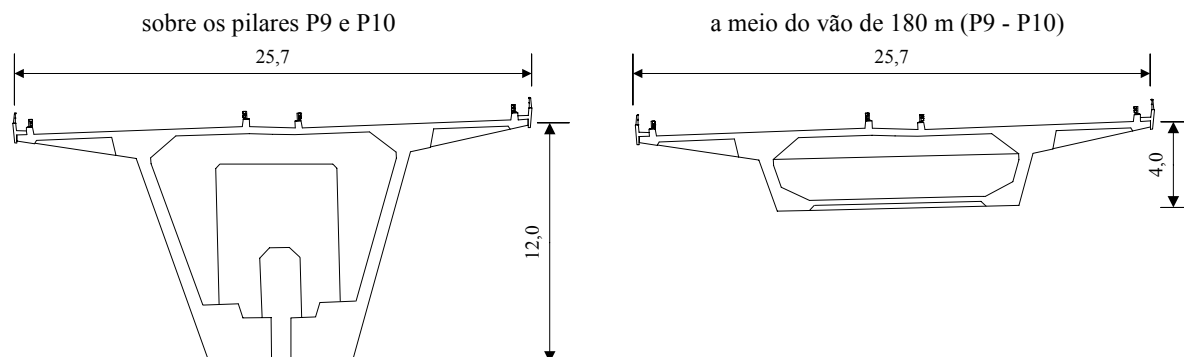


Figura 6.18 – Secções transversais do tabuleiro da ponte Miguel Torga.

O tabuleiro da ponte Miguel Torga está monoliticamente ligado aos pilares P7 a P10 e apoia-se através de aparelhos do tipo *pot-bearing* nos restantes pilares (P1 a P6) e nos encontros.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Os ensaios de caracterização dinâmica da ponte Miguel Torga foram efectuados com 5 macro-sismógrafos GSR-16 cujas características foram apresentadas no capítulo 3. Esses aparelhos foram utilizados na sua configuração de maior sensibilidade (com capacidade de discretização de uma amplitude mínima de aceleração de $15,3 \mu g$).

Visto vez que, à data de realização dos ensaios (Outubro de 1998), a ponte ainda não se encontrava aberta ao tráfego, os camiões que foram utilizados nos ensaios de carga estáticos foram também aproveitados para os ensaios de caracterização dinâmica, fazendo-os circular sobre a ponte de modo a aumentar o nível da resposta medida. Fizeram-se também alguns ensaios em que os camiões passaram por cima de tábuas de ressalto de forma a aplicar uma acção impulsiva na estrutura.

Uma vez que se pretendia estimar as configurações dos principais modos de vibração da estrutura e se dispunha apenas de 5 macro-sismógrafos, estabeleceu-se uma sequência de ensaios de forma a obter registos ao longo de todo o tabuleiro da ponte. Nesses ensaios utilizou-se a técnica, referida no capítulo 3, de *avanço dos pontos de referência*, ou seja, em que, em cada dois ensaios sucessivos há sempre um ponto comum que permite estabelecer a ligação entre as componentes modais avaliadas nos pontos da estrutura instrumentados em cada ensaio (ver a figura 6.20).

A resposta da estrutura foi assim medida em 40 pontos diferentes, ao longo de 14 ensaios efectuados com os 5 macro-sismógrafos a registar simultaneamente. Realizaram-se ainda 8 ensaios de ressalto em que apenas se utilizou um dos aparelhos GSR-16 para registar as acelerações na secção a meio do maior vão (P9-P10). Nestes ensaios de ressalto também se registaram extensões nessa secção, embora a sua análise não seja apresentada neste trabalho.

Os 14 ensaios com medições simultâneas em diversos pontos da estrutura consistiram no registo da resposta da estrutura, induzida pela passagem de camiões com cerca de 300 kN de peso e também pela acção do vento, embora este tenha tido quase sempre uma intensidade muito baixa, sendo praticamente imperceptível em muitos dos ensaios efectuados.

Na figura 6.19 indica-se a localização das secções instrumentadas nos ensaios efectuados na ponte Miguel Torga.

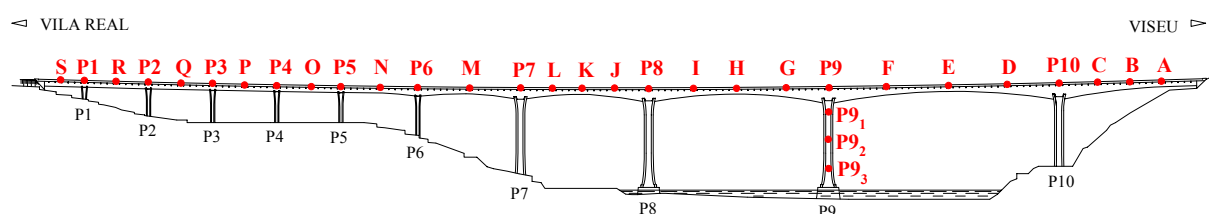


Figura 6.19 – Secções instrumentadas nos ensaios efectuados na ponte Miguel Torga.

No quadro 6.6 apresenta-se a sequência de ensaios e indicam-se os pontos instrumentados em cada um. Nos ensaios 1 a 7 e 9 a 11 os macro-sismógrafos foram colocados no eixo (no separador central) das secções transversais do tabuleiro. Nos ensaios 8, 12 e 13, alguns dos macro-sismógrafos foram colocados nos extremos das secções transversais do tabuleiro (nos passeios laterais), situação em que os correspondentes pontos são designados no quadro 6.6 com os índices M ou J para referir os pontos dos lados de, respectivamente, montante e jusante. No ensaio 14, três dos aparelhos GSR-16 foram colocados nos septos do pilar P9 e os outros dois nos extremos da secção do tabuleiro sobre o pilar P9.

Quadro 6.6 – Pontos instrumentados em cada ensaio.

	Ensaio													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
GSR - 200	A	G	G	M	M	Q	Q	B	A	F	G	E	E	P9 ₁
GSR - 201	D	D	J	J	O	O	S	B _M	B	G	H	E _M	E _M	P9 ₂
GSR - 202	B	P9	H	P7	P6	P3	P2	B _J	C	H	I	E _J	E _J	P9 ₃
GSR - 204	C	F	I	L	N	P	R	E _M	D	D	J	B _M	H _M	P9 _J
GSR - 206	P10	E	P8	K	P5	P4	P1	E _J	E	E	K	B _J	H _J	P9 _M

Na figura 6.20 representa-se a sequência dos ensaios 1 a 7, de modo a ilustrar a técnica de ensaio com avanço dos pontos de referência.

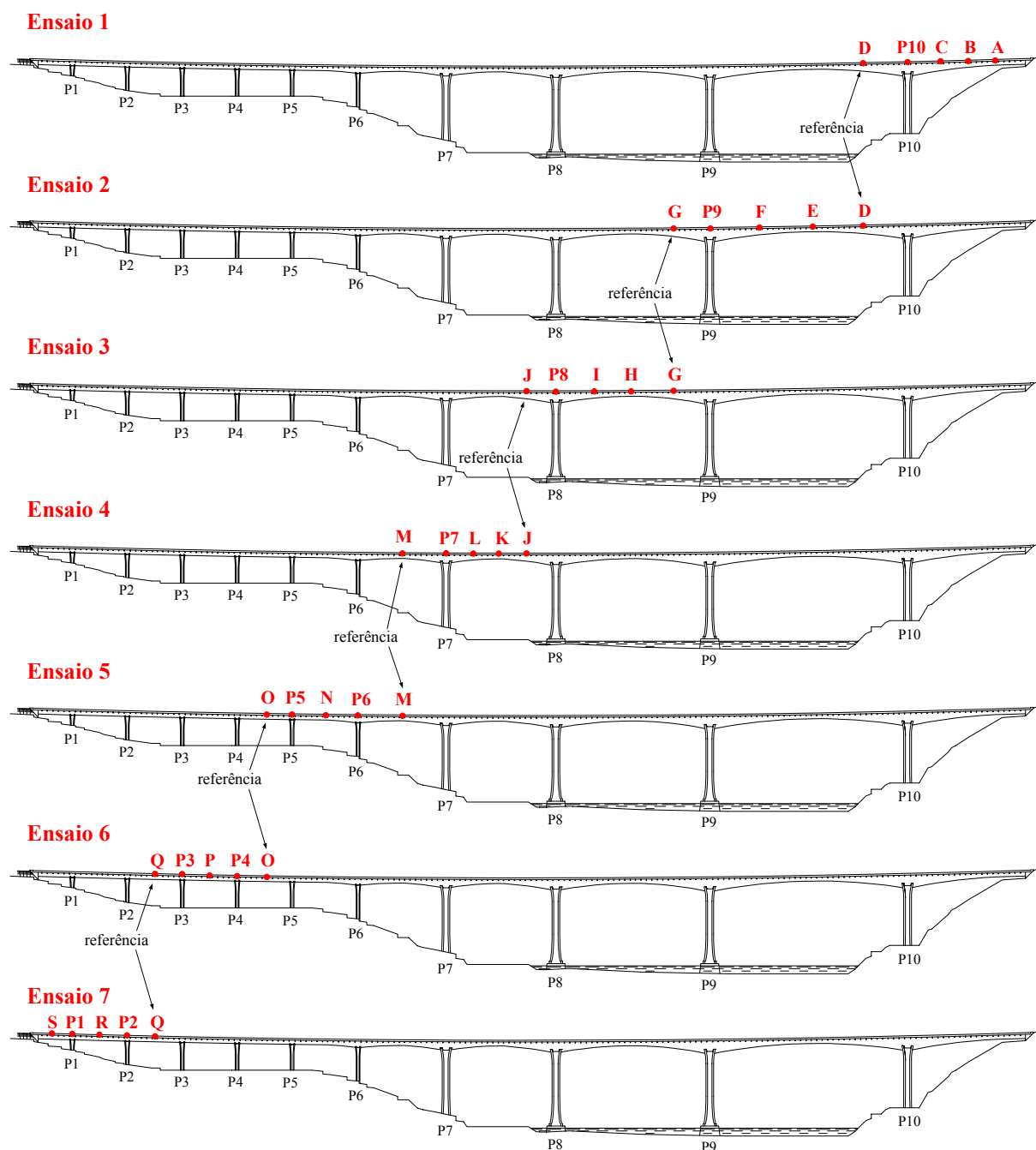


Figura 6.20 – Sequência dos ensaios 1 a 7 efectuados na ponte Miguel Torga.

Nos ensaios efectuados na ponte Miguel Torga foi utilizada uma frequência de amostragem de 50 Hz e em cada ensaio foram obtidos registos com uma duração total de 10 minutos (séries de 30000 valores amostrados a 50 Hz).

Identificação modal:

O método de identificação modal utilizado para analisar os registos obtidos nos ensaios efectuados na ponte Miguel Torga (LNEC – Rodrigues e Campos Costa, 1999) foi o método BFD que

já foi descrito no capítulo 4. As funções de densidade espectral da resposta da estrutura, foram assim avaliadas utilizando a técnica, também descrita no capítulo 4, baseada na transformada discreta de Fourier determinada através do algoritmo da FFT.

Antes da aplicação do método de identificação modal, os registos de aceleração foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas operações de remoção de média ou de tendências lineares e de filtragem passa-alto a 0,20 Hz com um filtro de tipo Butterworth de ordem 2.

As funções de densidade espectral da resposta da estrutura, foram avaliadas considerando amostras com 2048 valores, sobrepostas a 50 %, tendo-se aplicado uma janela de tipo *cosine taper* a cada amostra para reduzir o efeito de escorregamento (*leakage*). A resolução em frequência das funções de densidade espectral assim estimadas é a correspondente aos 2048 valores de cada amostra, o que para a frequência de amostragem de 50 Hz corresponde a $\Delta f = 0,024$ Hz. A análise das funções de densidade espectral centrou-se apenas no intervalo de frequências entre os 0 e os 6 Hz, pois constatou-se ser nessa gama de valores que se situam os picos de ressonância mais importantes.

Nas figuras 6.21 a 6.23 apresentam-se os espectros normalizados médios dos registos, respectivamente, transversais, longitudinais e verticais, obtidos nos pontos do tabuleiro.

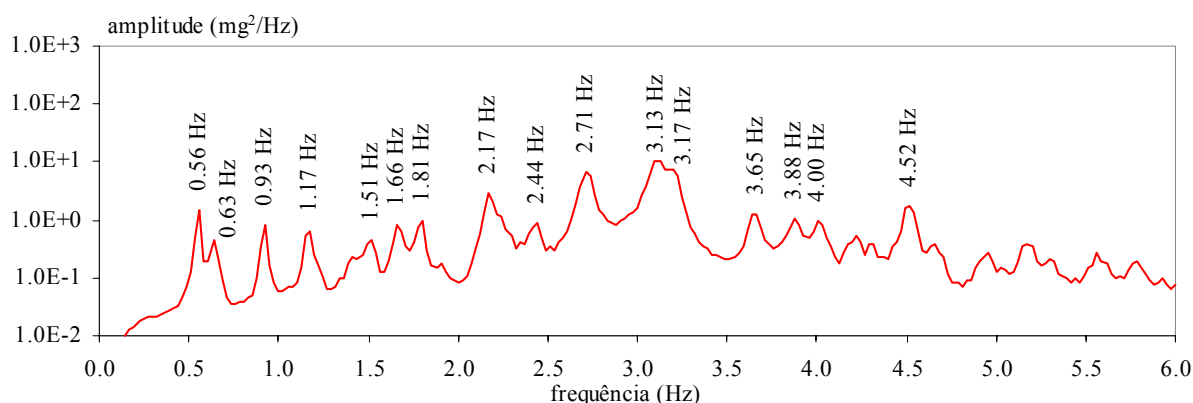


Figura 6.21 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no tabuleiro.

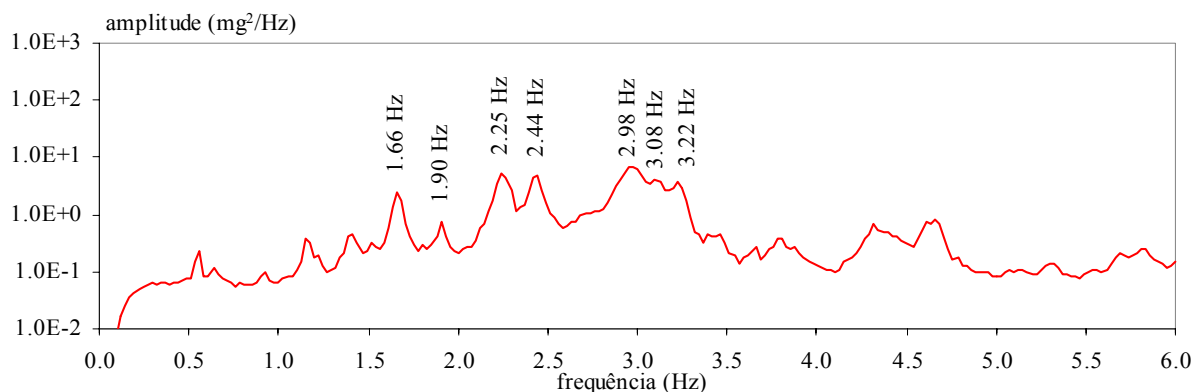


Figura 6.22 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no tabuleiro.

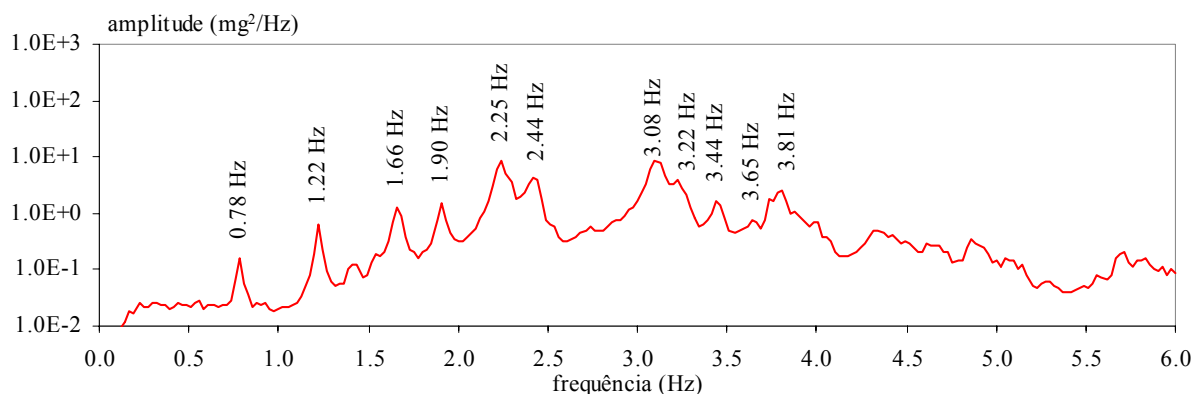


Figura 6.23 – Espectro normalizado médio dos registos verticais no tabuleiro.

Nas figuras 6.24 e 6.25 apresentam-se os espectros normalizados médios dos registos transversais e longitudinais, obtidos nos pontos do pilar P9 (instrumentados no ensaio 14).

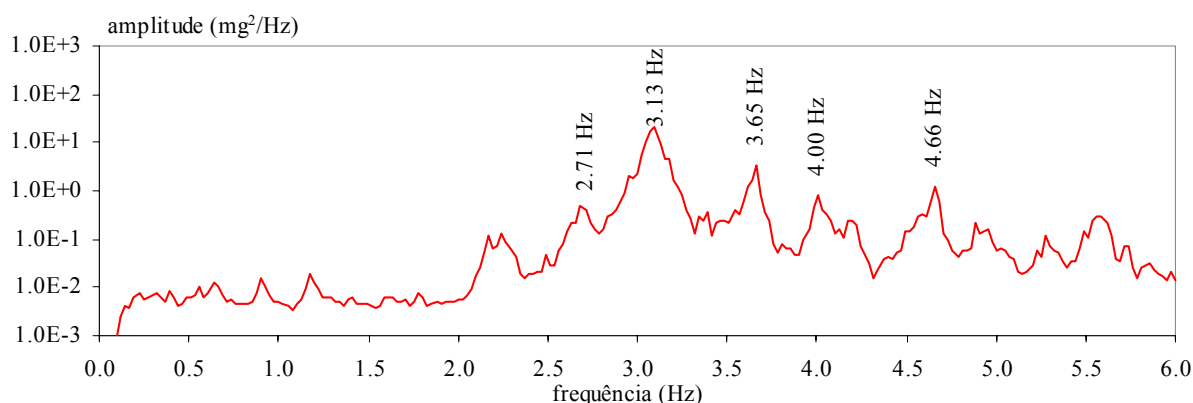


Figura 6.24 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no pilar P9.

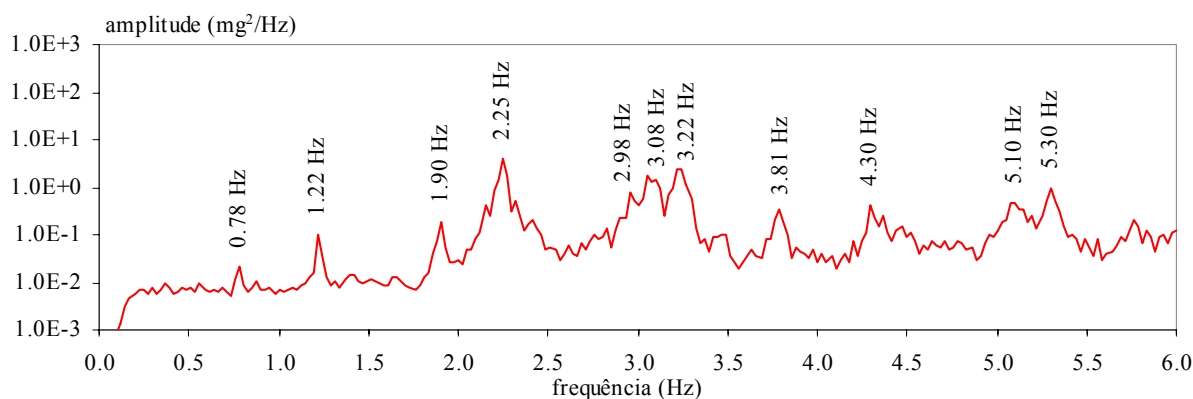


Figura 6.25 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no pilar P9.

Para distinguir entre as frequências de modos verticais e as de modos de torção, calcularam-se também os espectros normalizados médios da semi-soma e semi-diferença das acelerações verticais registadas nos extremos duma mesma secção transversal do tabuleiro. Esses espectros são apresentados nas figuras 6.26 e 6.27.

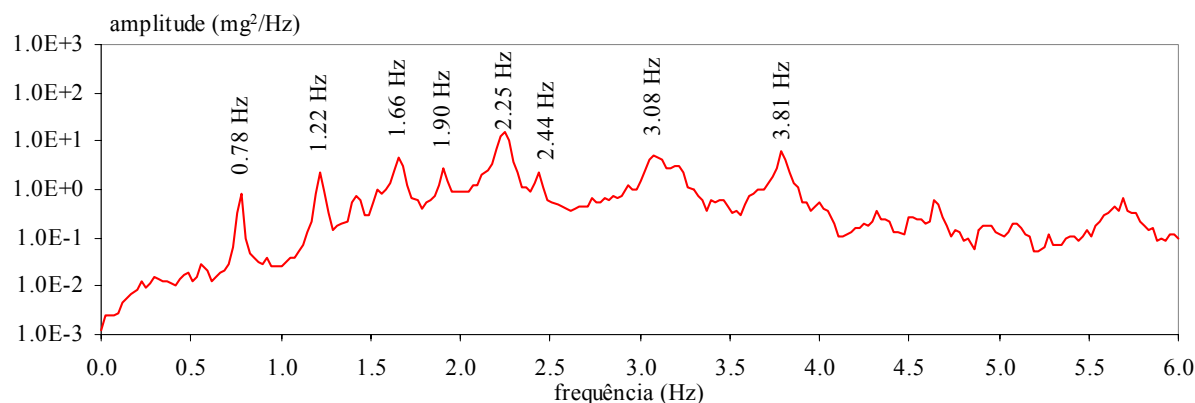


Figura 6.26 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais no tabuleiro.

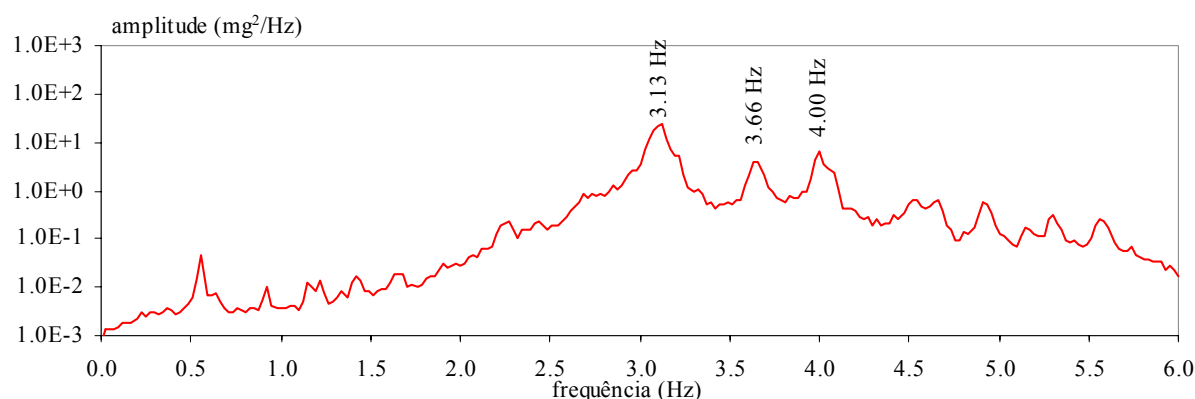


Figura 6.27 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais no tabuleiro.

Analisando os espectros normalizados médios identificaram-se 29 picos de ressonância, cujas frequências são também apresentadas nas figuras 6.21 a 6.27. Após se ter analisado a função de coerência entre os registos obtidos em diferentes pontos da estrutura, considerou-se que esses picos de ressonância correspondem de facto a modos naturais de vibração da estrutura da ponte. Identificaram-se assim as frequências de 11 modos transversais, 1 modo longitudinal, 10 modos verticais, 3 modos de torção e ainda de 4 modos que envolvem, fundamentalmente, movimentos no pilar P9. No quadro 6.7 indicam-se as frequências naturais de vibração, identificadas para a ponte Miguel Torga.

Quadro 6.7 – Frequências naturais de vibração identificadas para a ponte Miguel Torga.

Modo	f (Hz)	Tipo de modo	Modo	f (Hz)	Tipo de modo	Modo	f (Hz)	Tipo de modo
1	0,56	Transversal	11	2,17	Transversal	21	3,65	Torção
2	0,63	Transversal	12	2,25	Vertical	22	3,81	Vertical
3	0,78	Vertical	13	2,44	Vertical	23	3,88	Transversal
4	0,93	Transversal	14	2,71	Transversal	24	4,00	Torção
5	1,17	Transversal	15	2,98	Longitudinal	25	4,30	Pilar P9
6	1,22	Vertical	16	3,08	Vertical	26	4,52	Transversal
7	1,51	Transversal	17	3,13	Torção	27	4,66	Pilar P9
8	1,66	Vertical	18	3,17	Transversal	28	5,10	Pilar P9
9	1,81	Transversal	19	3,22	Vertical	29	5,30	Pilar P9
10	1,90	Vertical	20	3,44	Vertical			

Avaliando as componentes modais com os registos obtidos em diferentes pontos da estrutura, através das estimativas H_1 das FRF de transmissibilidade (conforme indicado no capítulo 4 quando se apresentou o método BFD), identificaram-se as configurações de 22 modos de vibração globais da ponte. Nas figuras 6.28 a 6.30 apresentam-se as configurações identificadas com o método BFD para os modos verticais e transversais da ponte Miguel Torga.

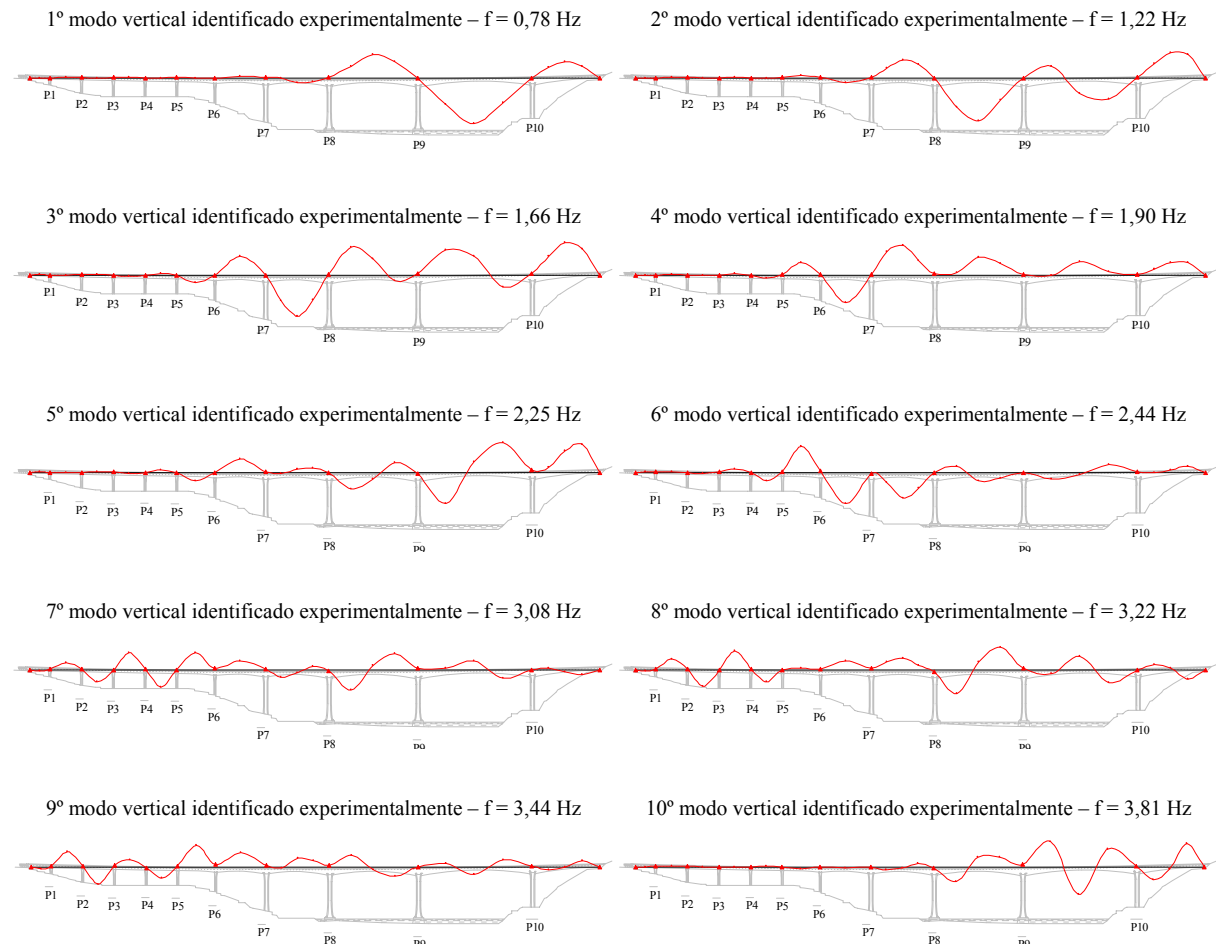


Figura 6.28 – Configurações dos modos verticais identificados para a ponte Miguel Torga.

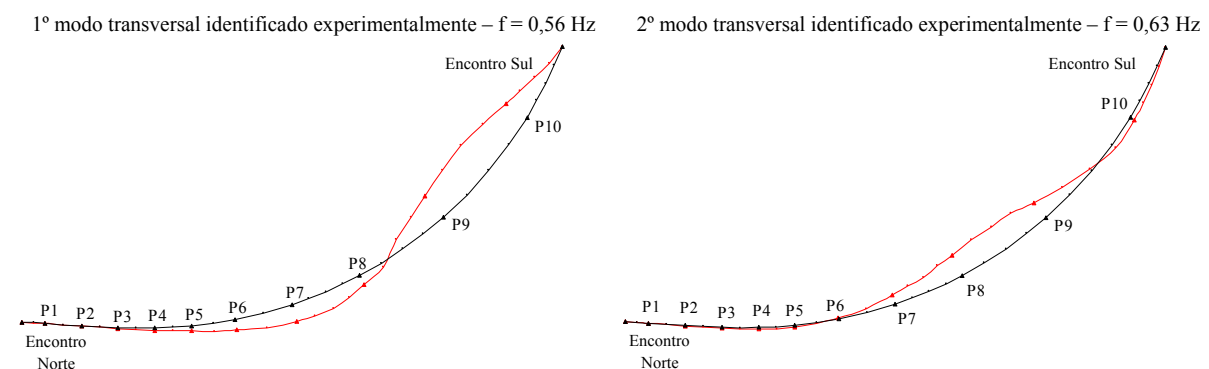


Figura 6.29 – Configurações dos modos transversais identificados para a ponte Miguel Torga (1° e 2° modos).

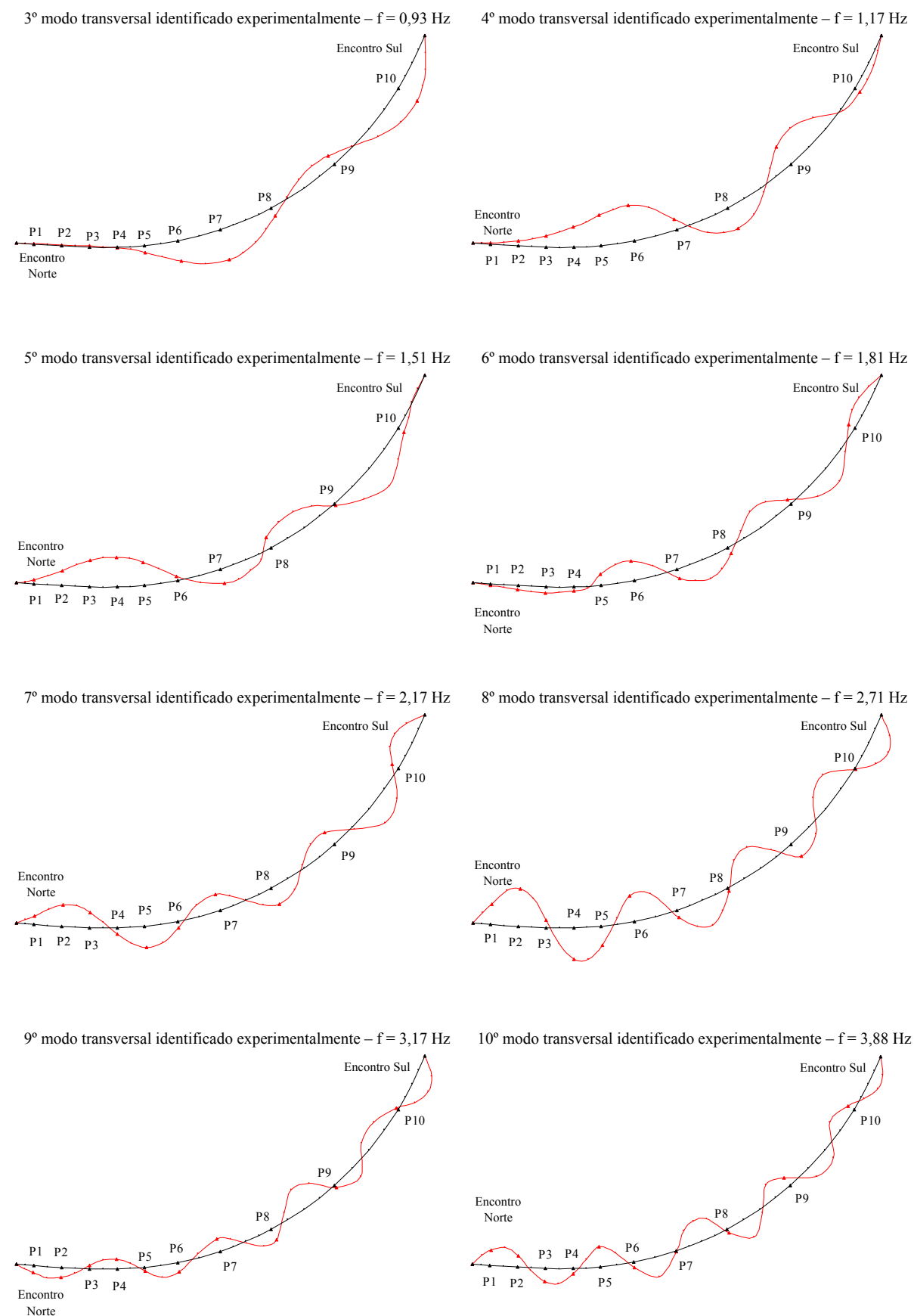


Figura 6.29 – Configurações dos modos transversais identificados para a ponte Miguel Torga (3º a 10º modos).

Os coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração identificados para a ponte Miguel Torga foram estimados através do método da meia potência. Este método foi aplicado ajustando uma *spline* às ordenadas espectrais em torno de cada pico de ressonância, de modo a determinar os pontos de meia potência com uma resolução em frequência mais fina (conforme já referido no capítulo 4). Para estimar os coeficientes de amortecimento dos modos verticais, consideraram-se os auto-espectros dos sinais de resposta obtidos nos ensaios de ressalto, e para estimar os coeficientes de amortecimento dos restantes modos, consideraram-se os auto-espectros dos registos obtidos nos outros ensaios, seleccionando sempre os correspondentes ao ponto com movimentos de maior amplitude no modo de vibração em análise.

No quadro 6.8, indicam-se os valores dos coeficientes de amortecimento estimados com o método da meia potência. Tal como no exemplo anterior, para um dos modos de vibração não foi possível avaliar o respectivo coeficiente de amortecimento, em virtude da dificuldade em definir os pontos de meia potência.

Quadro 6.8 – Coeficientes de amortecimento modal avaliados para a ponte Miguel Torga.

Modo	f (Hz)	ξ (%)	Modo	f (Hz)	ξ (%)	Modo	f (Hz)	ξ (%)
1	0,56	3,6	11	2,17	1,2	21	3,65	0,8
2	0,63	3,2	12	2,25	2,0	22	3,81	1,4
3	0,78	4,2	13	2,44	1,3	23	3,88	0,8
4	0,93	1,8	14	2,71	1,2	24	4,00	0,7
5	1,17	1,8	15	2,98	2,3	25	4,30	0,5
6	1,22	3,0	16	3,08	1,5	26	4,52	0,9
7	1,51	1,8	17	3,13	1,4	27	4,66	0,5
8	1,66	2,5	18	3,17	0,9	28	5,10	-
9	1,81	1,4	19	3,22	1,4	29	5,30	0,5
10	1,90	2,2	20	3,44	1,2			

Considerações finais:

A análise da informação obtida nos ensaios de caracterização dinâmica realizados na ponte Miguel Torga, que consistiram na medição da resposta da estrutura às acções do tráfego de camiões e do vento, permitiu, através da aplicação de um método de identificação modal estocástica, avaliar as seguintes características dinâmicas da estrutura:

- Os valores de 25 frequências de modos de vibração globais da estrutura e ainda de 4 frequências que foram detectadas apenas nos pontos ao longo do pilar P9;
- As configurações de 22 desses modos de vibração;
- Os coeficientes de amortecimento dos 25 modos de vibração globais da ponte e de 3 dos modos cujas frequências foram detectadas apenas nos pontos ao longo do pilar P9.

As características dinâmicas da ponte Miguel Torga identificadas com base nos ensaios realizados *in-situ*, constituem um contributo importante para a caracterização global do comportamento e do estado da estrutura no fim da construção e antes da abertura ao tráfego, havendo todo o interesse em acompanhar a sua evolução ao longo da vida da obra.

Em apreciação geral aos resultados obtidos no estudo efectuado na ponte Miguel Torga, considera-se que os mesmos foram positivos e que os objectivos fundamentais pretendidos foram alcançados. Comentam-se em seguida alguns aspectos do estudo realizado:

- Em virtude das características da ponte, nomeadamente, o facto de ter 11 tramos ao longo de um comprimento total de 900 m e o facto de ser curva em planta, sentiu-se que teria sido bastante melhor, dispor de um maior número de macro-sismógrafos (ou outro sistema de medição da resposta da estrutura em aceleração) para efectuar os ensaios (e não apenas os 5 GSR-16 que havia disponíveis). Devido a esse motivo, acabou por se adoptar um esquema de instrumentação da ponte e de realização dos ensaios, que permitiu identificar bem as frequências e configurações dos modos verticais e transversais, mas que não foi suficientemente refinado para a identificação das configurações dos modos de torção;
- Neste estudo procurou-se aumentar um pouco os tempos totais de aquisição em cada ensaio, passando a fazer registos de 10 minutos em vez dos 8 minutos utilizados nos dois exemplos anteriores. Teria sido preferível efectuar registos um pouco maiores, no entanto, devido aos motivos já referidos no caso anterior, nomeadamente, a capacidade de memória disponível nos macro-sismógrafos GSR-16 (1 MB), houve que manter os tempos de aquisição em valores que permitissem efectuar os ensaios dentro de um período de tempo razoável;
- Para a identificação modal da ponte Miguel Torga utilizou-se já o método básico no domínio da frequência (apresentado no capítulo 4), considerando-se que tal constituiu uma melhoria em termos de utilização de um método de identificação mais sistematizado e por isso, também mais passível de ser automatizado num programa de análise. De facto, para este estudo, implementaram-se já em *LabView* os passos fundamentais do método BFD, numa série de programas com possibilidade de transferência de resultados para *Excel*. Esses programas foram posteriormente associados num único programa mais sistematizado;
- Nos ensaios da ponte Miguel Torga utilizou-se a técnica de ensaio de *avanço dos pontos de referência*. Embora tenha sido possível efectuar a identificação de um número considerável de modos de vibração, analisado os registos de resposta assim obtidos, há algumas desvantagens em efectuar os ensaios dessa forma, nomeadamente, a análise torna-se mais difícil (é necessário analisar os registos de cada ensaio separadamente e em seguida *colar* as componentes modais obtidas para cada ensaio de modo a definir as configurações modais ao longo de toda a estrutura), e corre-se também o risco de um dos pontos de referência, comum

a cada dois ensaios, coincidir com um nodo de um ou mais modos de vibração, o que impedirá uma boa identificação das suas configurações. Como metodologia geral de efectuar os ensaios de medição da resposta das estruturas, para aplicação de métodos de identificação modal estocástica, considera-se que é preferível adoptar um ou vários pontos de referência que se mantêm para todos os ensaios efectuados (conforme já salientado no capítulo 3).

6.2.4 Ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa

Considerações gerais:

O estudo de caracterização dinâmica experimental efectuado na ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa, (LNEC – Rodrigues e Campos Costa, 1999) integrou-se nos ensaios de recepção dessa estrutura, realizados pelo LNEC com vista a avaliar experimentalmente o comportamento estrutural da ponte, após as obras de alargamento do tabuleiro rodoviário e colocação do tabuleiro ferroviário. Os ensaios de caracterização dinâmica então realizados consistiram na medição da resposta em aceleração da estrutura, resultante da acção do vento e do tráfego rodoviário.

Os ensaios de caracterização dinâmica da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa foram efectuados em Junho de 1999, antes do início da circulação de comboios na ponte, e sem qualquer interrupção do funcionamento normal da mesma. Este foi também um caso, para além do da ponte da Arrábida, que ilustra bem uma das vantagens em utilizar a identificação modal estocástica na caracterização dinâmica de estruturas de pontes em serviço. Também na ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa, qualquer interrupção de tráfego provocaria um enorme transtorno nos acessos à cidade de Lisboa.

Este estudo teve como principal objectivo a identificação experimental das frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos primeiros modos de vibração globais da estrutura. A avaliação *in situ* dessas características dinâmicas foi efectuada com o intuito de compará-las com as calculadas com os modelos de elementos finitos utilizados pelos projectistas (Steinman Boynton Gronquist & Birdsall) da solução estrutural adoptada e também com as avaliadas experimentalmente após a conclusão da 1ª fase da construção da ponte (LNEC – Marecos *et al.*, 1967; LNEC – Marecos e Castanheta, 1970). Interessava também estabelecer uma situação de referência, após as alterações introduzidas na ponte, que pudesse ser considerada para a monitorização do estado da estrutura com base na observação das suas características dinâmicas ao longo do tempo.

O estudo de caracterização dinâmica da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa foi apresentado numa conferência internacional (Rodrigues e Campos Costa, 2000) e numa conferência nacional (Rodrigues e Campos Costa, 2002).

Breve descrição da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa:

Na descrição apresentada em seguida, faz-se apenas uma delineação sucinta das características da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa e das alterações nela introduzidas para colocação do tabuleiro ferroviário e alargamento do tabuleiro rodoviário. Uma descrição mais detalhada dessas alterações e das diferentes soluções estudadas é efectuada em (Crawford e Moniz, 1997; Crawford e Barbas, 1997; Fernandes, 1997).

A ponte suspensa sobre o rio Tejo tem um vão central de 1013 m, dois vãos laterais suspensos de 483 m, e três vãos não suspensos, dois de 100 m e um de 99 m, perfazendo um comprimento total de 2278 m entre maciços de amarração (ver figura 6.30). Considerando ainda o viaduto de acesso na margem Norte, o comprimento total em estrutura elevada atinge os 3223 m.

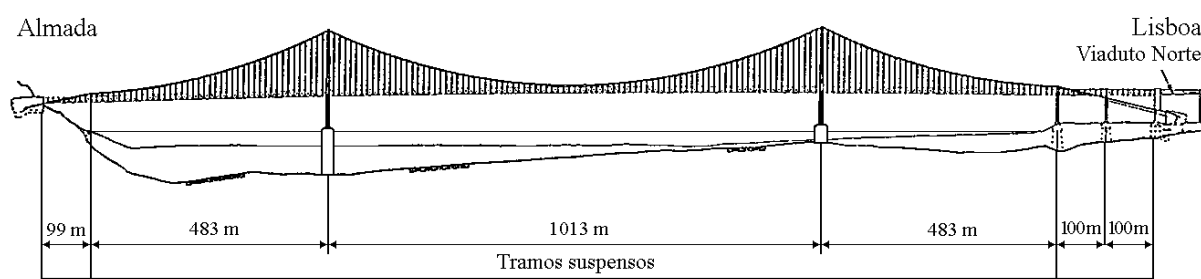


Figura 6.30 – Corte longitudinal da ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Desde o projecto inicial, a ponte foi planeada para receber tráfego rodoviário e ferroviário, no entanto, na altura da construção, decidiu-se que a mesma seria efectuada em duas fases: uma 1ª que compreenderia a construção de um tabuleiro rodoviário com 4 vias; e uma 2ª que envolveria a instalação do caminho de ferro de via dupla e o reforço da estrutura. A fase inicial foi completada em 1966 e só nos finais da década de 90 é que foi possível avançar com a 2ª fase. Entretanto, durante os 30 anos de serviço da ponte, o volume de tráfego rodoviário aumentou significativamente, de modo que optou-se por efectuar também o alargamento do tabuleiro rodoviário para 6 vias.

A solução estrutural adoptada para o alargamento do tabuleiro rodoviário e colocação do tabuleiro ferroviário na ponte suspensa sobre o rio Tejo consistiu, fundamentalmente, na instalação de um novo par de cabos de suspensão, dispostos superiormente aos cabos de suspensão principais, ancorados em maciços de amarração colocados ao lado dos já existentes, e com pendurais dispostos a cada 23 m, alternando os pontos de suspensão com os dos pendurais dos cabos principais.

Com a solução escolhida, conseguiu-se que o reforço da corda superior e diagonais da viga de rigidez fosse necessário apenas nas zonas próximas dos apoios. Não foi necessário introduzir reforços nas torres, uma vez que na solução inicialmente pensada para a 2ª fase da construção elas estariam

sujeitas a esforços maiores do que aqueles que têm de suportar com a solução adoptada. Os pilares de desvio dos cabos tiveram que ser reforçados ao longo de toda a sua altura através de chapas exteriores, e no seu topo foi necessário colocar um tirante para equilibrar as componentes horizontais resultantes do desvio lateral dos novos cabos de suspensão para os seus maciços de amarração.

Na figura 6.31 apresentam-se dois esquemas da secção transversal da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa, antes e após as alterações introduzidas para alargamento do tabuleiro rodoviário e colocação do tabuleiro ferroviário.

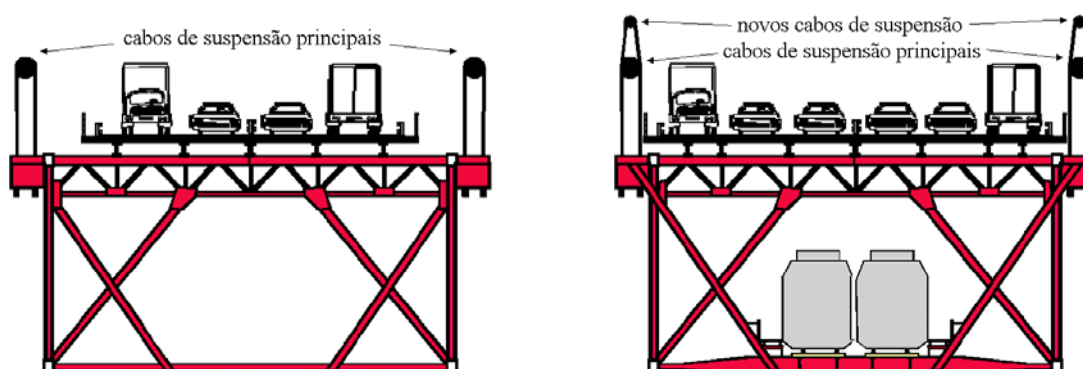


Figura 6.31 – Alterações introduzidas na secção transversal da ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Com as alterações efectuadas na ponte, a carga permanente suspensa sofreu um aumento de cerca de 50 %, sendo as cargas adicionais totalmente suportadas pelos novos cabos (Crawford e Moniz, 1997).

Na figura 6.32 apresenta-se uma vista geral da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa.



Figura 6.32 – Vista geral da ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios efectuados na ponte suspensa sobre o rio Tejo, utilizaram-se 4 macro-sismógrafos GSR-16 cujas características foram apresentadas no capítulo 3. Utilizou-se também um anemómetro para verificar os valores da velocidade do vento, na direcção transversal à ponte, ao longo dos ensaios.

Na ponte suspensa sobre o rio Tejo foram efectuados um total de 7 ensaios de medição da resposta da estrutura às acções do tráfego rodoviário e do vento, com os 4 aparelhos GSR-16 a registar simultaneamente as acelerações em 4 pontos diferentes da estrutura. Em cada ensaio, os 4 pontos estiveram sempre localizados em duas secções transversais diferentes da ponte. Obtiveram-se assim registos de acelerações em 14 pontos diferentes, situados em 7 secções transversais (ver figura 6.33).



Figura 6.33 – Secções instrumentadas nos ensaios da ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Inicialmente pretendia-se ter observado a resposta da estrutura num maior número de secções, para se poder definir as configurações modais numa forma mais refinada. No entanto, a escolha das secções instrumentadas (ver figura 6.33), acabou por ser determinada pelo facto de só nelas existirem passadiços transversais, ligados ao passadiço longitudinal que percorre toda a ponte, de onde foi possível aceder à corda superior da viga de rigidez, numa forma segura e sem necessidade de impor restrições ao tráfego rodoviário.

Em cada secção os macro-sismógrafos GSR-16 foram colocados em pontos localizados na corda superior da viga de rigidez, próximo dos pontos de ligação dos pendurais à viga de rigidez. Conforme se representa na figura 6.34, só na secção 0 (1/2 vão do tramo central) é que foi possível colocar os aparelhos exactamente nos eixos extremos, enquanto que nas restantes secções eles tiveram que ser colocados junto às longarinas exteriores.

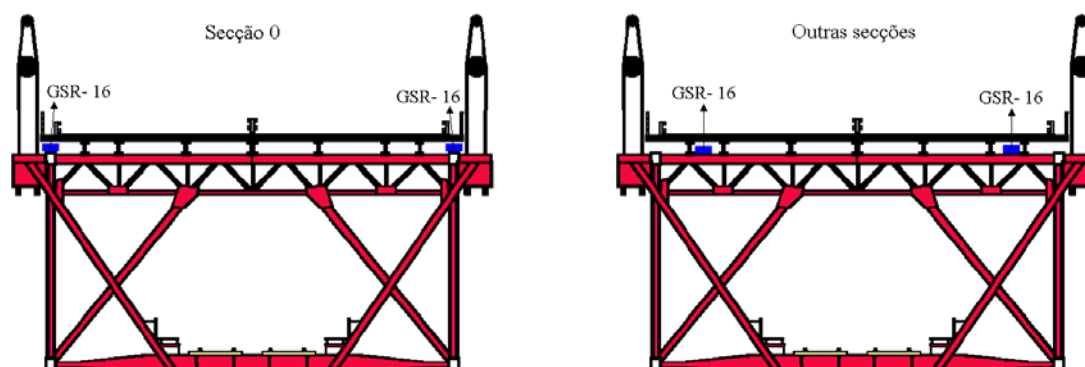


Figura 6.34 – Pontos de colocação dos macro-sismógrafos em cada secção.

Para a escolha dos pontos instrumentados em cada secção, verificou-se que foi muito importante ter efectuado alguns registos preliminares, cuja análise mostrou que os pontos escolhidos seriam adequados para a identificação das características dos modos globais de vibração da ponte. Medições efectuadas noutros pontos, como por exemplo nos passeios junto às vias de caminho de ferro, mostraram uma grande influência de vibrações locais e choques que dificultariam muito a identificação modal que se pretendia efectuar.

No quadro 6.9 e na figura 6.35 indicam-se as secções instrumentadas em cada um dos 7 ensaios efectuados na ponte suspensa sobre o rio Tejo. Nos ensaios 1 a 3 a secção 22N é a secção de referência, enquanto que nos ensaios 5 a 7 a secção de referência é a secção 22S; no ensaio 4 instrumentaram-se em simultâneo as duas secções 22N e 22S.

Quadro 6.9 – Secções instrumentadas em cada ensaio.

Ensaio 1	Ensaio 2	Ensaio 3	Ensaio 4	Ensaio 5	Ensaio 6	Ensaio 7
22N	22N	22N	22N	0	46S	66S
66N	46N	0	22S	22S	22S	22S

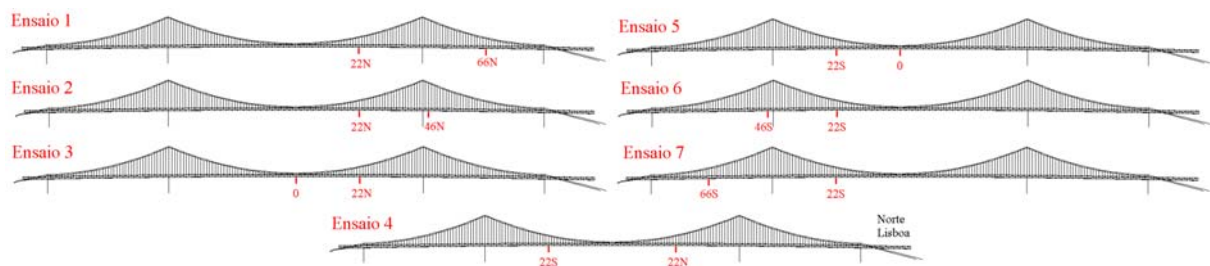


Figura 6.35 – Sequência dos ensaios efectuados na ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Considerando as características da ponte (grande vão), os valores calculados pelos projectistas e a análise efectuada com os registos obtidos em medições preliminares, era de supor que as frequências dos primeiros modos de vibração da estrutura tivessem valores bastante baixos (à volta de 0,1 Hz) e que alguns modos de vibração tivessem frequências muito próximas. Assim, optou-se por obter registos com uma grande duração, o que permitiria estimar as funções de densidade espectral da resposta da estrutura com uma resolução em frequência adequada.

A duração total dos registos obtidos em cada ensaio foi de 1h. 5m. 36seg. (6 amostras de 656 seg.). A frequência de amostragem foi de 50 Hz (a menor possível com o equipamento utilizado), tendo os GSR-16 sido configurados com a sua maior sensibilidade (com capacidade de discretização de uma amplitude mínima de aceleração de 15,3 μg).

Com as durações de registo adoptadas, a memória disponível em cada GSR-16 ficou praticamente esgotada ao fim de cada ensaio. Assim, terminado cada ensaio foi necessário transferir os

registos para o disco rígido dum computador portátil, antes de prosseguir para o ensaio seguinte. Os ensaios foram efectuados em 4 tardes de dias diferentes, tendo-se efectuado 2 ensaios em cada tarde.

Identificação modal:

A técnica de identificação modal utilizada para analisar os registos obtidos na ponte suspensa sobre o rio Tejo (LNEC – Rodrigues e Campos Costa, 1999) foi o método BFD que já foi descrito no capítulo 4.

A análise das funções de densidade espectral da resposta da estrutura centrou-se apenas na gama de frequências até aos 2,0 Hz, onde se verificou que os primeiros modos de vibração globais da ponte estão situados. Antes do cálculo das funções de densidade espectral, os registos foram pré-processados através da remoção da componente contínua e filtragem com um filtro passa-banda de tipo Butterworth de ordem 8, com frequências de corte de 0,05 Hz e 2,00 Hz.

A nível do pré-processamento dos registos, determinaram-se também as séries correspondentes à semi-soma e à semi-diferença dos registos verticais obtidos nos dois pontos instrumentados em cada secção.

As funções de densidade espectral foram determinadas através da transformada discreta de Fourier, calculada com o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT). Para a sua avaliação consideraram-se 12 amostras independentes de 16384 valores cada uma, sobrepostas a 50 %, tendo-se aplicado uma janela de *Hanning* a cada amostra para reduzir os efeitos de escorregamento (*leakage*). Para a frequência de amostragem de 50 Hz, a resolução em frequência das estimativas das funções de densidade espectral é portanto de 0,003 Hz.

Na avaliação dos espectros normalizados médios (ANPSD), introduziu-se uma ligeira alteração relativamente ao método indicado no capítulo 4. Essa alteração consistiu em ponderar os espectros normalizados com a função de coerência entre os registos obtidos em cada secção nos pontos localizados a jusante e a montante, de modo a realçar as ordenadas espectrais correspondentes a movimentos globais da secção (função de coerência com valores elevados).

Nas figuras 6.36, 6.37 e 6.38 apresentam-se os espectros normalizados médios correspondentes, respectivamente, à semi-soma das acelerações verticais em cada secção (que salientam os picos de ressonância dos modos verticais), à semi-diferença das acelerações verticais em cada secção (que salientam os picos de ressonância dos modos de torção) e às acelerações transversais. Nos espectros normalizados médios apresentados nessas figuras, indicam-se também os valores das frequências dos picos de ressonância mais evidentes, onde, de acordo com os procedimentos do

método BFD, se efectuou uma análise das funções de coerência e das relações de amplitude e fase entre os sinais obtidos nas diferentes secções instrumentadas.

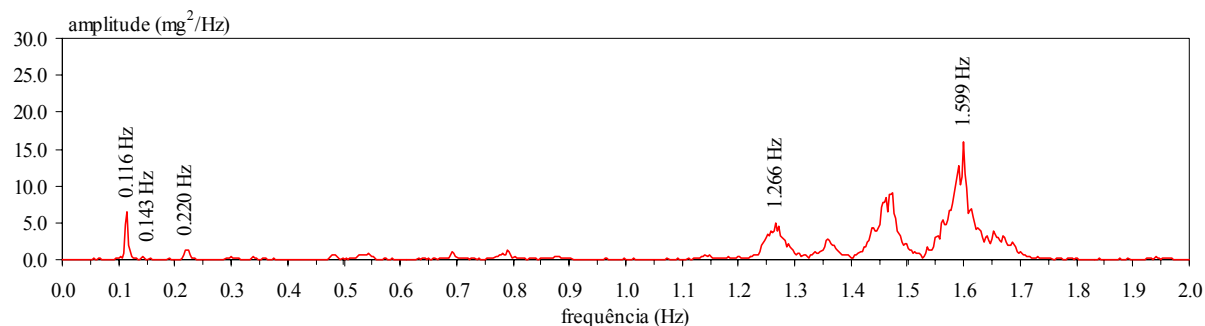


Figura 6.36 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.

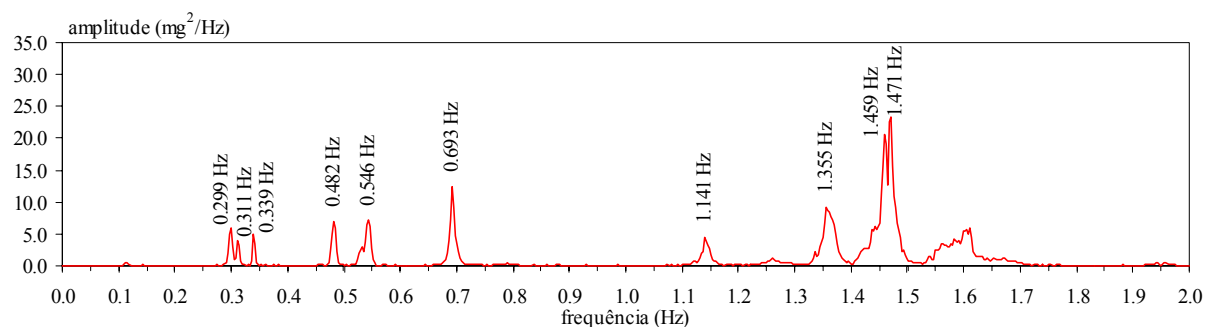


Figura 6.37 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.

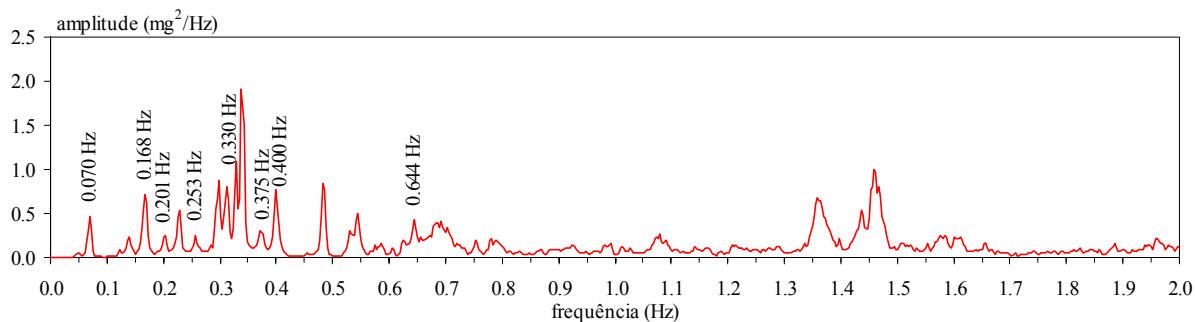


Figura 6.38 – Espectro normalizado médio dos registos transversais.

Na figura 6.39 apresenta-se o espectro cruzado e a função de coerência entre os registos verticais obtidos na secção 0.

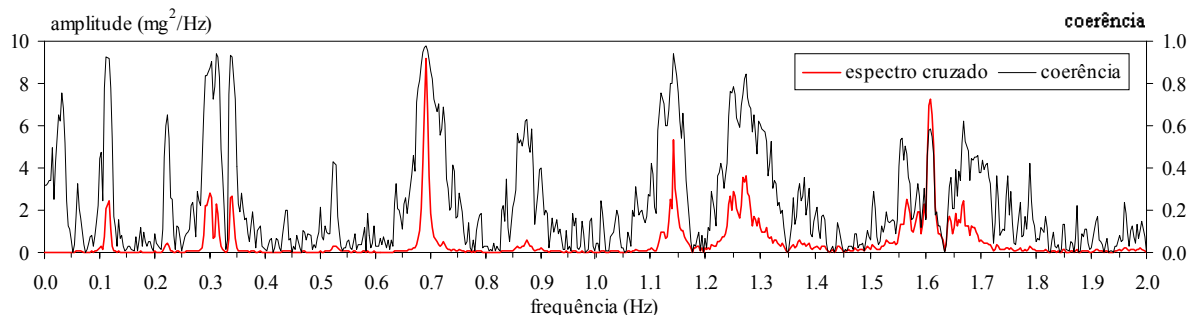


Figura 6.39 – Espectro cruzado e função de coerência entre os registos verticais na secção 0.

Utilizou-se o método BFD para avaliar as componentes modais nos graus de liberdade observados, através das estimativas H_1 das FRF de transmissibilidade entre os registos obtidos nas secções de referência (22N e 22S) e os obtidos em cada uma das restantes secções. A partir dos valores da função de coerência e do número de amostras independentes consideradas, avaliou-se também o erro aleatório normalizado nas funções H_1 , o qual foi utilizado para determinar intervalos de confiança na estimativa das componentes modais (conforme já apresentado no capítulo 4).

Com o método de identificação modal estocástica utilizado, foram identificadas um total de 24 frequências correspondentes a modos naturais de vibração da ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa (ver quadro 6.10), tendo-se conseguido identificar também 13 configurações desses modos de vibração. Nas figuras 6.40 a 6.41 apresentam-se as configurações obtidas para os três primeiros modos transversais, verticais e de torção. Nessas figuras incluem-se barras de erro que representam os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais.

Quadro 6.10 – Frequências naturais de vibração identificadas para a ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Modo	f (Hz)	Tipo de modo	Modo	f (Hz)	Tipo de modo	Modo	f (Hz)	Tipo de modo
1	0,070	Transversal	9	0,299	Torção	17	0,644	Transversal
2	0,116	Vertical	10	0,311	Torção/Torres	18	0,693	Torção
3	0,143	Vertical	11	0,330	Transversal	19	1,141	Torção
4	0,168	Transversal	12	0,339	Torção/Torres	20	1,266	Vertical
5	0,201	Transversal	13	0,375	Transversal	21	1,355	Torção
6	0,220	Vertical	14	0,400	Transversal	22	1,459	Torção
7	0,229	Transversal	15	0,482	Torção	23	1,471	Torção
8	0,253	Transversal	16	0,546	Torção/Torres	24	1,599	Vertical

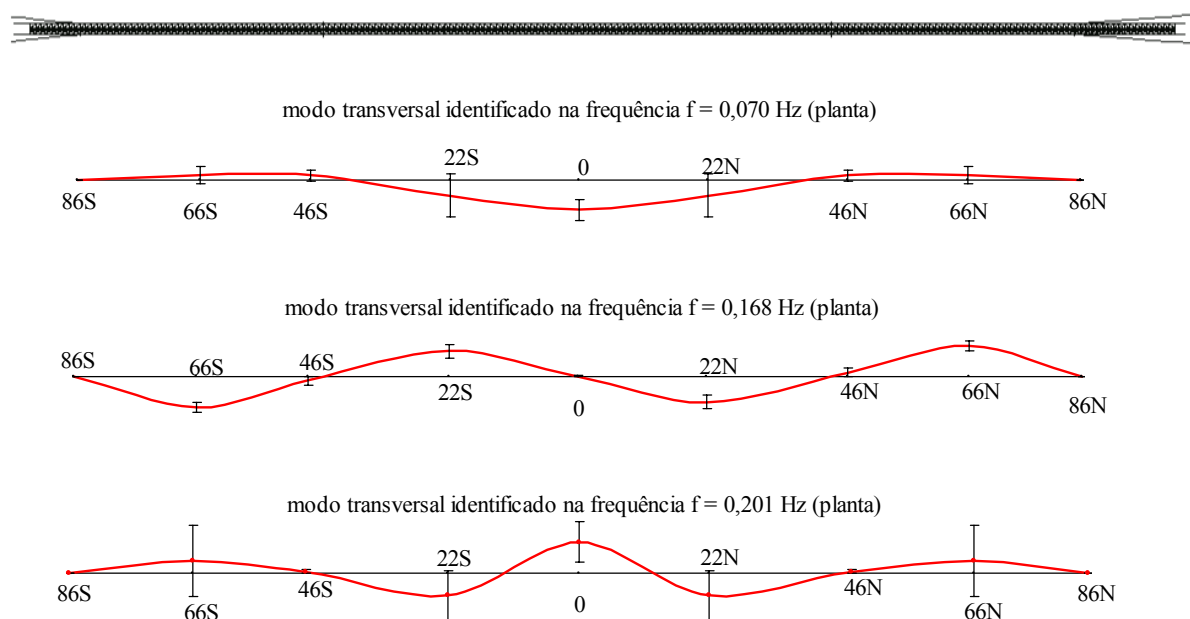


Figura 6.40 – Configurações identificadas para os três primeiros modos transversais.

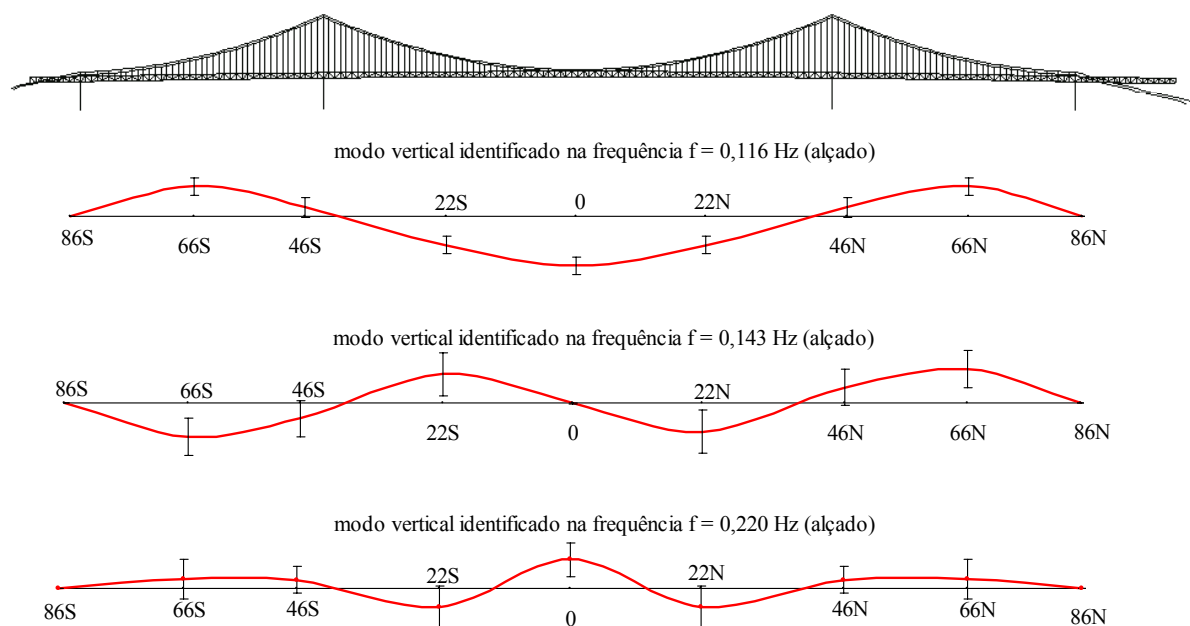


Figura 6.41 – Configurações identificadas para os três primeiros modos verticais.

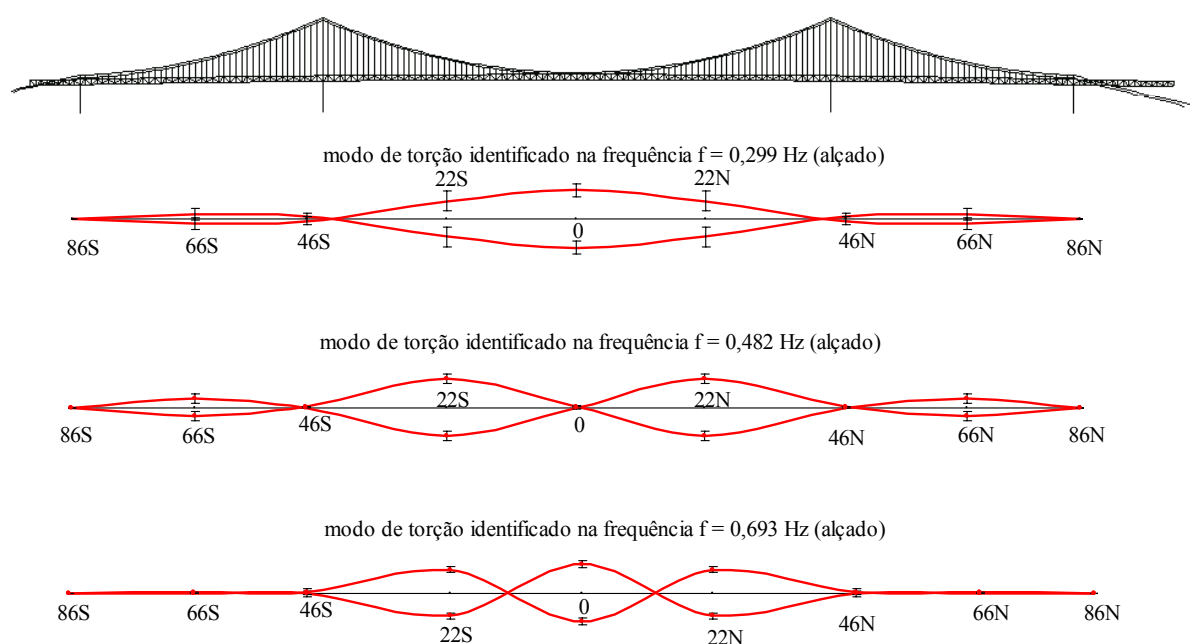


Figura 6.42 – Configurações identificadas para os três primeiros modos de torção.

No estudo de caracterização dinâmica da ponte suspensa sobre o rio Tejo (LNEC – Rodrigues e Campos Costa, 1999), utilizou-se o método de avaliação dos coeficientes de amortecimento já apresentado no capítulo 4, que consiste no ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto espectros das acelerações registadas nos ensaios. Conforme se referiu no capítulo 4, com esse método, avaliam-se também os desvios padrão (σ_{ξ}) na estimativa dos coeficientes de amortecimento, o que permite ter uma medida do grau de confiança nos valores estimados.

Na figura 6.43 ilustra-se a aplicação do método utilizado para estimar os coeficientes de amortecimento modal, mostrando-se as ordenadas espectrais seleccionadas para o 1º modo vertical e o espectro analítico a elas ajustado.

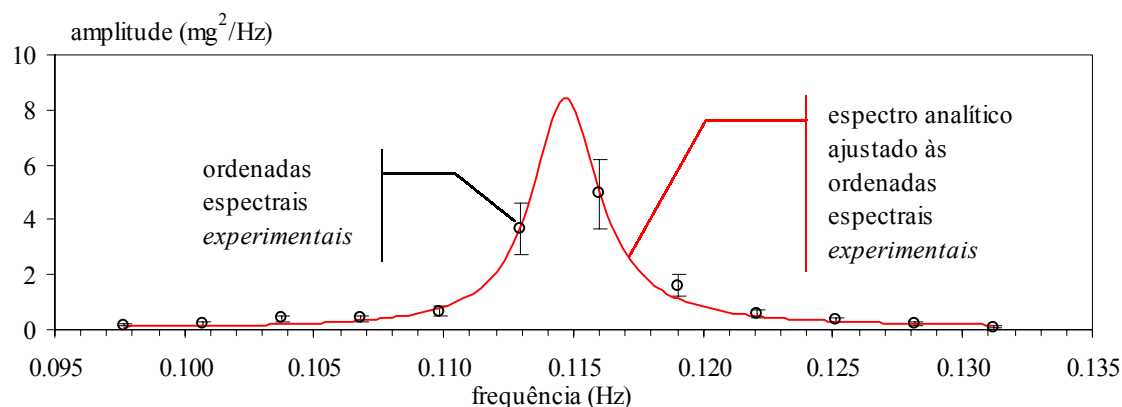


Figura 6.43 – Avaliação do coeficiente de amortecimento do 1º modo vertical.

Os valores estimados para os coeficientes de amortecimento (ξ) e os correspondentes desvios padrão (σ_ξ) são apresentados no quadro 6.11, onde se resumem as características dinâmicas identificadas para a ponte suspensa sobre o rio Tejo. No quadro 6.11 indicam-se também as frequências calculadas com o modelo de elementos finitos espacial utilizado pelos projectistas (Steinman Boynton Gronquist & Birdsall) da solução estrutural adoptada para o alargamento do tabuleiro rodoviário e colocação do tabuleiro ferroviário na ponte.

Quadro 6.11 – Resumo das características dinâmicas identificadas para a ponte suspensa sobre o rio Tejo.

Modos transversais				Modos verticais				Modos de torção			
f (Hz)		ξ (%)	σ_ξ (%)	f (Hz)		ξ (%)	σ_ξ (%)	f (Hz)		ξ (%)	σ_ξ (%)
ensaios	modelo			ensaios	modelo			ensaios	modelo		
0,070	0,068	3,8	0,67	0,116	0,110	1,4	0,38	0,299	0,261	0,7	0,16
0,168	0,149	2,0	0,44	0,143	0,133	2,1	1,52	0,311	-	1,0	0,21
0,201	0,188	1,4	0,27	0,220	0,207	2,0	0,38	0,339	-	0,3	0,16
0,229	-	0,9	0,22	1,266	-	2,6	0,95	0,482	-	0,8	0,15
0,253	-	0,8	0,13	1,599	-	0,9	1,40	0,546	-	0,8	0,19
0,330	-	0,4	0,24					0,693	-	0,7	0,09
0,375	-	0,6	0,15					1,141	-	0,8	0,18
0,400	-	0,9	0,19					1,355	-	0,6	0,25
0,644	-	0,6	0,34					1,459	-	0,6	0,40
								1,471	-	0,3	0,10

Considerações finais:

Através da aplicação de um método de identificação modal estocástica, na análise dos registos da resposta da ponte suspensa sobre o rio Tejo às acções ambiente (tráfego rodoviário e vento),

avaliaram-se as frequências e coeficientes de amortecimento de 24 modos naturais de vibração da estrutura e também as configurações de 13 desses modos. O facto de a ponte ter as primeiras frequências naturais com valores bastante baixos, constituiu por si só um desafio para a realização deste estudo, nomeadamente em termos de verificar se o equipamento utilizado tinha de facto uma resposta adequada nessa gama de frequências.

Conforme se pode verificar nos valores apresentados no quadro 6.11, as frequências calculadas pelos projectistas, com um modelo de elementos finitos espacial, concordam razoavelmente com as identificadas experimentalmente (a maior diferença verifica-se na frequência do 1º modo de torção, com um erro relativo de 12,7 %).

Os valores identificados para as frequências dos primeiros modos transversal e vertical, respectivamente, 0,070 Hz e 0,116 Hz, são próximos dos avaliados experimentalmente após a conclusão da 1ª fase da construção, através de ensaios então realizados (LNEC – Marecos *et al.*, 1967) e do sistema de monitorização que esteve instalado na ponte (LNEC – Marecos e Castanheta, 1970). Uma vez que essas frequências não se alteraram significativamente com as obras de alargamento do tabuleiro rodoviário e de colocação do tabuleiro ferroviário, pode-se depreender que o acréscimo de 50 % nas cargas permanentes (Crawford e Moniz, 1997) foi correspondido com igual acréscimo na rigidez da estrutura.

Nas pontes de grande vão, a relação entre a frequência do 1º modo de torção (f_θ) e a frequência do 1º modo vertical (f_v) é um factor importante que é considerado como um indicador da susceptibilidade desse tipo de estruturas ao fenómeno de *flutter* (Davenport, 1994). Esse factor deve ser elevado para prevenir que, sob a influência das forças aeroelásticas, ocorra o fenómeno de convergência das frequências do modo vertical e de torção. Assim, com as frequências identificadas para a ponte suspensa sobre o rio Tejo, determinou-se também esse factor, obtendo-se um valor de $f_\theta/f_v = 2,58$ que está próximo dos valores que se verificam em pontes suspensas de grande vão; por exemplo na ponte do Humber, que tem um vão central de 1410 m, esse factor tem um valor de 2,68.

As características dinâmicas identificadas através dos ensaios realizados na ponte suspensa sobre o rio Tejo constituem uma situação de referência, que deve ser tida em conta na monitorização do estado da estrutura com base na observação das suas características dinâmicas ao longo do tempo, quer através da realização periódica de ensaios semelhantes aos efectuados quer com um sistema de monitorização permanente.

Comentam-se em seguida, alguns aspectos, que se considera importante salientar, relativos ao trabalho realizado na ponte suspensa sobre o rio Tejo:

- Foi muito importante ter efectuado alguns ensaios preliminares para escolha dos pontos de colocação dos macro-sismógrafos; de facto, no caso de se ter optado por instrumentar outros pontos, mesmo de acesso mais fácil, como por exemplo nos passeios junto às vias de caminho de ferro, ter-se-iam obtidos registos com pouca informação em termos dos modos de vibração globais da ponte;
- A duração total dos registos obtidos em cada ensaio foi de cerca de 1 h., o que para uma estrutura com frequências naturais de vibração de valores tão baixos como a ponte suspensa sobre o rio Tejo não é de modo algum excessivo; as limitações de memória dos macro-sismógrafos GSR-16 e a necessidade de efectuar os ensaios num tempo total razoável, levou a executá-los com as durações já indicadas;
- Teria sido melhor ter obtido a resposta da estrutura num maior número de secções, no entanto, a dificuldade de acesso aos pontos situados nos extremos da corda superior da viga de rigidez levou a limitar os ensaios às 7 secções que foram instrumentadas;
- Para a ponte suspensa sobre o rio Tejo, devido ao facto de ser uma estrutura com frequências naturais de vibração com valores muito baixos, os ensaios de medição de vibrações ambiente e a análise posterior da informação obtida, com métodos de identificação modal estocástica, são de facto o processo mais eficaz, senão mesmo o único, de avaliar experimentalmente as suas características dinâmicas.

6.2.5 Estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira

Considerações gerais:

Os ensaios de caracterização dinâmica da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira (LNEC – Rodrigues, 2002) foram efectuados no âmbito dos ensaios de recepção dessa estrutura, realizados pelo LNEC após a conclusão das obras de construção da estrutura e antes do início da sua utilização para o tráfego de aviões.

Os ensaios efectuados e a análise subsequente da informação obtida tiveram como principal objectivo a avaliação experimental das características dinâmicas da estrutura, designadamente das frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos seus modos naturais de vibração. Efectuaram-se assim ensaios de medição da resposta em aceleração da estrutura, sob os efeitos da acção da passagem de camiões carregados, e ainda ensaios que consistiram na libertação repentina de um peso de 608 kN suspenso a meio vão de dois dos painéis de laje da estrutura.

A avaliação *in situ* das características dinâmicas da estrutura foi efectuada com o intuito de estabelecer uma situação de referência, após a conclusão das obras de construção, que pudesse ser

considerada na monitorização da estrutura ao longo do tempo. Interessava também comparar as características dinâmicas avaliadas através dos ensaios com as calculadas com modelos de elementos finitos, e obter informação experimental sobre o efeito na estrutura de acções de tipo impulsivo, tendo-se para isso realizado os ensaios de libertação repentina dum peso de 608 kN suspenso a meio vão de dois dos painéis de laje da estrutura.

O estudo de caracterização dinâmica experimental da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira foi apresentado numa conferência internacional (Rodrigues e Campos Costa, 2002) e numa conferência nacional (Rodrigues e Campos Costa, 2002).

Breve descrição da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira:

A estrutura de ampliação do aeroporto de Sta. Catarina na ilha da Madeira foi projectada por *STA - Segadães Tavares & Associados*. É uma estrutura em ponte, com um tabuleiro com cerca de 1000 m de comprimento e 178 m de largura, desenvolvendo-se a cerca de 50 m de altura acima do nível do mar. Esta estrutura de betão armado pré-esforçado é constituída por 31 pórticos, transversais ao eixo da pista, que distam 32 m entre si (ver figura 6.44).

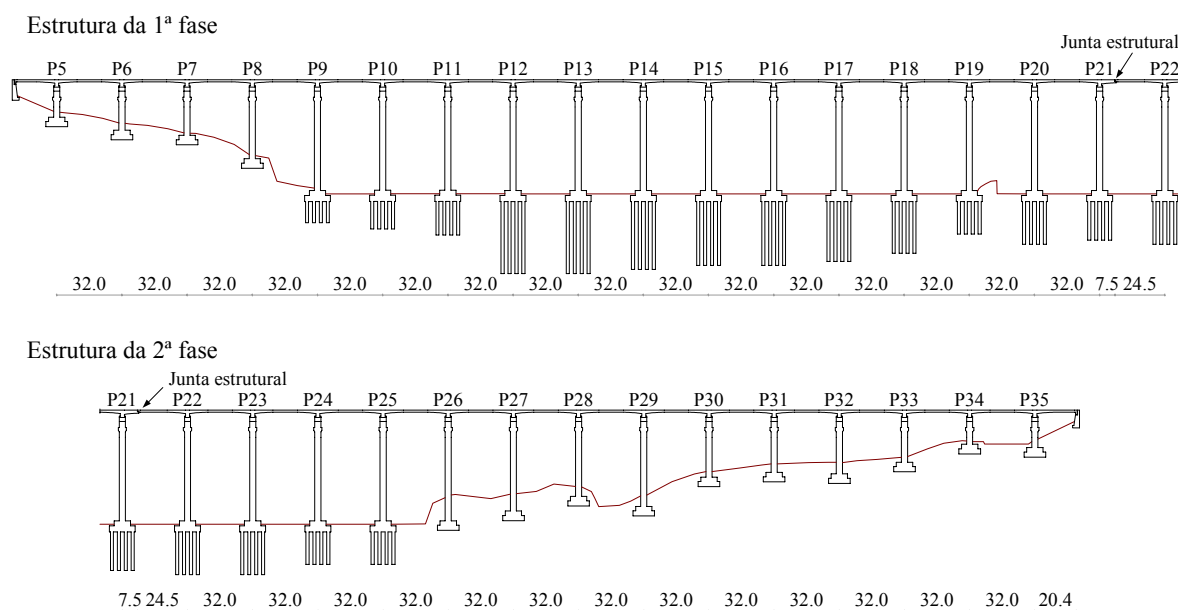


Figura 6.44 – Cortes longitudinais da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira.

As vigas dos pórticos suportam uma laje com espessura variável desde 1,0 m nos 12 m centrais de cada painel até 1,7 m na ligação às vigas. Os pórticos têm 6 pilares, afastados entre si de 32 m, ligados superiormente pelas vigas com cinco vãos de 32 m e duas consolas laterais de 14,5 m (ver figura 6.45). Estas vigas são também de altura variável desde 5,6 m sobre os pilares até 3,6 m a meio vão. Os pilares dos pórticos, de secção circular com 3 m de diâmetro, têm, em geral, cerca de

50 m de altura, embora existam pilares com alturas inferiores junto às zonas mais próximas das encostas da ilha. As fundações dos pilares são directas em rocha ou indirectas através de estacas que nalguns casos chegam a atingir 58 m de profundidade.

Devido ao seu grande comprimento e sendo fortemente pré-esforçada, a estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira é muito sensível aos efeitos da fluência e retracção do betão e às variações de temperatura, sendo por isso constituída por duas estruturas separadas por uma junta e designadas por estrutura da 1ª fase e estrutura da 2ª fase (ver figura 6.44).

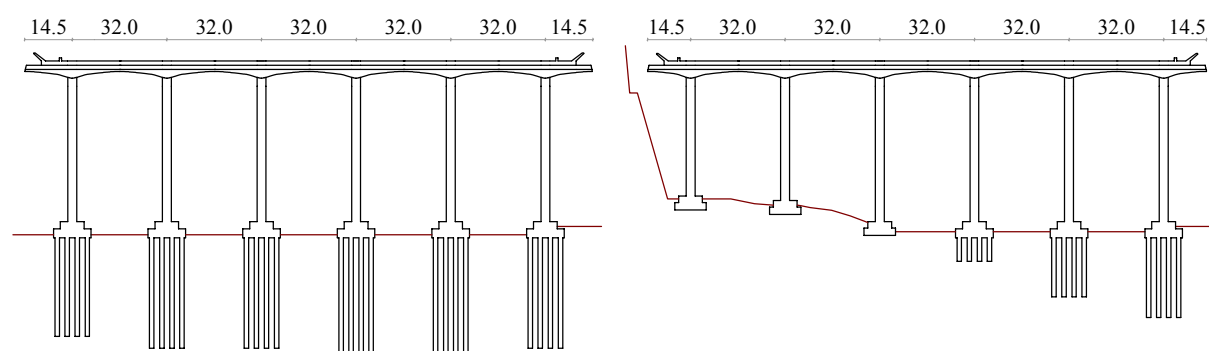


Figura 6.45 – Cortes transversais da estrutura em dois pórticos.

Na figura 6.46 apresentam-se algumas vistas gerais da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira.



Figura 6.46 – Vistas gerais da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira (<http://www.anam.pt>).

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios de caracterização dinâmica da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira utilizou-se o seguinte equipamento (cujas características foram já descritas no capítulo 3):

- 12 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo FBA-11 da *Kinematics*;
- 4 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;
- sistema de aquisição de dados SCXI-1200 com conversão analógica/digital a 12 bits e um chassis SCXI-1000DC de 24 canais;

- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição;
- 5 macro-sismógrafos GSR-16;
- 2 computadores portáteis.

Na estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira foram efectuados dois tipos de ensaios dinâmicos:

- ensaios em que, aproveitando os camiões utilizados nos ensaios estáticos, registou-se a resposta em aceleração da estrutura, induzida pela circulação dos camiões com velocidades moderadas, incluindo a sua passagem sobre tábuas de ressalto de modo a aumentar o nível de resposta da estrutura;
- ensaios de libertação repentina dum peso de 608 kN suspenso a meio vão de dois dos painéis de laje da estrutura.

Os ensaios da estrutura da 1ª fase foram realizados em 4, 5 e 18 de Março de 2000, enquanto que os ensaios da estrutura da 2ª fase foram realizados em 18 e 20 de Março de 2000. Em ambas as estruturas efectuaram-se os ensaios com circulação de camiões. Na estrutura da 1ª fase efectuaram-se dois ensaios de libertação repentina dum peso, ao passo que na estrutura da 2ª fase realizou-se apenas um ensaio desse tipo.

Nos ensaios efectuados foram adoptados factores de ganho nos diversos equipamentos utilizados, que permitiram medir amplitudes mínimas de aceleração com valores de:

- 19,5 μg com os acelerómetros FBA-11, no caso dos ensaios com circulação de camiões;
- 195 μg com os três acelerómetros FBA-11 mais próximos do ponto de suspensão do peso, ficando os restantes acelerómetros FBA-11 (nos ensaios de libertação repentina do peso de 608 kN) com uma configuração idêntica à utilizada nos ensaios com circulação de camiões;
- 15,3 μg com os macro-sismógrafos GSR-16, em todos os ensaios.

Os ensaios com circulação de camiões foram efectuados utilizando transdutores de referência que ficaram colocados sempre nos mesmos pontos, enquanto que os restantes transdutores foram mudados de ensaio para ensaio. Obtiveram-se assim registos da resposta da estrutura num número considerável de pontos, 44 na estrutura da 1ª fase e 62 na estrutura da 2ª fase (ver figuras 6.47 e 6.48).

A frequência de amostragem utilizada nos ensaios com circulação de camiões, foi de 50 Hz para os macro-sismógrafos GSR-16 e de 100 Hz para os acelerómetros FBA-11 ligados ao sistema de aquisição SCXI-1200. A duração total dos registos em cada ensaio foi de 10 minutos (30000 valores a 50 Hz ou 60000 valores a 100 Hz).

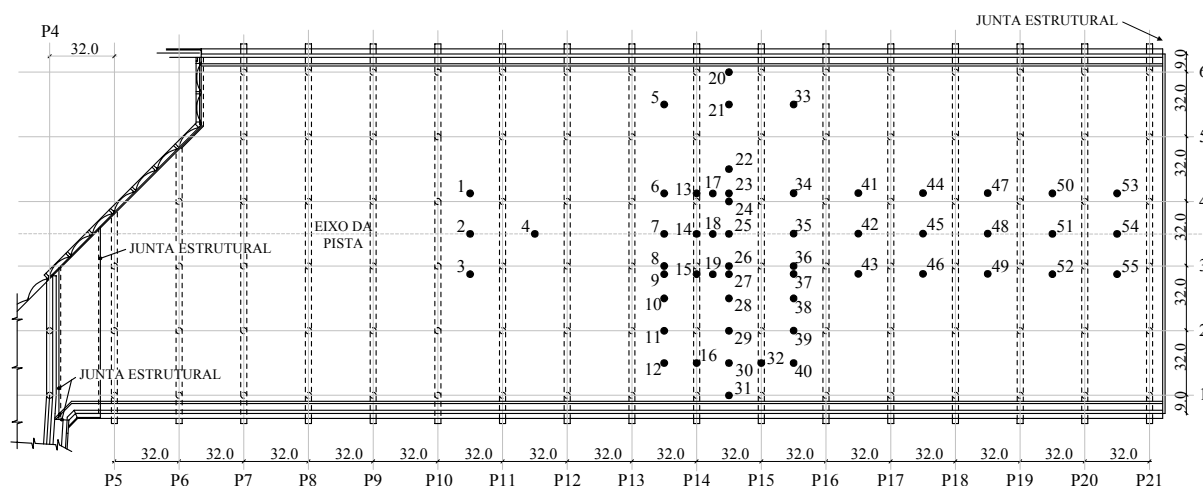


Figura 6.47 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 1ª fase.

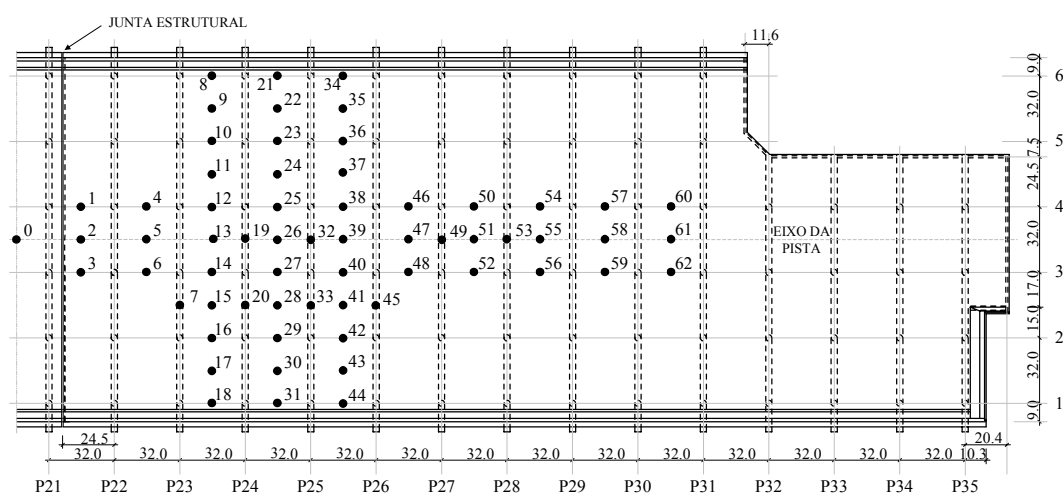


Figura 6.48 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 2ª fase.

Nos quadros 6.12 e 6.13 indicam-se os pontos instrumentados nos ensaios com circulação de camiões, efectuados na estrutura, respectivamente, da 1ª fase e da 2ª fase.

Quadro 6.12 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 1ª fase.

ensaios com os acelerómetros FBA-11 (direcção vertical)												
ensaio	c.1	c.2	c.3	c.4	c.5	c.6	c.7	c.8	c.9	c.10	c.11	c.12
1	27	25	23	9	7	6	46	45	44	55	54	53
2	27	25	23	15	14	13	43	42	41	52	51	50
3	27	25	23	19	18	17	37	35	34	49	48	47
ensaios com os macro-sismógrafos GSR-16 (triaxiais)												
ensaio	GSR-200		GSR-201		GSR-202		GSR-204			GSR-206		
1	25		12		29		30			40		
2	25		3		4		2			1		

Quadro 6.13 – Pontos instrumentados nos ensaios da estrutura da 2ª fase.

ensaios com os acelerómetros FBA-11 (direcção vertical)												
ensaio	c.1	c.2	c.3	c.4	c.5	c.6	c.7	c.8	c.9	c.10	c.11	c.12
1	25	26	23	48	47	46	1	2	3	62	61	60
2	25	26	23	40	39	38	4	5	6	59	58	57
3	25	26	23	43	42	41	12	13	14	56	55	54
4	25	26	23	30	29	28	15	16	17	52	51	50
5	19	26	32	33	41	45	7	15	20	49	51	53
ensaios com os macro-sismógrafos GSR-16 (triaxiais)												
ensaio	GSR-200		GSR-201		GSR-202		GSR-204		GSR-206			
1	26		0		8		21		34			
2	26		18		9		22		35			
3	26		31		10		23		36			
4	26		44		11		24		37			

Os dois sistemas de medição utilizados nos ensaios (acelerómetros FBA-11 e macro-sismógrafos GSR-16) funcionaram de forma independente, não se tendo procurado iniciar o armazenamento dos registos exactamente no mesmo instante em ambos. Tal exigiu que fossem colocados transdutores de ambos os sistemas num ponto de referência comum (o ponto 25 nos ensaios da estrutura da 1ª fase e o ponto 26 nos ensaios da estrutura 2ª fase) e que a análise subsequente fosse também efectuada de forma independente com os registos obtidos com cada um dos sistemas.

O segundo tipo de ensaios realizados consistiu na medição das acelerações na estrutura após a libertação repentina dum peso de 608 kN suspenso a meio vão de dois dos painéis de laje da estrutura. A suspensão do peso de 608 kN foi efectuada através de 4 cordões de pré-esforço ligados a uma estrutura metálica de suporte do peso, constituído por blocos de betão, e a uma placa de ancoragem na face superior da laje. O peso foi elevado através de um macaco hidráulico, com o qual os cordões foram tensionados e em seguida ancorados na referida placa de ancoragem. A estrutura metálica de suporte do peso, tinha um elemento fusível que foi cortado através de explosivos, conseguindo-se dessa forma que o peso fosse libertado repentinamente deixando a estrutura a vibrar livremente.

Nos quadros 6.14 a 6.16 e nas figuras 6.49 a 6.51 indicam-se os pontos instrumentados nos ensaios de libertação dum peso de 608 kN. Nestes ensaios utilizou-se uma frequência de amostragem de 250 Hz em ambos os sistemas de medição (acelerómetros FBA-11 e macro-sismógrafos GSR-16).

Quadro 6.14 – Pontos instrumentados no 1º ensaio de libertação dum peso na estrutura da 1ª fase.

acelerómetros FBA-11 (direcção vertical)											
c.1	c.2	c.3	c.4	c.5	c.6	c.7	c.8	c.9	c.10	c.11	c.12
23	25	27	6	7	9	37	35	34	16	30	32
macro-sismógrafos GSR-16 (triaxiais)											
GSR-200		GSR-201		GSR-202		GSR-204		GSR-206			
25		5		21		33		20			

Quadro 6.15 – Pontos instrumentados no 2º ensaio de libertação dum peso na estrutura da 1ª fase.

acelerómetros FBA-11 (direcção vertical)											
c.1	c.2	c.3	c.4	c.5	c.6	c.7	c.8	c.9	c.10	c.11	c.12
26	28	29	39	38	36	8	10	11	22	24	25
macro-sismógrafos GSR-16 (triaxiais)											
GSR-200	GSR-201	GSR-202	GSR-204		GSR-206						
28	12	30	40		31						

Quadro 6.16 – Pontos instrumentados no ensaio de libertação dum peso na estrutura da 2ª fase.

acelerómetros FBA-11 (direcção vertical)											
c.1	c.2	c.3	c.4	c.5	c.6	c.7	c.8	c.9	c.10	c.11	c.12
27	28	29	42	41	40	14	15	16	24	25	26
macro-sismógrafos GSR-16 (triaxiais)											
GSR-200	GSR-201	GSR-202	GSR-204		GSR-206						
28	17	30	43		31						

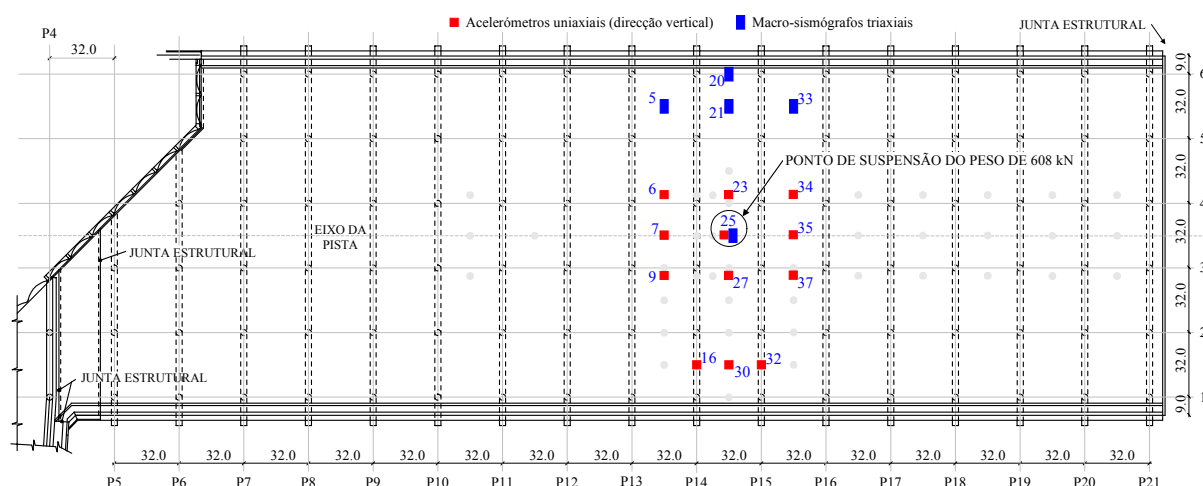


Figura 6.49 – Instrumentação no 1º ensaio de libertação dum peso efectuada na estrutura da 1ª fase.

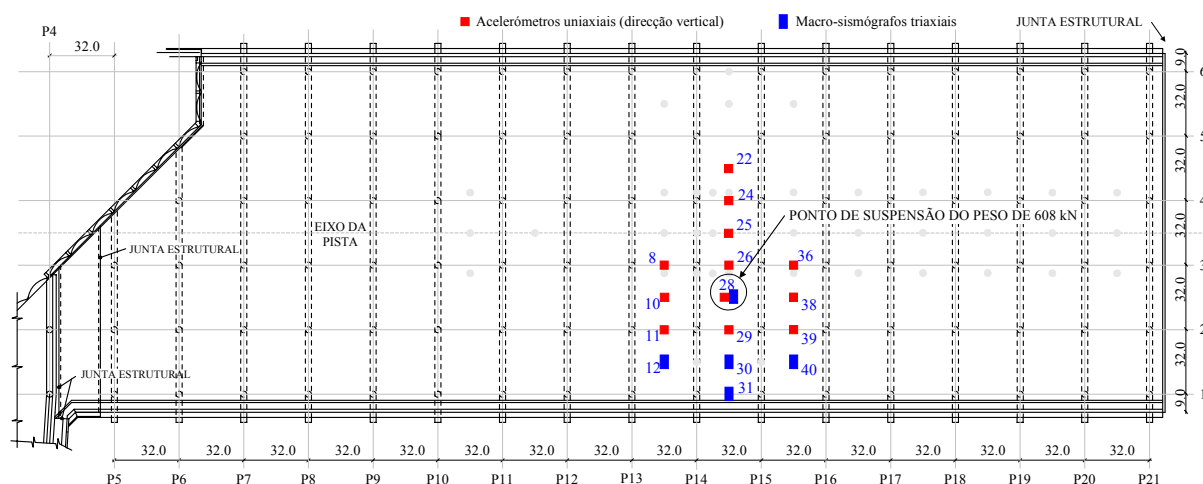


Figura 6.50 – Instrumentação no 2º ensaio de libertação dum peso efectuada na estrutura da 1ª fase.

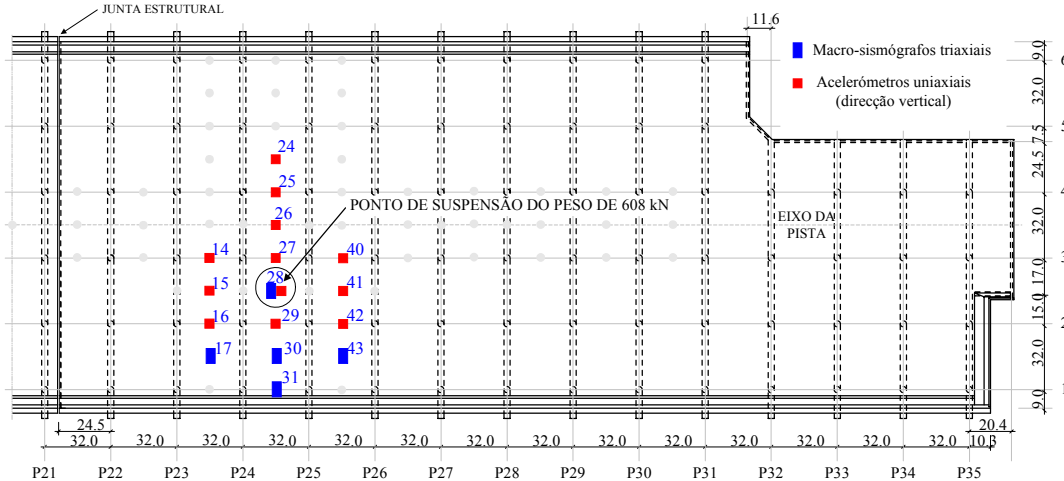


Figura 6.51 – Instrumentação no ensaio de libertação dum peso efectuado na estrutura da 2ª fase.

Análise dos registos obtidos nos ensaios com circulação de camiões:

Os registos de acelerações na estrutura, obtidos nos ensaios com circulação de camiões, foram analisados utilizando o método BFD, que já foi descrito no capítulo 4. As funções de densidade espectral da resposta da estrutura foram assim determinadas utilizando o algoritmo da FFT.

Antes do cálculo das funções de densidade espectral, os registos de acelerações foram pré-processados através de: remoção de média ou de tendências lineares; filtragem passa baixo com frequência de corte a 20 Hz, utilizando um filtro de tipo Butterworth de ordem 4; e no caso dos registos obtidos com os acelerómetros FBA-11, decimação dos sinais da frequência de 100 Hz para uma frequência de 50 Hz.

As funções de densidade espectral da resposta da estrutura foram avaliadas considerando amostras com 4096 valores, sobrepostas a 50 %, tendo-se aplicado uma janela de *Hanning* a cada amostra para reduzir o efeito de escorregamento (*leakage*). A resolução em frequência das funções de densidade espectral assim estimadas é a correspondente aos 4096 valores de cada amostra, o que para a frequência de amostragem de 50 Hz corresponde a $\Delta f = 0,012$ Hz.

A análise das funções de densidade espectral, que se apresenta em seguida, centra-se na gama de frequências até aos 6 Hz.

Nas figuras 6.52 a 6.57 apresentam-se os espectros normalizados médios (ANPSD), avaliados com os registos obtidos nos ensaios com circulação de camiões. Nessas figuras indicam-se também os valores das frequências que, após análise das funções de coerência e das estimativas H_1 das FRF de transmissibilidade, entre os registos de resposta nos diferentes pontos instrumentados e nos pontos de referência, foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração da estrutura.

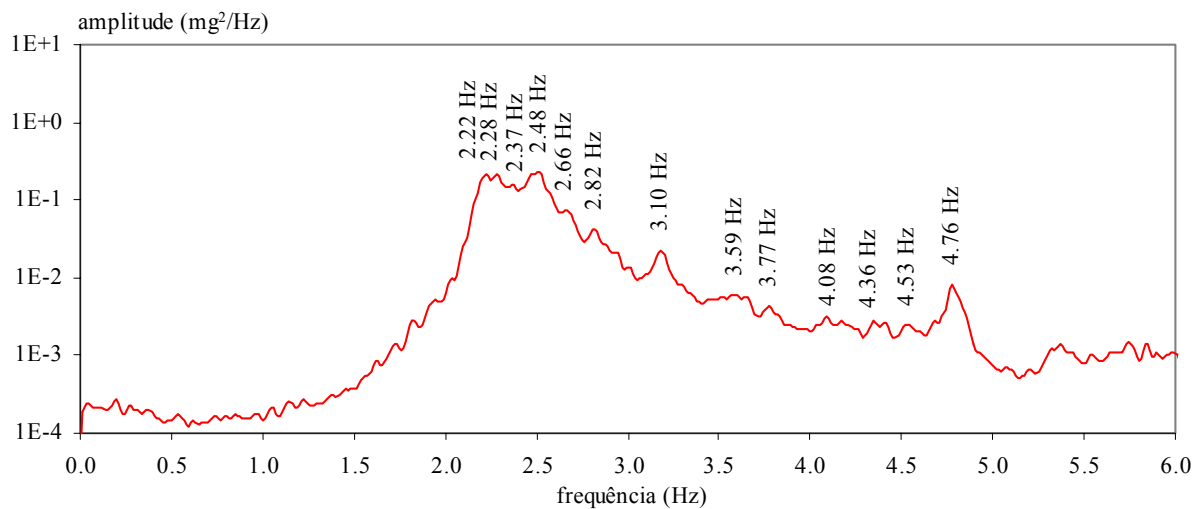


Figura 6.52 – ANPSD dos registos verticais na estrutura da 1ª fase (ensaio com camiões).

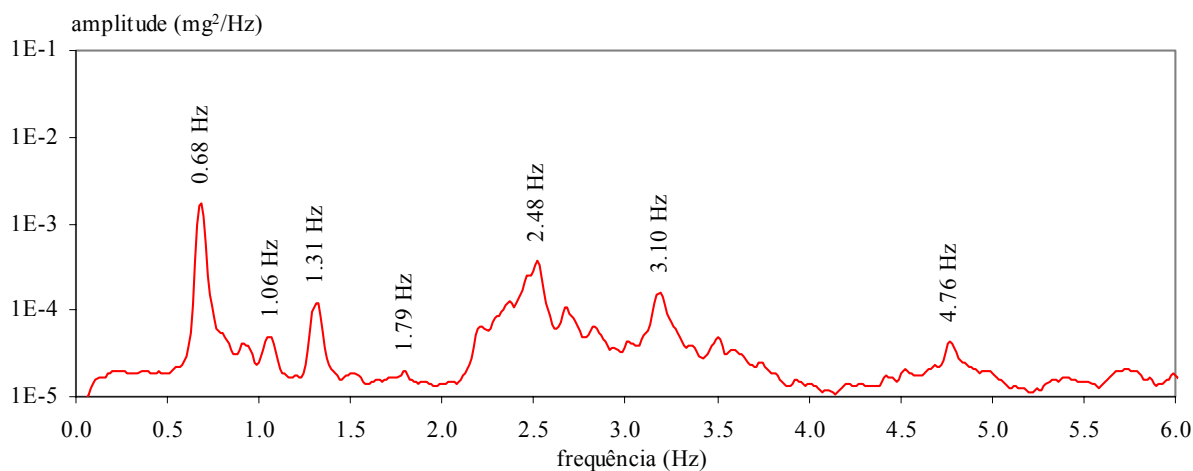


Figura 6.53 – ANPSD dos registos transversais na estrutura da 1ª fase (ensaio com camiões).

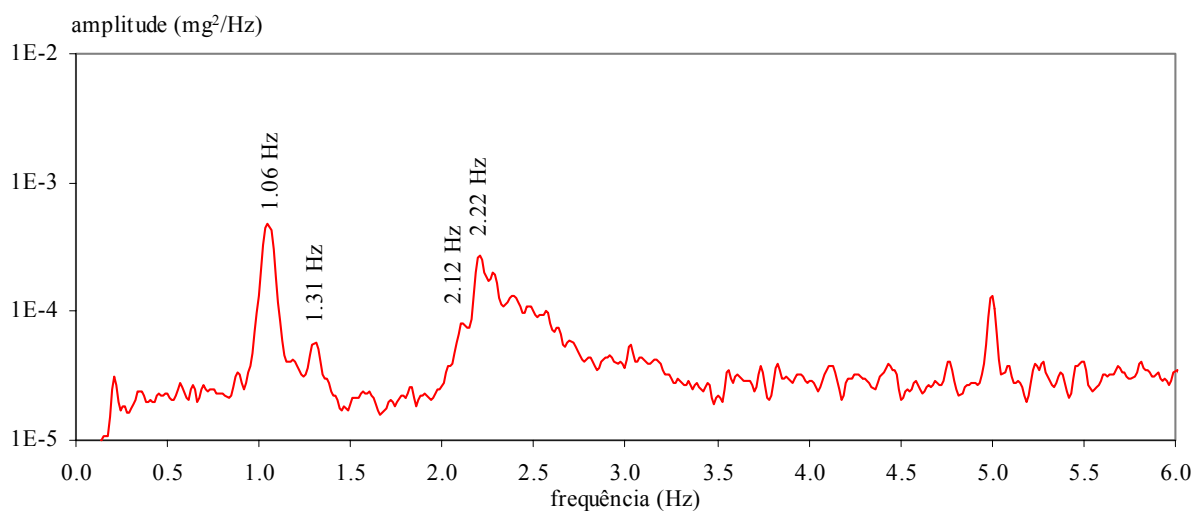


Figura 6.54 – ANPSD dos registos longitudinais na estrutura da 1ª fase (ensaio com camiões).

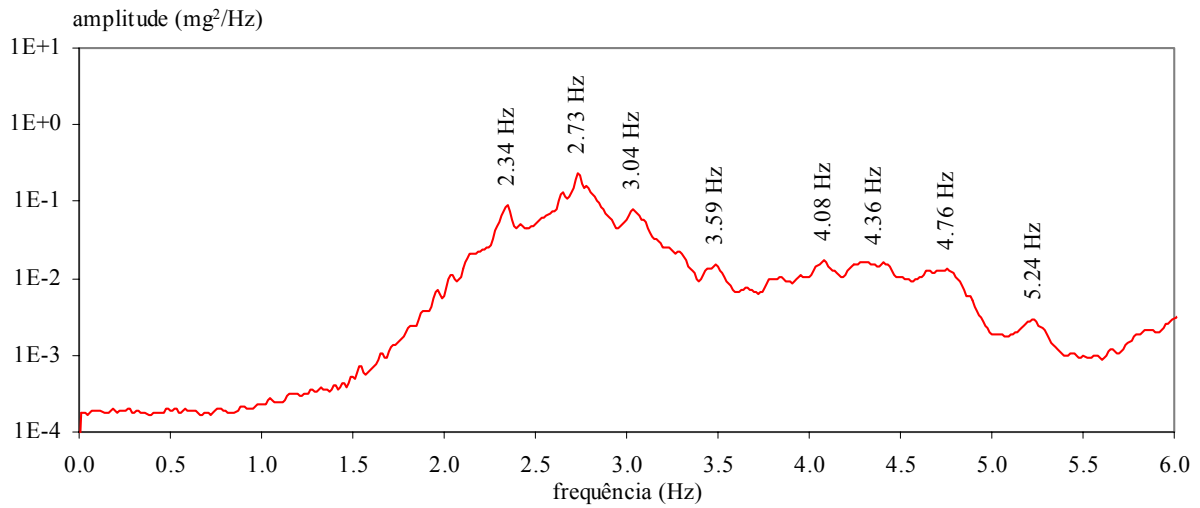


Figura 6.55 – ANPSD dos registos verticais na estrutura da 2ª fase (ensaio com camiões).

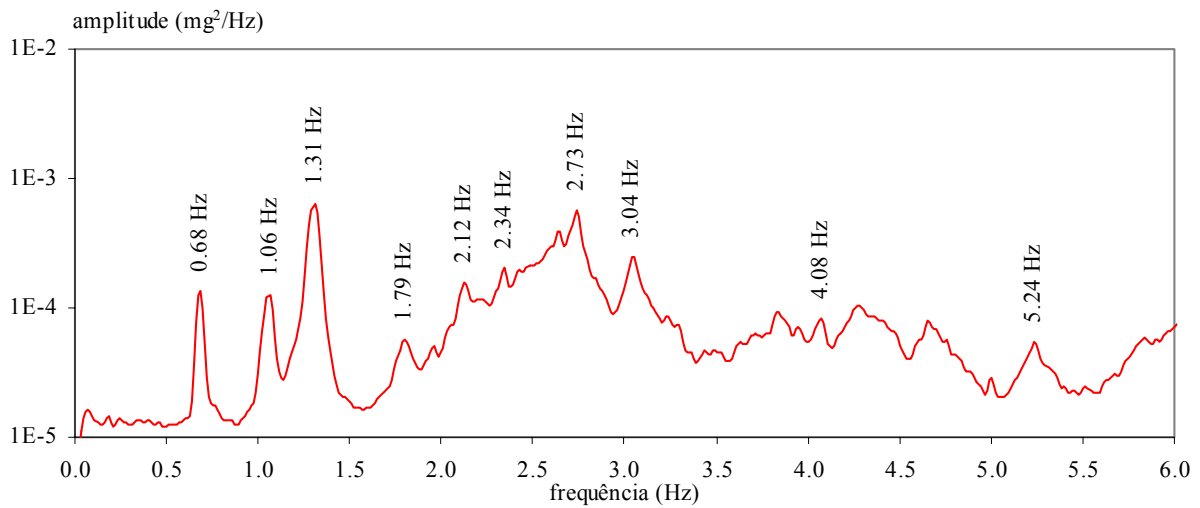


Figura 6.56 – ANPSD dos registos transversais na estrutura da 2ª fase (ensaio com camiões).

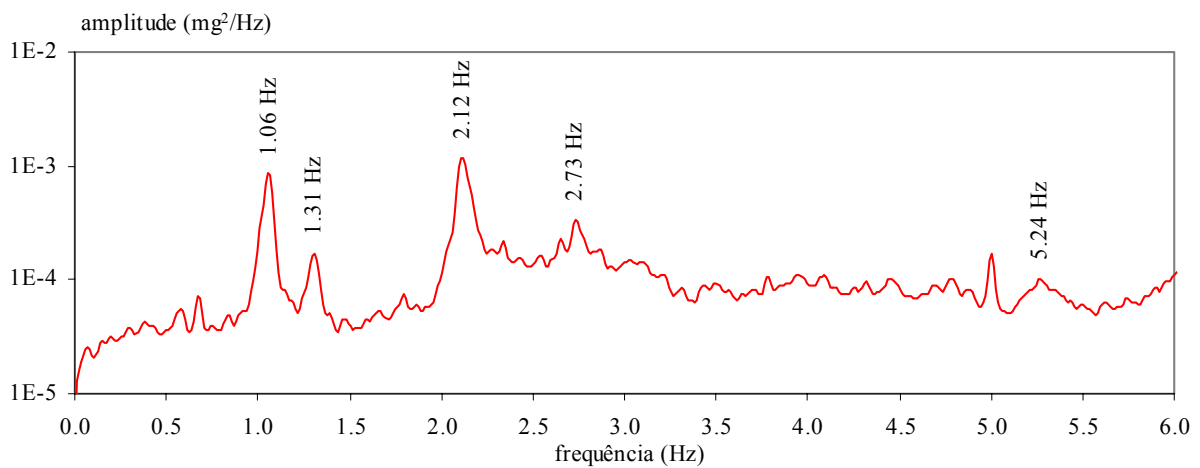


Figura 6.57 – ANPSD dos registos longitudinais na estrutura da 2ª fase (ensaio com camiões).

Nas figuras 6.58 a 6.61 representam-se graficamente as componentes modais (na direcção vertical) avaliadas nos pontos instrumentados, para as frequências de 2,22 Hz, 2,34 Hz, 2,73 Hz e 3,04 Hz, identificadas nos espectros dos registos verticais. Nessas representações incluiu-se também a informação obtida com os ensaios de libertação repentina dum peso de 608 kN, para aumentar a malha de pontos instrumentados e assim melhorar a representação gráfica das configurações modais. A primeira figura, relativa à frequência de 2,22 Hz refere-se, conforme indicado através da designação dos pórticos transversais, à zona observada nos ensaios da estrutura da 1ª fase, enquanto que as outras figuras referem-se à zona ensaiada da estrutura da 2ª fase.

Nas outras frequências de ressonância (para além das 4 indicadas no parágrafo anterior) dos espectros dos registos obtidos na direcção vertical, não foi possível obter um traçado gráfico claro das configurações dos correspondentes modos de vibração. Saliente-se que devido às características da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira, nomeadamente o facto de ser uma estrutura contínua com um grande número de vãos a que acresce o facto de ter uma largura grande (178 m), há um número considerável de modos de vibração verticais com frequências muito próximas (o que dificultou muito a identificação das suas características). Esta proximidade entre as frequências dos modos de vibração verticais foi também verificada no modelo de elementos finitos que será apresentado mais adiante.

Nas figuras 6.58 a 6.61 os pontos a vermelho representam as componentes modais avaliadas nos pontos instrumentados e também nos pontos sobre os pilares onde se assumiu que as componentes verticais são nulas. A superfície a cinzento representada nessas figuras, resulta do ajuste duma *spline* bi-dimensional aos pontos a vermelho. Essas figuras estão subdivididas em duas partes; na parte do lado esquerdo representa-se a configuração entre os alinhamentos 3 e 4 e entre os pórticos que limitam as zonas instrumentadas; na parte do lado direito representa-se a configuração entre os alinhamentos 1 e 6 e entre os pórticos que limitam as zonas que foram instrumentadas em toda a largura da estrutura.

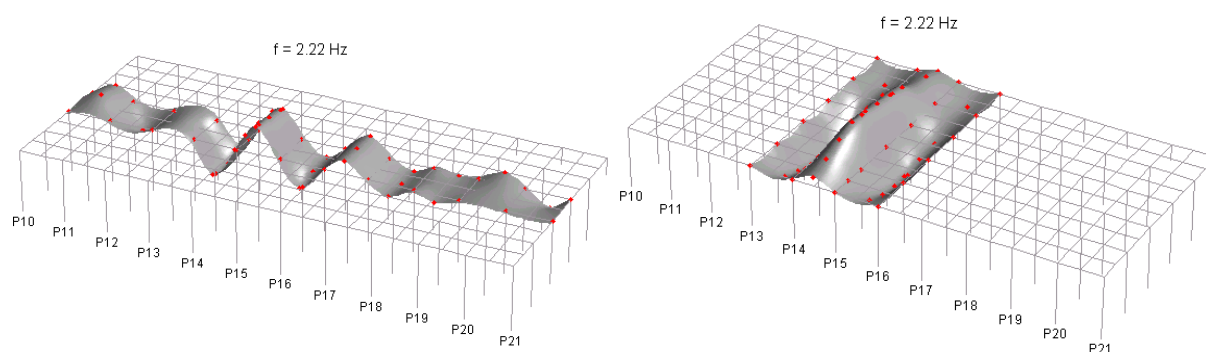


Figura 6.58 – Configuração identificada para a frequência de 2,22 Hz (modo vertical).

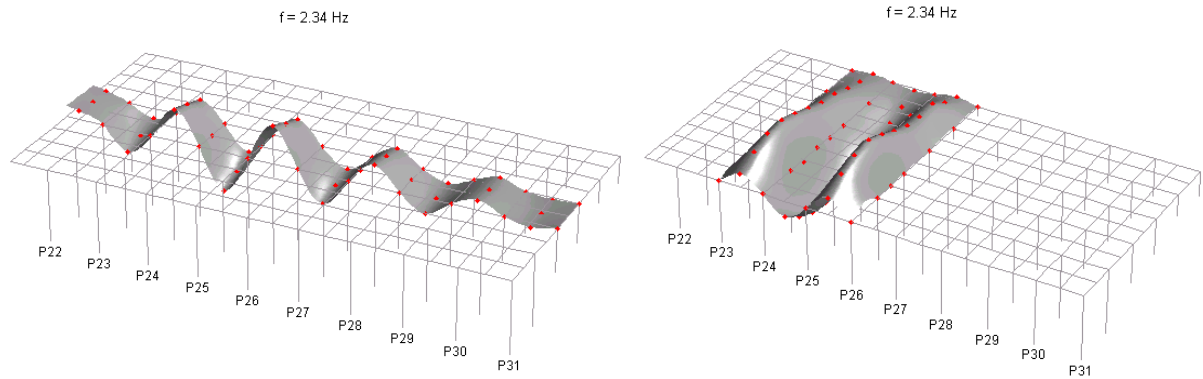


Figura 6.59 – Configuração identificada para a frequência de 2,34 Hz (modo vertical).

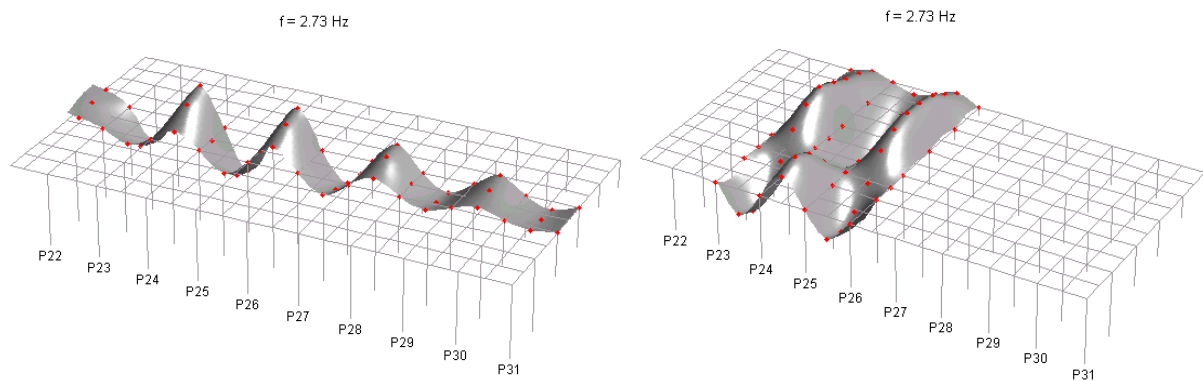


Figura 6.60 – Configuração identificada para a frequência de 2,73 Hz (modo vertical).

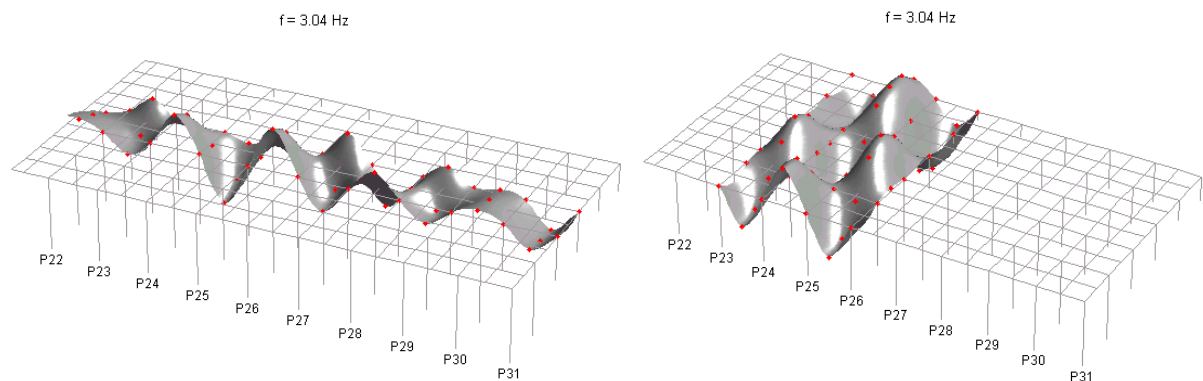


Figura 6.61 – Configuração identificada para a frequência de 3,04 Hz (modo vertical).

Apesar da dificuldade em identificar configurações, para além das apresentada nas figuras 6.58 a 6.61, que indiquem claramente que as frequências dos restantes picos de ressonância correspondem a modos naturais de vibração da estrutura, verifica-se que em várias dessas ressonâncias obtiveram-se, em diversos pontos, valores da função de coerência que indiciam que elas correspondem também a modos naturais de vibração da estrutura. Os valores dessas frequências estão indicados nos espectros das figuras 6.52 a 6.57 e são também indicados no quadro 6.17, onde se resumem as características dinâmicas identificadas para a estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.

Em relação aos modos de vibração com componentes fundamentalmente horizontais (modos transversais e longitudinais), a malha de pontos instrumentados nessas direcções não foi muito extensa pelo que não foi possível fazer um traçado global em toda a estrutura das configurações desses modos de vibração. Assim, com base, fundamentalmente, na análise dos valores da função de coerência nas frequências dos picos de ressonância mais evidentes, concluiu-se que as frequências indicadas em seguida correspondem a modos naturais de vibração da estrutura:

- modos fundamentalmente transversais: 0,68 Hz, 1,31 Hz e 1,79 Hz;
- modos fundamentalmente longitudinais: 1,06 Hz e 2,12 Hz.

É de salientar que estas frequências de modos transversais e longitudinais, surgem nos espectros avaliados com os registos obtidos em ambas as estruturas (1ª fase e 2ª fase), o que leva a depreender que estes modos envolvem movimentos de conjunto das estruturas de ambas as fases. Note-se que nos ensaios com circulação de camiões, as vibrações medidas nas direcções horizontais nas cinco frequências acima indicadas, têm amplitudes muito pequenas, com valores máximos de cerca de 90 μg , situação em que é verosímil que exista compatibilidade de deslocamentos horizontais na junta estrutural entre as estruturas das duas fases.

Análise dos registos obtidos nos ensaios de libertação dum peso de 608 kN:

A análise dos registos de aceleração obtidos nos ensaios de libertação repentina dum peso de 608 kN teve como principal objectivo a avaliação das frequências e dos coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração da estrutura. Os registos obtidos nestes ensaios foram analisados com o método BFD, para avaliação das componentes modais nos pontos onde a resposta foi observada, complementando as componentes modais avaliadas a partir dos registos dos ensaios com circulação de camiões (conforme referido anteriormente). As respostas medidas nos ensaios de libertação repentina dum peso de 608 kN foram também utilizadas para estimar os coeficientes de amortecimento, através do ajuste duma função exponencial aos registos da resposta em regime livre, filtrados com um filtro passa-banda em torno das frequências dos modos de vibração identificados.

Antes da aplicação dos métodos de análise utilizados, todos os registos de aceleração obtidos nos ensaios de libertação repentina dum peso de 608 kN foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-baixo com frequência de corte de 20 Hz e utilizando um filtro de tipo Butterworth de ordem 4.

Na figura 6.62 apresentam-se, numa representação em perspectiva, os registos de acelerações verticais (após as operações de pré-processamento acima referidas), obtidos no ensaio de libertação dum peso de 608 kN, efectuado na estrutura da 2ª fase.

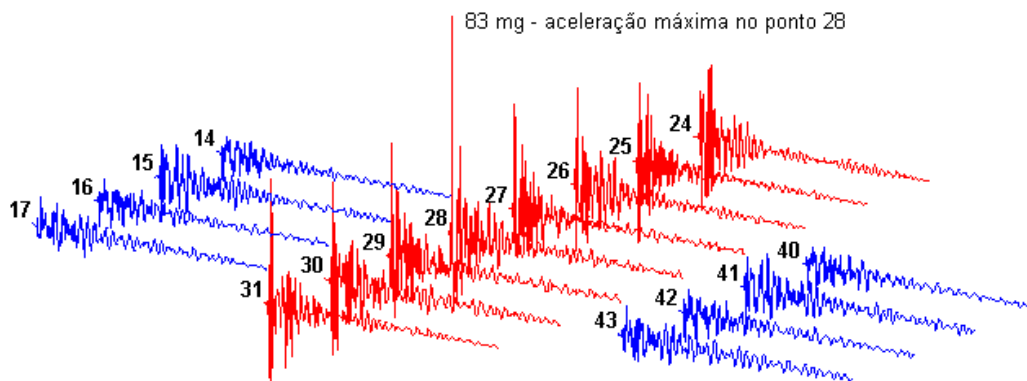


Figura 6.62 – Acelerações verticais no ensaio de libertação dum peso efectuado na estrutura da 2ª fase.

Nas figuras 6.63 a 6.65 apresentam-se os espectros médios das acelerações verticais registadas nos ensaios de libertação dum peso de 608 kN. Nessas figuras indicam-se também os valores das frequências correspondentes aos picos de ressonância mais evidentes.

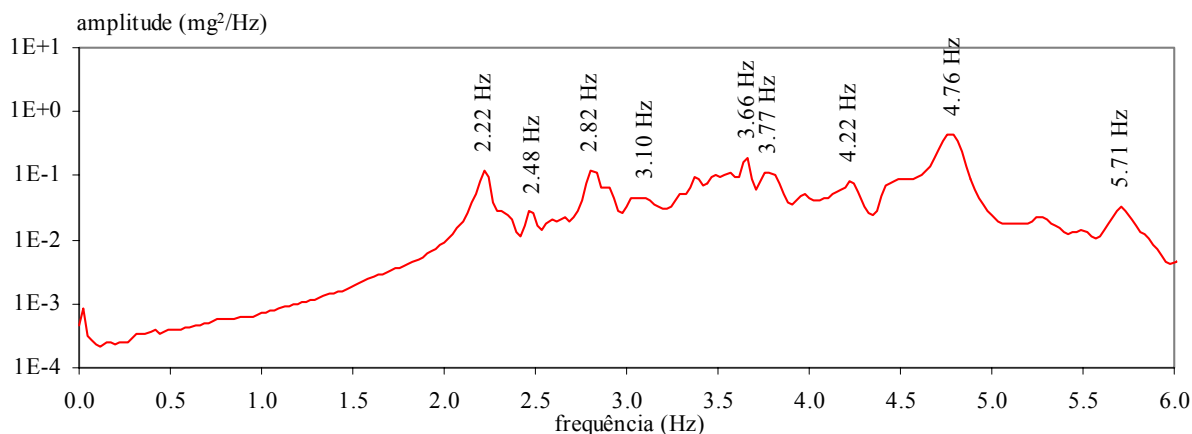


Figura 6.63 – Espectro médio dos registos verticais na estrutura da 1ª fase (1º ensaio de libertação dum peso).

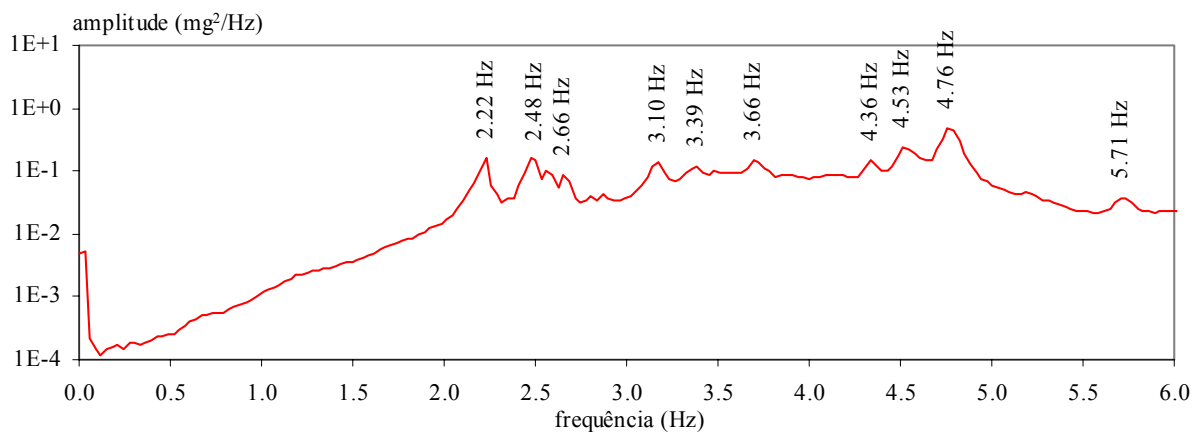


Figura 6.64 – Espectro médio dos registos verticais na estrutura da 1ª fase (2º ensaio de libertação dum peso).

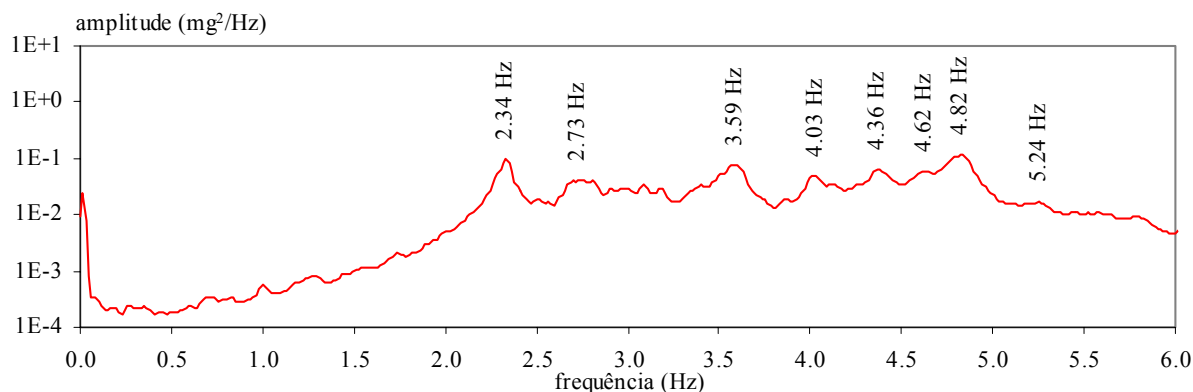


Figura 6.65 – Espectro médio dos registos verticais na estrutura da 2ª fase (ensaio de libertação dum peso).

Analisando os espectros calculados com os registos dos ensaios de libertação dum peso de 608 kN, confirmaram-se as frequências dos modos de vibração já identificados com os ensaios com circulação de camiões e identificaram-se mais algumas frequências de modos que foram mais excitados, tornando-se mais evidentes nesses espectros.

Na figura 6.66 ilustra-se o método utilizado para avaliar os coeficientes de amortecimento.

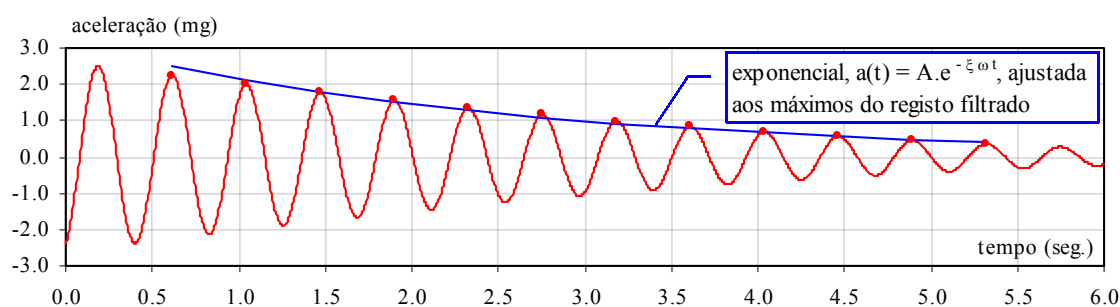


Figura 6.66 – Avaliação do coeficiente de amortecimento do modo vertical com frequência de 2,34 Hz.

No quadro 6.17 resumem-se as características dinâmicas identificadas experimentalmente para a estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira (incluindo-se a informação obtida nos ensaios realizados nas estruturas da 1ª fase e da 2ª fase).

Quadro 6.17 – Características dinâmicas identificadas para a estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.

Modos verticais					
f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)
2,22	2,8	3,04	1,7	4,22	1,1
2,28	3,3	3,10	1,3	4,36	1,8
2,34	2,9	3,39	1,3	4,53	1,2
2,37	3,6	3,59	3,2	4,62	1,5
2,48	2,5	3,66	1,2	4,76	1,6
2,66	2,5	3,77	1,1	4,82	1,5
2,73	1,9	4,03	1,9	5,24	1,2
2,82	1,6	4,08	1,9	5,71	1,0

Modos transversais	
f (Hz)	ξ (%)
0,68	5,8
1,31	4,7
1,79	2,7

Modos longitudinais	
f (Hz)	ξ (%)
1,06	4,7
2,12	2,5

Comparação com um modelo de elementos finitos:

Adicionalmente ao estudo de caracterização dinâmica experimental, foi também desenvolvido um modelo de elementos finitos da estrutura de ampliação do aeroporto da ilha da Madeira. As frequências e configurações modais calculadas com este modelo foram um elemento importante para a interpretação dos resultados experimentais.

O modelo elaborado é um modelo espacial (ver figura 6.67) que inclui as estruturas de ambas as fases interligadas na junta estrutural através de elementos de ligação. A opção por elaborar um modelo que inclui as estruturas de ambas as fases deveu-se fundamentalmente ao facto, salientado anteriormente, de se terem identificado as mesmas frequências de modos transversais e longitudinais, quer com os registos obtidos na estrutura da 1ª fase quer com os obtidos na estrutura da 2ª fase.

O modelo tem 293 elementos de barra, 16955 elementos de casca, 226 elementos de mola e 57 elementos de ligação. No modelo são ainda definidas 2847 relações de dependência entre os graus de liberdade de alguns nós, resultando num total de 107282 graus de liberdade.

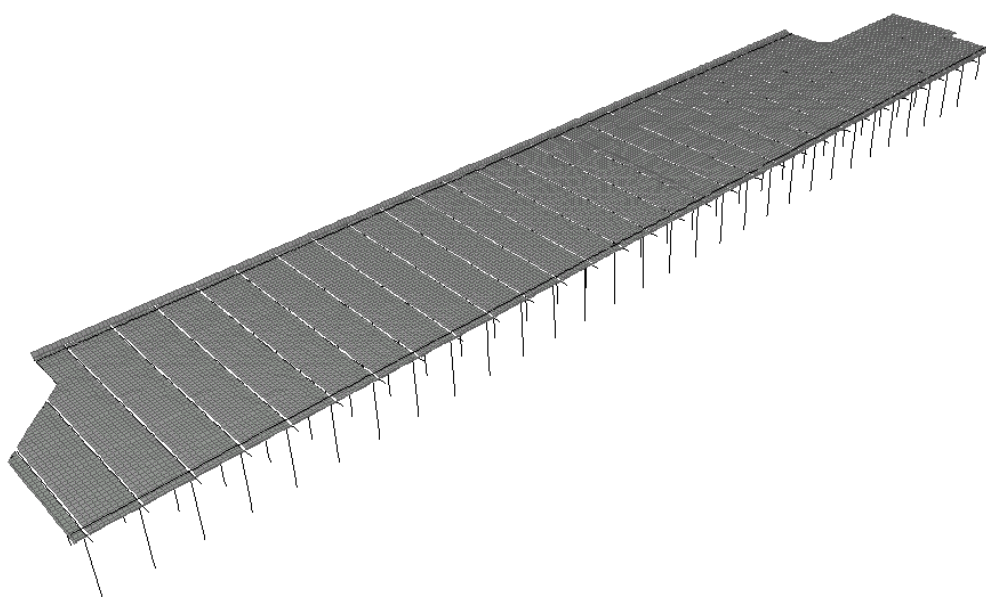


Figura 6.67 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira.

As características consideradas no modelo de elementos finitos, nomeadamente o módulo de elasticidade dos materiais e a rigidez nas fundações dos pilares e em outros pontos de apoio, foram definidas tendo em conta a informação disponível sobre o betão aplicado em obra e ainda de modo a que as frequências calculadas se aproximassem das identificadas experimentalmente.

Nas figuras 6.68 a 6.70 representam-se, numa vista em planta, as configurações calculadas com o modelo de elementos finitos, correspondentes aos 3 primeiros modos transversais, indicando-se também as respectivas frequências.

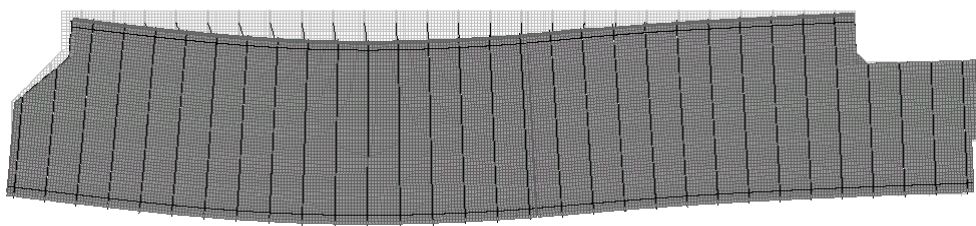


Figura 6.68 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 0,68 Hz.

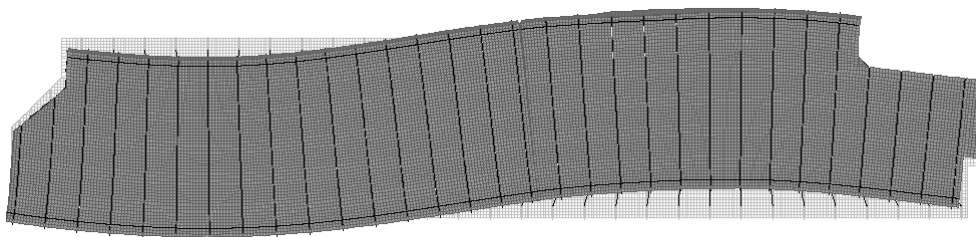


Figura 6.69 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 1,24 Hz.

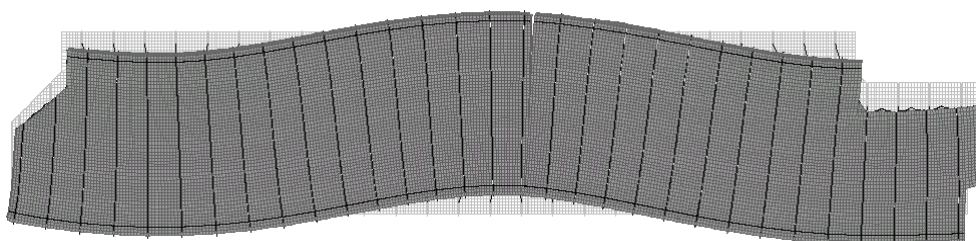


Figura 6.70 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 1,70 Hz.

Nas figuras 6.71 e 6.72 representam-se, numa vista em alçado, as configurações calculadas com o modelo de elementos finitos, correspondentes aos 2 primeiros modos longitudinais, indicando-se também as respectivas frequências.



Figura 6.71 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 1,07 Hz.



Figura 6.72 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,12 Hz.

Nas figuras 6.73 a 6.81 representam-se as configurações calculadas, com o modelo de elementos finitos, dos modos verticais que se considera que correspondem a modos verticais identificados experimentalmente, indicando-se também as respectivas frequências.

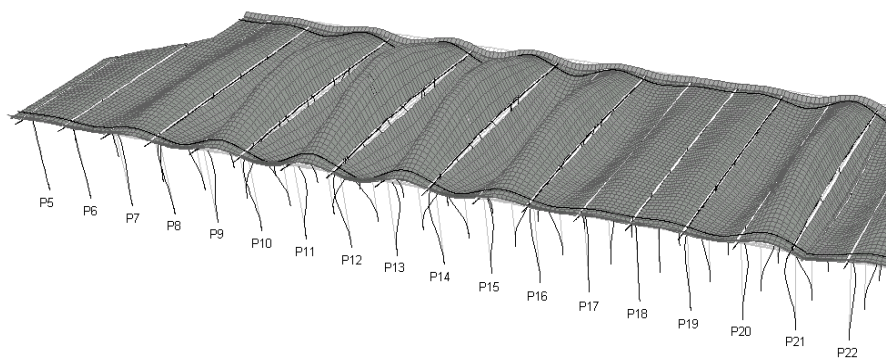


Figura 6.73 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,23 Hz.

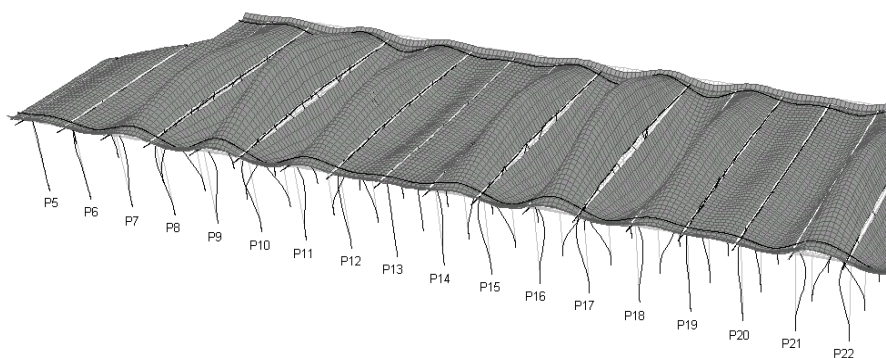


Figura 6.74 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,31 Hz.

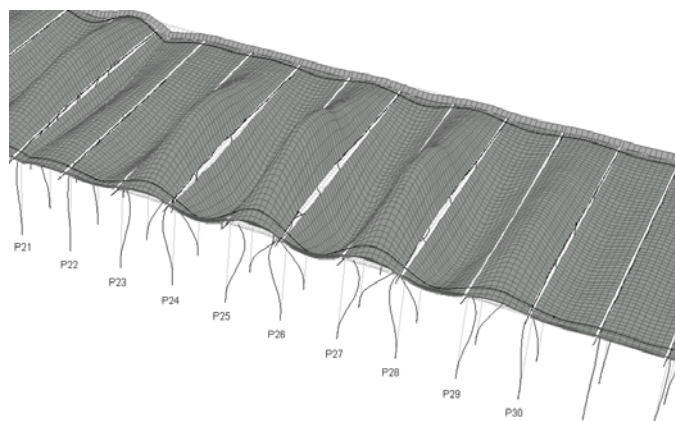


Figura 6.75 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,35 Hz.

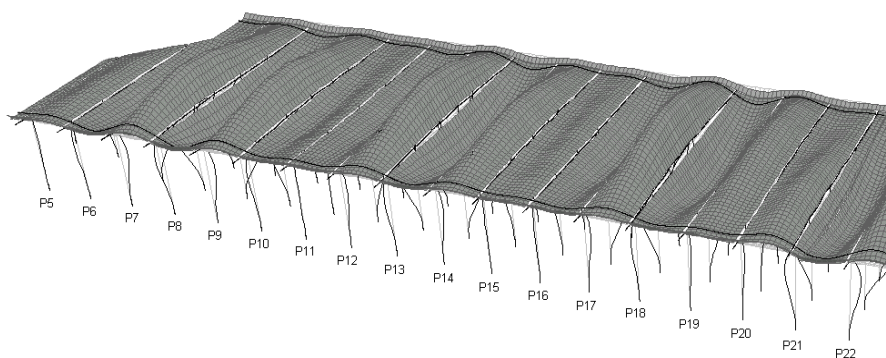


Figura 6.76 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,44 Hz.

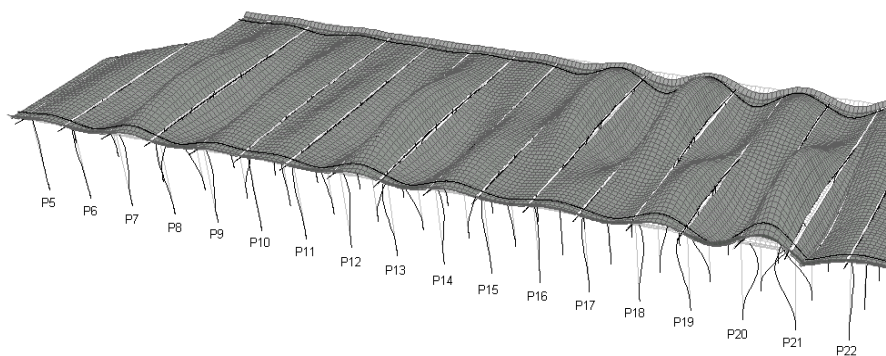


Figura 6.77 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,49 Hz.

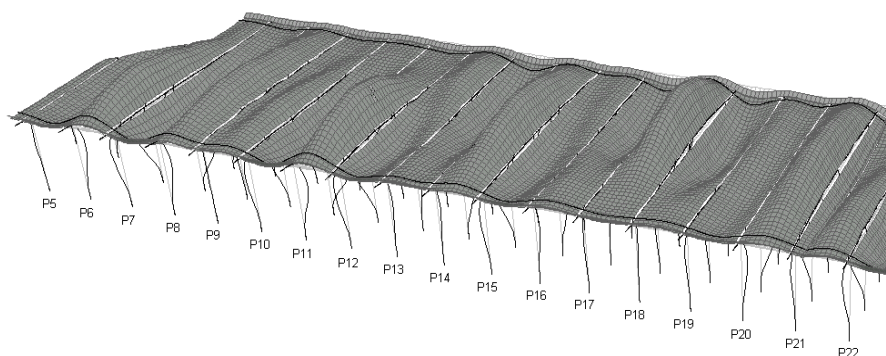


Figura 6.78 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,65 Hz.

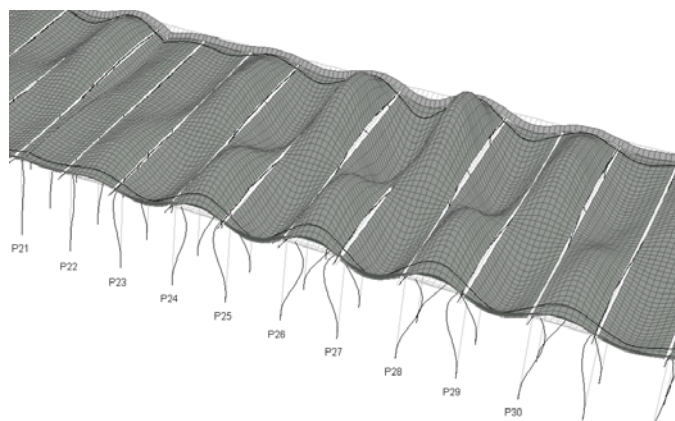


Figura 6.79 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,67 Hz.

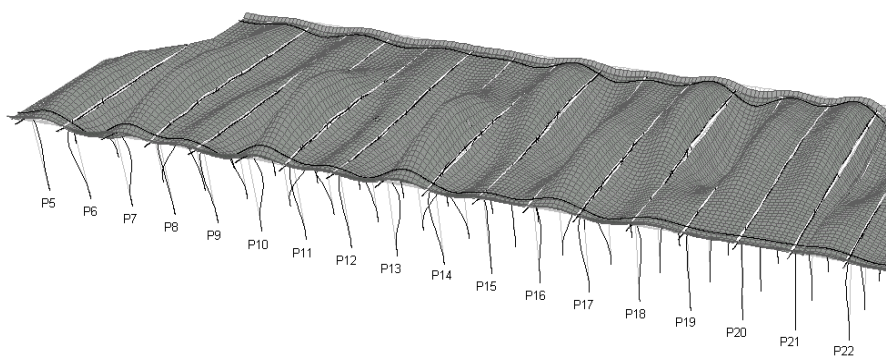


Figura 6.80 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 2,80 Hz.

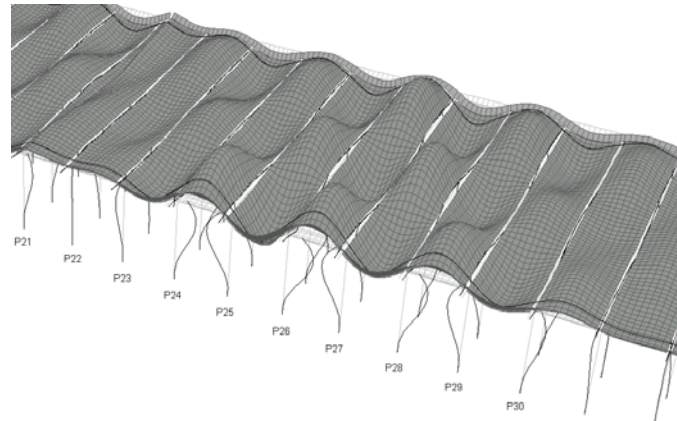


Figura 6.81 – Configuração calculada com o modelo para a frequência de 3,05 Hz.

Um dos aspectos, já referido, que se verificou com o modelo de elementos finitos, foi de facto a existência de modos verticais com frequências muito próximas. Por exemplo, na gama de frequências entre os 2,0 Hz até aos 4,5 Hz, determinaram-se 140 modos de vibração verticais.

No quadro 6.18 e na figura 6.82 comparam-se as frequências identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos para os correspondentes modos de vibração.

Quadro 6.18 – Frequências experimentais e calculadas com o modelo.

Modos verticais, f (Hz)		Modos transversais, f (Hz)		Modos longitudinais, f (Hz)	
experimental	modelo	experimental	modelo	experimental	modelo
2,22	2,23	0,68	0,68	1,06	1,07
2,28	2,31	1,31	1,24	2,12	2,12
2,34	2,35	1,79	1,70		
2,37	2,44				
2,48	2,49				
2,66	2,65				
2,73	2,67				
2,82	2,80				
3,04	3,05				

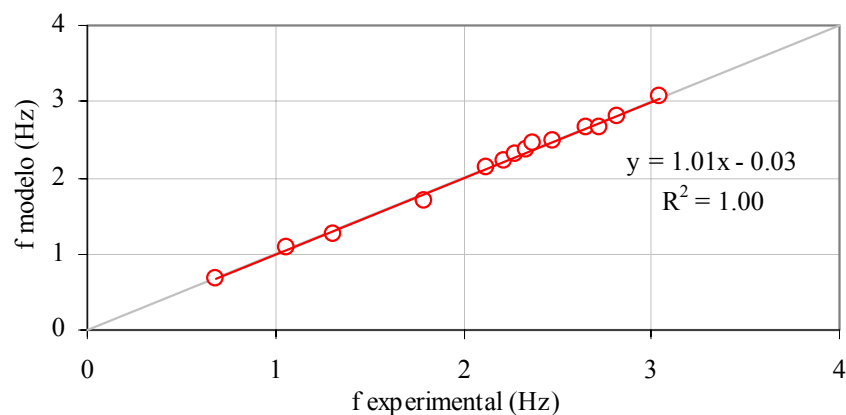


Figura 6.82 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.

No modelo de elementos finitos desenvolvido para a estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira foram incluídos elementos de casca para modelar as palas laterais de segurança e elementos de barra para modelar os muretes laterais para-rodas. A inclusão destes elementos deveu-se ao facto de se ter constatado que eles conferem alguma rigidez vertical adicional ao longo dos bordos laterais da estrutura, tendo influência nas configurações calculadas para os modos verticais, que assim ficam mais próximas das avaliadas experimentalmente. Pode-se verificar este facto nas figuras 6.83 e 6.84, onde se representam as componentes modais para os modos verticais com frequências de 2,22 Hz e 2,34 Hz, num corte transversal a $\frac{1}{2}$ vão entre os pórticos, respectivamente, P14 e P15 (figura 6.83) e P24 e P25 (figura 6.84).

No gráfico superior das figuras 6.83 e 6.84 comparam-se as componentes modais avaliadas experimentalmente com as calculadas com um modelo de elementos finitos que não inclui a pala lateral de segurança nem o murete para-rodas, enquanto que no gráfico inferior as componentes experimentais são comparadas com as calculadas com o modelo onde estão incluídos a pala lateral de segurança e o murete para-rodas. Como se pode verificar, no segundo caso a aproximação entre as componentes calculadas e as avaliadas experimentalmente é muito melhor.

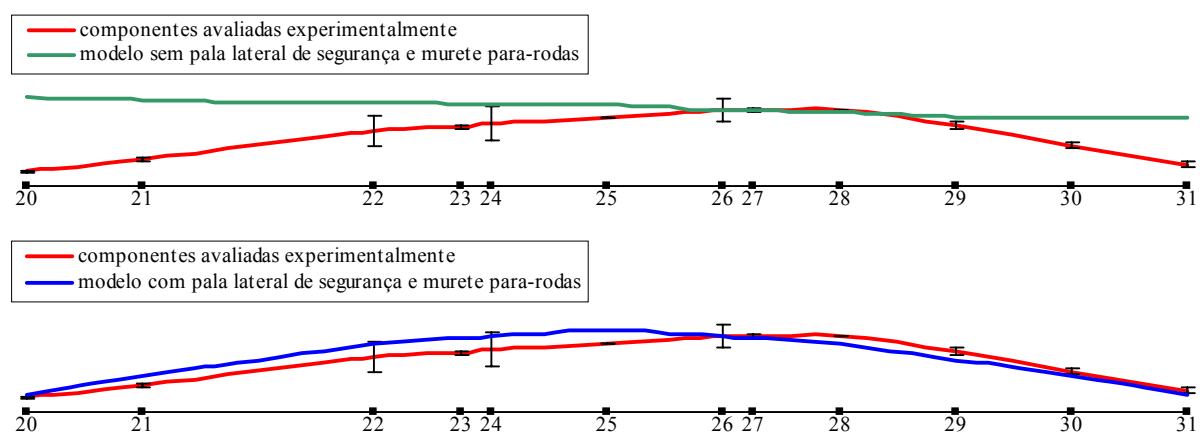


Figura 6.83 – Componentes modais a $\frac{1}{2}$ vão entre os pórticos P14 e P15 para o modo vertical com 2,22 Hz.

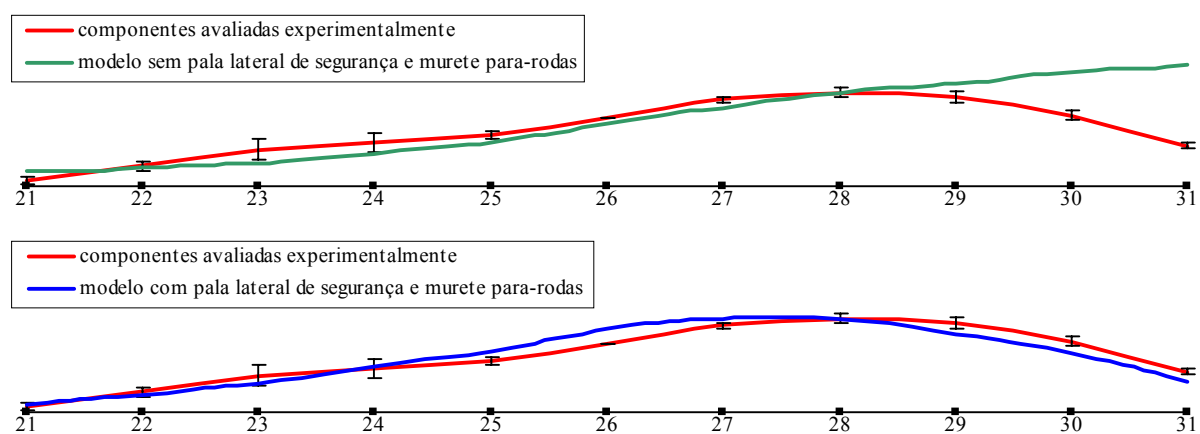


Figura 6.84 – Componentes modais a $\frac{1}{2}$ vão entre os pórticos P24 e P25 para o modo vertical com 2,34 Hz.

Considerações finais:

Através dos ensaios de caracterização dinâmica realizados na estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira, avaliaram-se:

- Os valores de 29 frequências de modos de vibração globais da estrutura;
- As configurações de 4 modos verticais, nas zonas da estrutura observadas nos ensaios;
- Os coeficientes de amortecimento dos 29 modos de vibração globais da estrutura.

As características dinâmicas identificadas experimentalmente foram também comparadas com as avaliadas com um modelo de elementos finitos, tendo-se verificado uma boa concordância entre as frequências e configurações modais calculadas e as avaliadas experimentalmente.

Verificou-se que dadas as características da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira, a avaliação experimental das suas propriedades dinâmicas é uma tarefa difícil, especialmente devido à proximidade entre as frequências dos modos de vibração verticais. Considera-se assim que, em cada ensaio, dever-se-iam ter obtido registos com uma duração superior àquela que foi adoptada. Também teria sido melhor ter efectuado mais ensaios, de modo a observar a resposta da estrutura num maior número de pontos, o que facilitaria a identificação das configurações de mais modos de vibração, para além daqueles para os quais foi possível identificá-las.

As características dinâmicas avaliadas experimentalmente são um contributo importante para a caracterização global do comportamento e do estado da estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira, após as obras de construção e antes do início da sua utilização para o tráfego de aviões.

Está previsto que se venha a instalar na estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira um sistema de instrumentação dinâmica para acompanhar as características dinâmicas da estrutura ao longo da sua vida e caracterizar a acção do tráfego de aviões e os seus efeitos dinâmicos na estrutura. A informação obtida com os ensaios de caracterização dinâmica efectuados, bem como o modelo de elementos finitos que foi desenvolvido, serão importantes para analisar a informação que será obtida com esse sistema de monitorização, nomeadamente:

- as características dinâmicas identificadas nos ensaios constituem uma situação de referência para o seu acompanhamento ao longo do tempo;
- os efeitos medidos da libertação repentina do peso de 608 kN ajudarão a caracterizar e quantificar os efeitos das aterragens e decolagens dos aviões;
- o modelo de elementos finitos poderá ser utilizado para efectuar estudos de modelação analítica da aterragem e decolagem de aeronaves, podendo-se calibrar os resultados dos mesmos com os efeitos observados com o sistema de monitorização.

6.2.6 Ponte Salgueiro Maia sobre o rio Tejo em Santarém

Considerações gerais:

O estudo de caracterização dinâmica experimental da ponte Salgueiro Maia sobre o rio Tejo em Santarém (LNEC – Rodrigues, 2000) foi desenvolvido no âmbito dos ensaios de recepção dessa estrutura, realizados pelo LNEC no fim da construção dessa obra e antes da sua abertura ao tráfego.

O estudo efectuado teve como objectivo a avaliação das propriedades dinâmicas da estrutura, nomeadamente das frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos seus modos naturais de vibração. Efectuaram-se assim ensaios de medição da resposta em aceleração da estrutura, sob os efeitos da acção do tráfego de camiões carregados (os mesmos que foram utilizados nos ensaios de carga estáticos) e também da acção do vento. Este estudo foi apresentado numa conferência internacional (Rodrigues, 2001) e numa conferência nacional (Rodrigues, 2002).

Breve descrição da ponte Salgueiro Maia:

A ponte Salgueiro Maia sobre o rio Tejo, em Santarém, integra-se num troço do IC10. Esta ponte, projectada pelo Eng.º Cândio Martins (Cândio Martins, 2000) tem um comprimento total de 570 m, dos quais 480 m são atirantados. A zona atirantada tem um vão central de 246 m e vãos laterais contíguos de 78 m e 42 m. Há ainda dois vãos laterais extremos não atirantados, cada um com 40,5 m de comprimento. Nos vãos laterais, o tabuleiro apoia-se em pilares intermédios. Na figura 6.85 apresenta-se um corte longitudinal da ponte Salgueiro Maia.

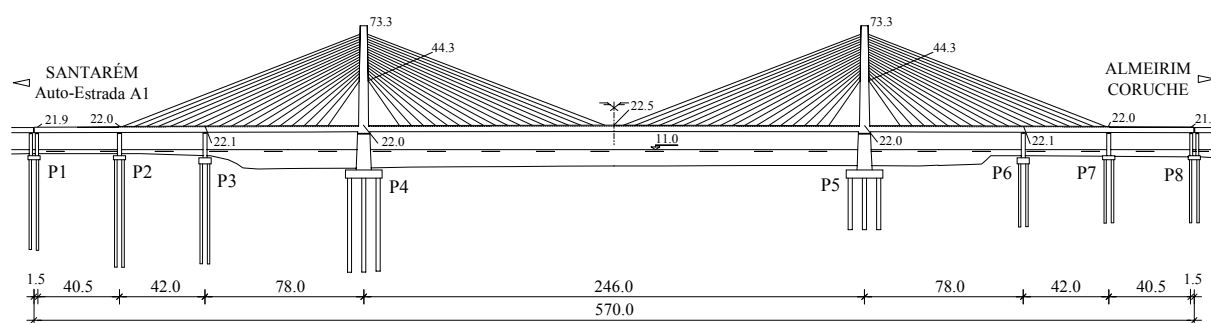


Figura 6.85 – Corte longitudinal da ponte Salgueiro Maia.

Os dois mastros, que suspendem o tabuleiro da ponte no seu eixo, são monolíticos com o próprio tabuleiro. Estes mastros têm 50 m de altura acima do tabuleiro e são de betão armado até ao nível da cota dos primeiros tirantes e a partir desse nível até ao topo são em estrutura mista aço-betão. Os 72 tirantes que suspendem o tabuleiro têm uma disposição em semi-harpa.

O tabuleiro da ponte é de betão armado pré-esforçado. Tem uma largura de 28,2 m e é formado por uma viga caixão de forma rectangular com dimensões exteriores de 10,0 m por 2,5 m, completada com o prolongamento da laje superior do caixão e com a introdução de escoras de betão pré-fabricadas que actuam em conjunto com a referida laje.

Na zona de ligação dos mastros ao tabuleiro, este é rigidificado através de uma robusta carlinga que por sua vez se apoia nos pilares através de um conjunto de 20 aparelhos de apoio de neoprene de elevado amortecimento (HDRB), que constituem um sistema de isolamento sísmico da superestrutura da ponte (Marioti e Duarte, 1999).

Na figura 6.86 apresentam-se algumas vistas gerais da ponte Salgueiro Maia.



Figura 6.86 – Vistas gerais da ponte Salgueiro Maia.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios de caracterização dinâmica da ponte Salgueiro Maia utilizou-se o seguinte equipamento (cujas características foram já descritas no capítulo 3):

- 15 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo ES-U da Kinematics;

- 5 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;
- sistema de aquisição de dados SCXI-1200 com conversão analógica/digital a 12 bits e um chassis SCXI-1000DC de 24 canais;
- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição;
- 5 macro-sismógrafos GSR-16;
- 2 computadores portáteis.

O sistema de medição de acelerações, constituído pelos acelerómetros ES-U, unidades de alimentação e condicionamento, sistema de aquisição e computador portátil, foi utilizado com uma configuração que permitiu discretizar uma amplitude mínima de aceleração de $19,5 \mu\text{g}$. Por seu lado, os macro-sismógrafos GSR-16 foram utilizados na sua configuração de maior sensibilidade, com capacidade de discretização de uma amplitude mínima de aceleração de $15,3 \mu\text{g}$.

Nos ensaios efectuados na ponte Salgueiro Maia, foi a primeira vez em que houve oportunidade de utilizar os acelerómetros ES-U da *Kinematics*. Embora nesses ensaios, ainda não se tenha explorado toda a capacidade desses acelerómetros, o que só foi feito em ensaios realizados posteriormente noutras estruturas, os resultados obtidos na ponte Salgueiro Maia foram bastante positivos, conforme se verá adiante.

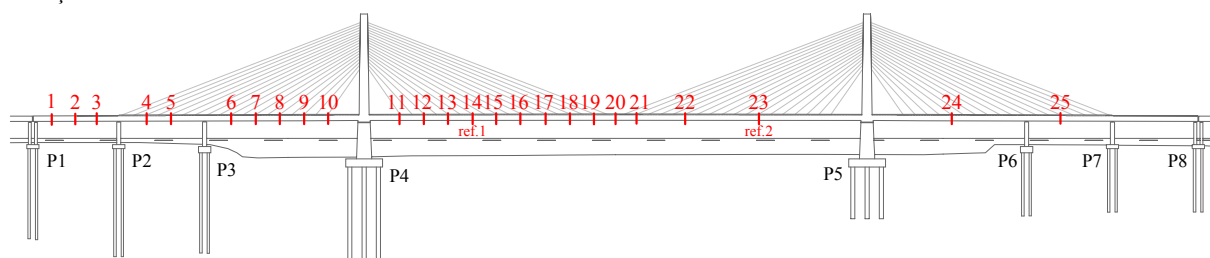
Os ensaios foram efectuados utilizando uma técnica semelhante à adoptada nos ensaios de outras estruturas, tendo-se escolhido uma secção de referência (com base numa análise prévia com um modelo de elementos finitos e de modo a evitar escolher um nodo dos principais modos de vibração) onde se colocaram transdutores que aí permaneceram em todos os ensaios, enquanto que os restantes foram sendo colocados em diversas secções ao longo da estrutura.

Ao escolher as secções a instrumentar, teve-se em conta a simetria da estrutura, de modo que definiu-se uma malha mais refinada num dos lados da ponte (o lado de Santarém) enquanto que no lado de Almeirim considerou-se uma malha mais larga, correspondente a apenas um ensaio para confirmação da simetria do funcionamento da estrutura.

Os acelerómetros ES-U foram utilizados para instrumentar 25 secções do tabuleiro e os macro-sismógrafos GSR-16 foram utilizados para instrumentar as 8 secções do tabuleiro sobre os pilares e ainda o topo dos dois mastros (ver figura 6.87). Com os acelerómetros ES-U efectuaram-se 8 ensaios (correspondentes a colocações diferentes dos transdutores na estrutura) e com os macro-sismógrafos GSR-16 foram efectuados apenas 4 ensaios.

No quadro 6.19 indicam-se as secções instrumentadas em cada ensaio.

Secções instrumentadas com os acelerómetros ES-U



Secções instrumentadas com os macro-sismógrafos GSR-16

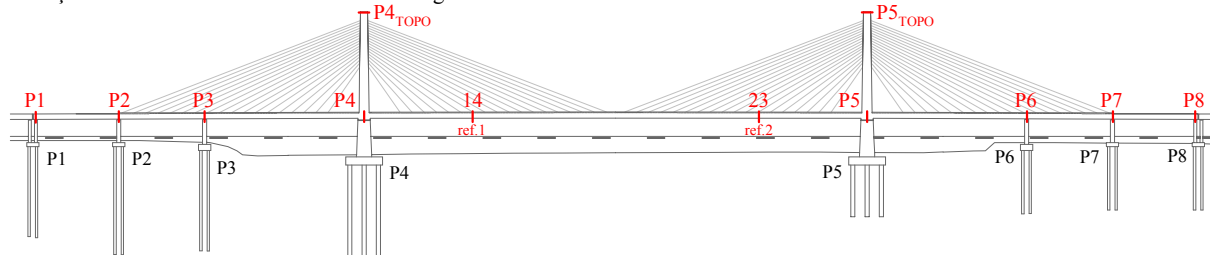


Figura 6.87 – Secções instrumentadas nos ensaios da ponte Salgueiro Maia.

Quadro 6.19 – Secções instrumentadas em cada ensaio.

ensaio com os acelerómetros ES-U (cada unidade está ligada a 3 acelerómetros)					
ensaio	unidade 1	unidade 2	unidade 3	unidade 4	unidade 5
0	25	21	22	23	24
1	1	6	11	14	17
2	2	7	12	14	18
3	3	8	13	14	19
4	4	9	15	14	20
5	5	10	16	14	21
6	5	8	16	14	20
7	23	8	16	14	20
ensaio com os macro-sismógrafos GSR-16					
ensaio	GSR-200	GSR-201	GSR-202	GSR-204	GSR-206
0	23	P5	P6	P7	P8
1	P1	P2	P3	P4	14
2	14_J	14_M	P4	P4 _{TOPO}	P5 _{TOPO}
3	14_J	14_M	20	23_J	23_M

Os dois sistemas de instrumentação funcionaram de forma independente, não se tendo procurado iniciar o armazenamento de registos exactamente no mesmo instante em ambos. Tal facilitou a prossecução dos ensaios e não levantou dificuldades na análise, uma vez que esta foi efectuada de forma independente com os dados provenientes de cada um dos sistemas. Obviamente, em cada ensaio, foi necessário colocar transdutores de ambos os sistemas na secção de referência.

Antes dos ensaios foram efectuadas algumas medições preliminares, para avaliar os níveis da resposta induzida pelas acções ambiente e para escolher os melhores pontos para colocar os transdutores durante os ensaios. Com base na análise dessas medições preliminares optou-se por

colocar toda a instrumentação no interior da secção em caixão do tabuleiro; o que teve também a vantagem de evitar a colocação de cabos na faixa de rodagem por onde circularam camiões durante os períodos de realização dos ensaios. Conforme se ilustra na figura 6.88, os acelerómetros ES-U foram colocados em cada secção, de modo a medir os seus movimentos verticais, de torção e transversais.

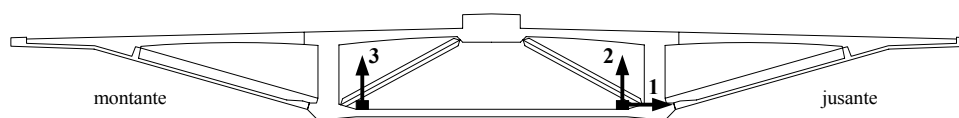


Figura 6.88 – Colocação dos acelerómetros ES-U em cada secção.

Nos 6 primeiros ensaios com os acelerómetros ES-U e nos 4 primeiros ensaios com os macro-sismógrafos GSR-16, fizeram-se circular sobre a ponte, camiões carregados (os mesmos que foram utilizados nos ensaios estáticos) com uma velocidade de cerca de 50 km/h. Nestes ensaios não se procurou controlar com precisão a velocidade de circulação dos camiões, pois o objectivo que se pretendeu atingir foi apenas o de gerar uma acção ambiente que aumentasse a resposta da estrutura.

O 7º ensaio realizado com os acelerómetros ES-U consistiu na passagem de camiões sobre tábuas com cerca de 7 cm de altura, colocadas na faixa de rodagem em 4 secções diferentes.

Nos últimos ensaios com os acelerómetros ES-U, foram efectuadas diversas passagens na via de montante, com camiões a circular com velocidades bem definidas. Estes ensaios foram efectuados no âmbito de outro trabalho de doutoramento a decorrer na FEUP, dedicado à avaliação experimental e modelação numérica dos efeitos dinâmicos do tráfego rodoviário (Calçada, 2003).

A frequência de amostragem utilizada nos ensaios foi de 50 Hz, excepto no 7º ensaio realizado com os acelerómetros ES-U em que se utilizou uma frequência de amostragem de 200 Hz. No quadro 6.20 indica-se a duração total dos registos obtidos em cada ensaio.

Quadro 6.20 – Duração total dos registos obtidos nos ensaios da ponte Salgueiro Maia.

ensaios com os ES-U	duração (seg.)	ensaios com os GSR-16	duração (seg.)
ensaio 0	1311	ensaio 0	1638
ensaios 1 a 5	1147	ensaio 1	1638
ensaio 6	1475	ensaio 2	3277
ensaio 7	7700	ensaio 3	2458

Identificação modal:

Na análise de identificação modal efectuada com os registos obtidos nos ensaios efectuados na ponte Salgueiro Maia (LNEC – Rodrigues, 2000) foi utilizado o método BFD que já foi descrito no

capítulo 4. As funções de densidade espectral da resposta da estrutura, foram assim avaliadas com o algoritmo da FFT, utilizando a técnica também descrita no capítulo 4.

Antes da aplicação do método de identificação modal, os registos de aceleração obtidos nos ensaios foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-banda entre 0,25 Hz e 6,25 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 8;
- decimação dos registos, das frequências com que foram adquiridos nos ensaios para uma frequência de 12,5 Hz.

Com a decimação dos sinais para uma frequência de 12,5 Hz, a frequência de *Nyquist* passou a ser de 6,25 Hz e portanto a identificação modal subsequente foi também desenvolvida apenas até essa frequência. De facto, quer a análise prévia com um modelo de elementos finitos, quer a análise dos registos preliminares obtidos antes dos ensaios, mostraram que nessa gama de frequências já seria possível identificar um número considerável de modos de vibração.

O pré-processamento dos registos incluiu ainda o cálculo da semi-soma e da semi-diferença dos registos verticais obtidos nos pontos a montante e jusante de cada secção instrumentada. As séries obtidas por semi-soma dos registos verticais contêm as componentes com movimentos verticais da secção, enquanto que as obtidas por semi-diferença contêm as componentes com movimentos de torção. As séries assim determinadas foram as consideradas na análise subsequente de identificação modal, pois desta forma torna-se mais fácil distinguir entre modos verticais e modos de torção.

As funções de densidade espectral da resposta da estrutura foram avaliadas considerando amostras com 2048 valores, sobrepostas a 50 %, tendo-se aplicado uma janela de *Hanning* a cada amostra para reduzir o efeito de escorregamento (*leakage*). A resolução em frequência das funções de densidade espectral assim estimadas é a correspondente aos 2048 valores de cada amostra, o que para a frequência de amostragem de 12,5 Hz corresponde a $\Delta f = 0,006$ Hz.

Para reunir e sintetizar a informação contida nos auto espectros avaliados com os registos obtidos em todas as secções instrumentadas, determinaram-se os correspondentes espectros normalizados médios (ANPSD). Estes espectros foram calculados separadamente para:

- semi-soma dos registos verticais (ver figura 6.88), para identificar os modos verticais;
- semi-diferença dos registos verticais (ver figura 6.89), para identificar os modos de torção;
- registos transversais no tabuleiro (ver figura 6.90);
- registos longitudinais no tabuleiro (ver figura 6.91);
- registos transversais no topo dos mastros (ver figura 6.92);
- registos longitudinais no topo dos mastros (ver figura 6.93).

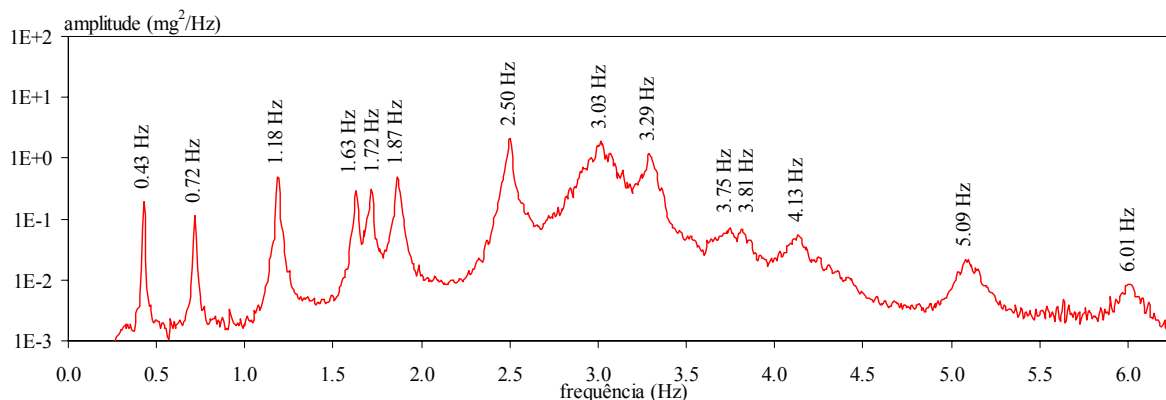


Figura 6.88 – Espectro normalizado médio da semi-soma de registos verticais.

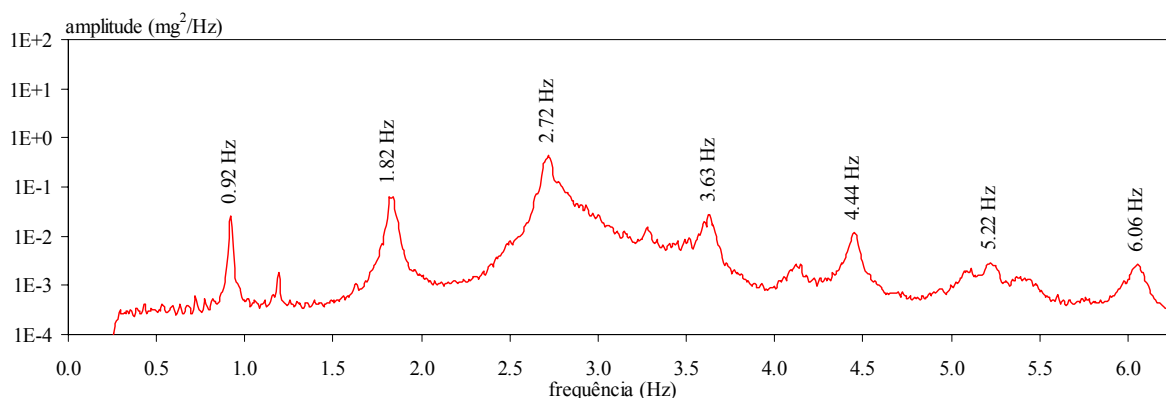


Figura 6.89 – Espectro normalizado médio da semi-diferença de registos verticais.

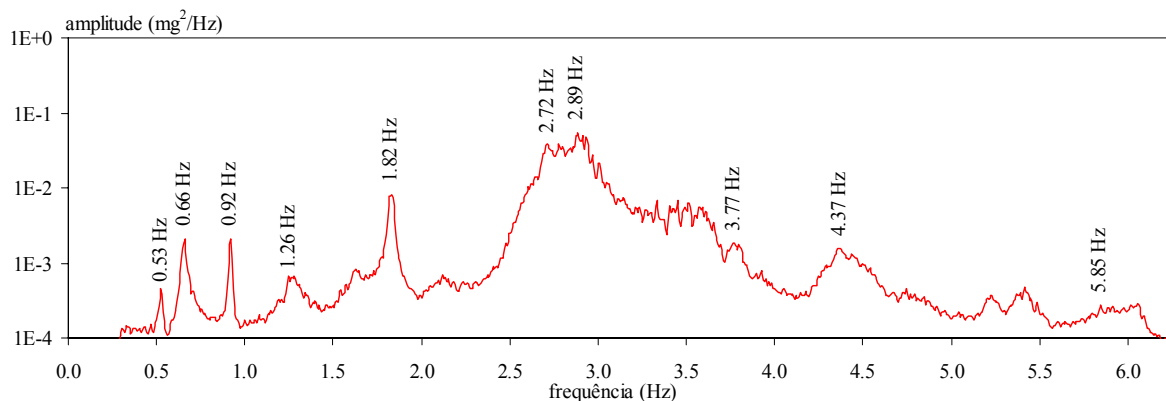


Figura 6.90 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no tabuleiro.

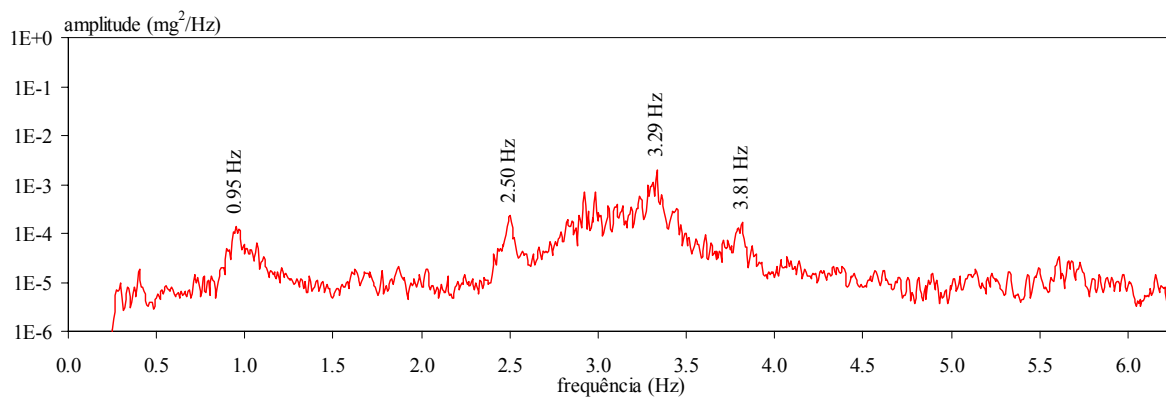


Figura 6.91 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no tabuleiro.

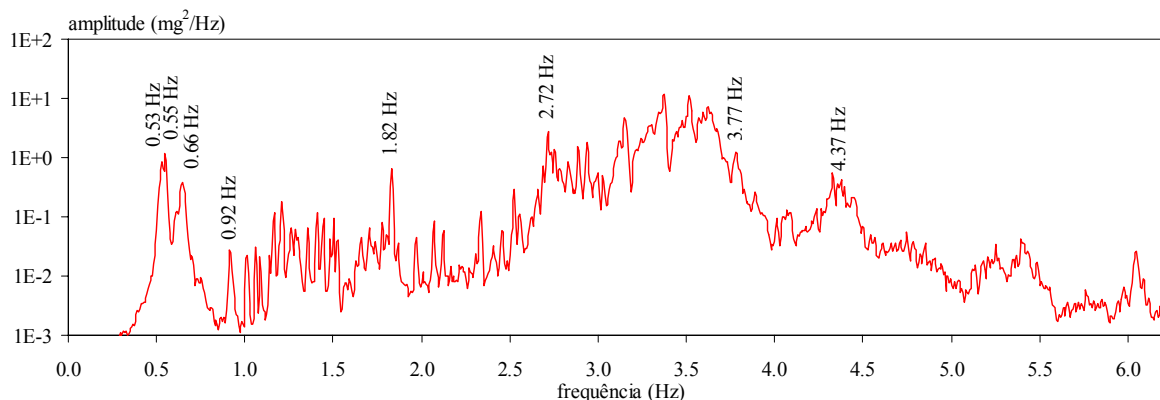


Figura 6.92 – Espectro normalizado médio dos registos transversais no topo dos mastros.

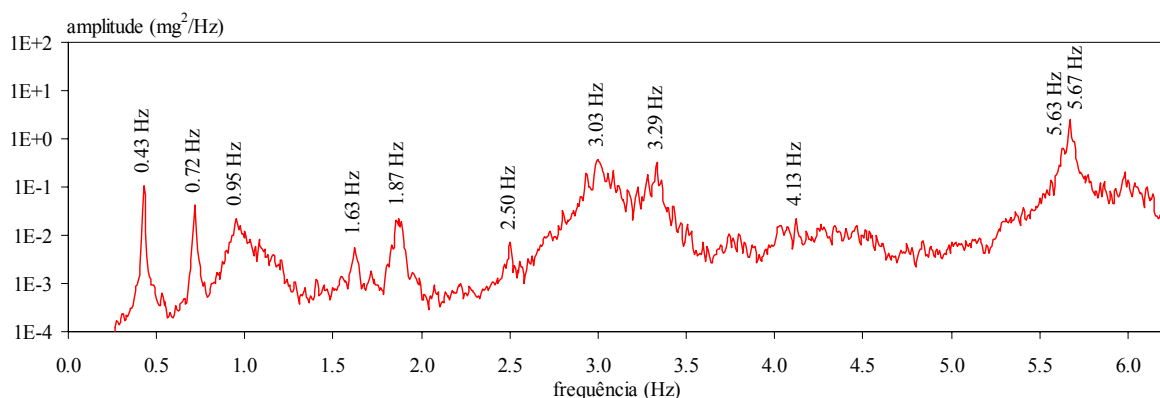


Figura 6.93 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais no topo dos mastros.

Para a identificação das frequências correspondentes a modos naturais de vibração da estrutura, seleccionaram-se os picos de ressonância mais evidentes nos espectros normalizados médios e, simultaneamente, analisaram-se as funções de coerência e as relações de amplitude e fase entre os registos obtidos nas diferentes secções instrumentadas e na secção de referência. Nos espectros das figuras 6.88 a 6.93 estão também indicados os valores das frequências que, após essa análise, foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração da ponte Salgueiro Maia.

As configurações dos modos de vibração da ponte Salgueiro Maia foram avaliadas de acordo com o método BFD, já descrito no capítulo 4, ou seja, com base na estimativa H_1 da FRF de transmissibilidade entre os registos obtidos nas diversas secções instrumentadas e os adquiridos na secção de referência. A partir dos valores da função de coerência e do número de amostras consideradas na avaliação de H_1 , determinaram-se também os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais em cada secção. As configurações modais assim identificadas, serão apresentadas mais adiante, em paralelo com as calculadas com um modelo de elementos finitos.

Para avaliar os coeficientes de amortecimento, utilizou-se o método, já apresentado no capítulo 4, que consiste no ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto espectros das acelerações registadas nos ensaios.

Com o método de identificação modal estocástica utilizado, identificaram-se as frequências, configurações e coeficientes de amortecimento de 32 modos de vibração da ponte Salgueiro Maia. No quadro 6.21 indicam-se os valores das frequências e dos coeficientes de amortecimento, avaliados através dos ensaios.

Comparação com um modelo de elementos finitos:

Para além do estudo de caracterização dinâmica da ponte Salgueiro Maia, com base na análise dos registos de aceleração obtidos nos ensaios, foi também desenvolvido um modelo de elementos finitos. Este modelo foi um elemento importante para o planeamento dos ensaios e também para a interpretação dos resultados experimentais.

O modelo desenvolvido é um modelo espacial (ver figura 6.94), sendo constituído por: 1020 elementos de casca para o tabuleiro; 856 elementos de barra para os pilares, mastros, tirantes e alguns elementos do tabuleiro; e 56 elementos de ligação para simular os aparelhos de apoio. No total o modelo tem 6306 graus de liberdade.

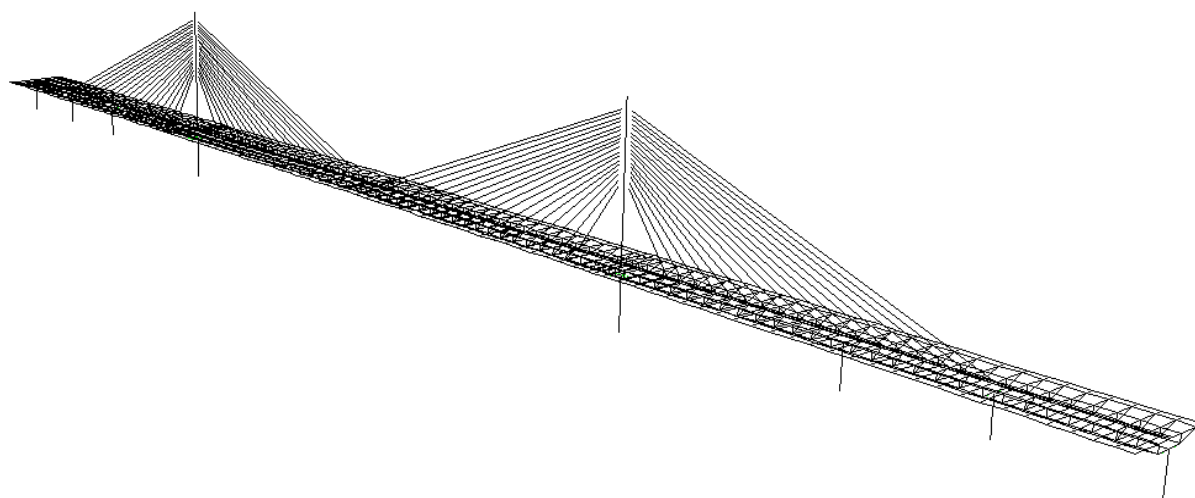


Figura 6.94 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da ponte Salgueiro Maia.

Na definição dos parâmetros considerados no modelo de elementos finitos, nomeadamente o módulo de elasticidade dos materiais e a rigidez dos aparelhos de apoio HDRB, tiveram-se em conta os valores especificados no projecto, tendo-se ainda efectuado um ajuste dos mesmos, de modo a que as frequências calculadas se aproximassem das identificadas experimentalmente.

No quadro 6.21 indicam-se os valores das frequências calculadas com o modelo de elementos finitos, comparando-as com as identificadas experimentalmente. Na figura 6.95 essa comparação é feita graficamente. Como se pode verificar, há um bom ajuste entre as frequências identificadas e as calculadas com o modelo de elementos finitos.

Quadro 6.21 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.

Modos verticais			Modos de torção			Modos transversais		
ensaios		modelo	ensaios		modelo	ensaios		modelo
f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
0,43	0,7	0,44	0,92	0,5	0,83	0,53	3,6	0,52
0,72	0,8	0,69	1,82	0,7	1,66	0,55	1,0	0,53
1,18	0,6	1,12	2,72	0,7	2,43	0,66	1,9	0,67
1,63	0,7	1,52	3,63	0,6	3,21	1,26	0,6	1,43
1,72	0,6	1,61	4,44	1,0	3,84	2,89	0,6	2,21
1,87	0,6	1,75	5,22	0,5	4,50	3,77	0,5	3,39
2,50	0,8	2,29	6,06	0,5	5,04	4,37	0,3	4,24
3,03	1,3	2,66				5,85	0,3	5,23
3,29	0,9	2,97						
3,75	0,1	3,41						
3,81	0,5	3,44						
4,13	0,2	3,71						
5,09	0,2	4,53						
6,01	0,5	5,22						

Modos longitudinais		
ensaios		modelo
f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
0,95	1,2	0,98
5,63	0,3	5,54
5,67	0,1	5,57

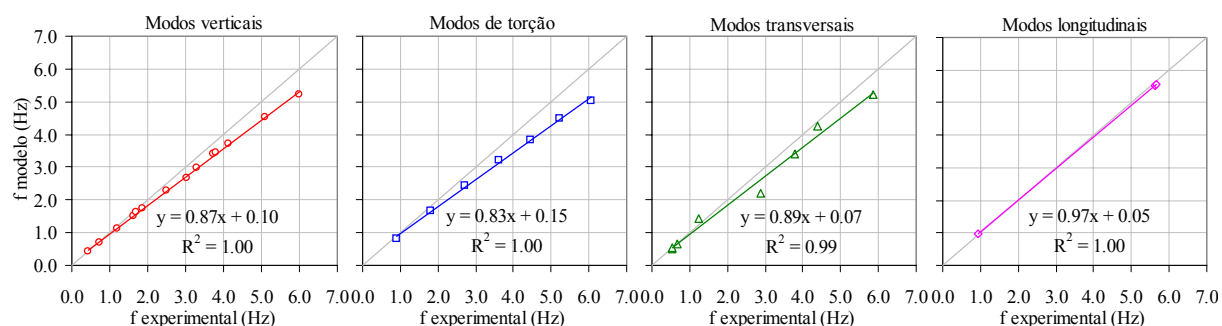


Figura 6.95 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.

Saliente-se ainda, que relativamente às frequências calculadas com o modelo utilizado no estudo do comportamento sísmico da ponte Salgueiro Maia, efectuado na fase de projecto (Delgado *et al.*, 1995), verificou-se que há um bom ajuste com as frequências identificadas para os 4 primeiros modos verticais. No que se refere às frequências dos modos transversais e longitudinais, verificam-se algumas diferenças, que são justificadas pelo facto de nesse estudo se ter considerado uma rigidez para os aparelhos de apoio HDRB, correspondente a níveis de deformação que se podem verificar no caso de ocorrência dum sismo; nessa situação os aparelhos de apoio HDRB são bastante menos rígidos do que para deformações horizontais muito pequenas, como as que se verificaram durante os ensaios de caracterização dinâmica efectuados na ponte Salgueiro Maia.

Na figura 6.96 comparam-se as configurações identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração verticais da ponte Salgueiro Maia. Como se pode verificar nessa figura, há uma concordância bastante boa entre as configurações experimentais e as calculadas com o modelo.

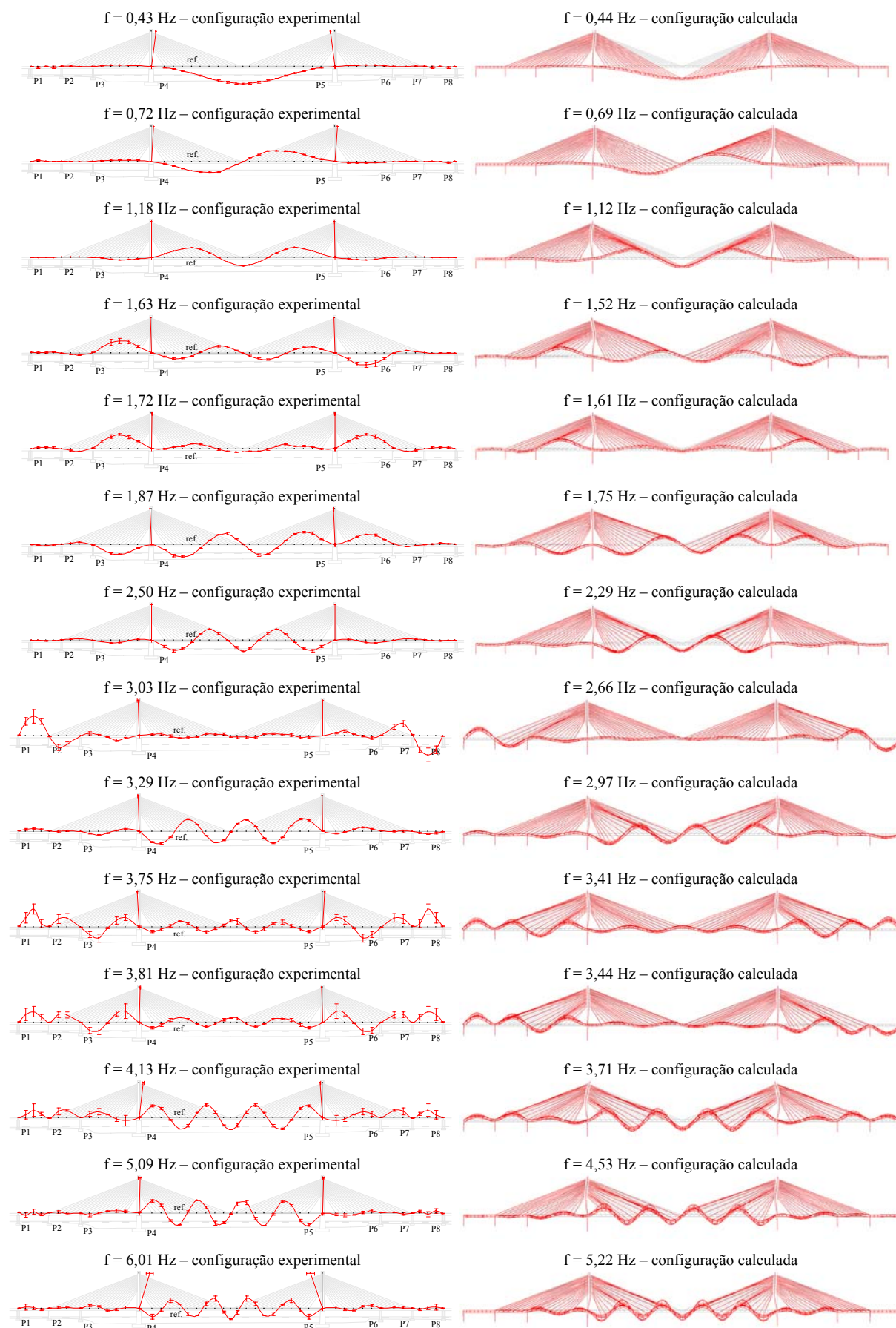


Figura 6.96 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais da ponte Salgueiro Maia.

Relativamente às configurações dos modos de vibração verticais, salientou-se já a boa concordância entre os valores experimentais e os calculados com o modelo. Apenas no caso do 11º modo vertical com uma frequência de 3,81 Hz, é que essa concordância não é tão boa, o que poderá ser justificado pela proximidade do modo anterior, com uma frequência de 3,75 Hz, que não permitiu, com o método de identificação modal estocástica utilizado (método BFD), destrinçar melhor as componentes correspondentes a cada um desses modos de vibração. Note-se que no modelo de elementos finitos, esses dois modos de vibração têm também frequências muito próximas (3,44 Hz e 3,41 Hz).

Na figura 6.97 comparam-se as configurações identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração de torção da ponte Salgueiro Maia. Para esses modos, há também uma boa concordância entre as configurações experimentais e as calculadas com o modelo.

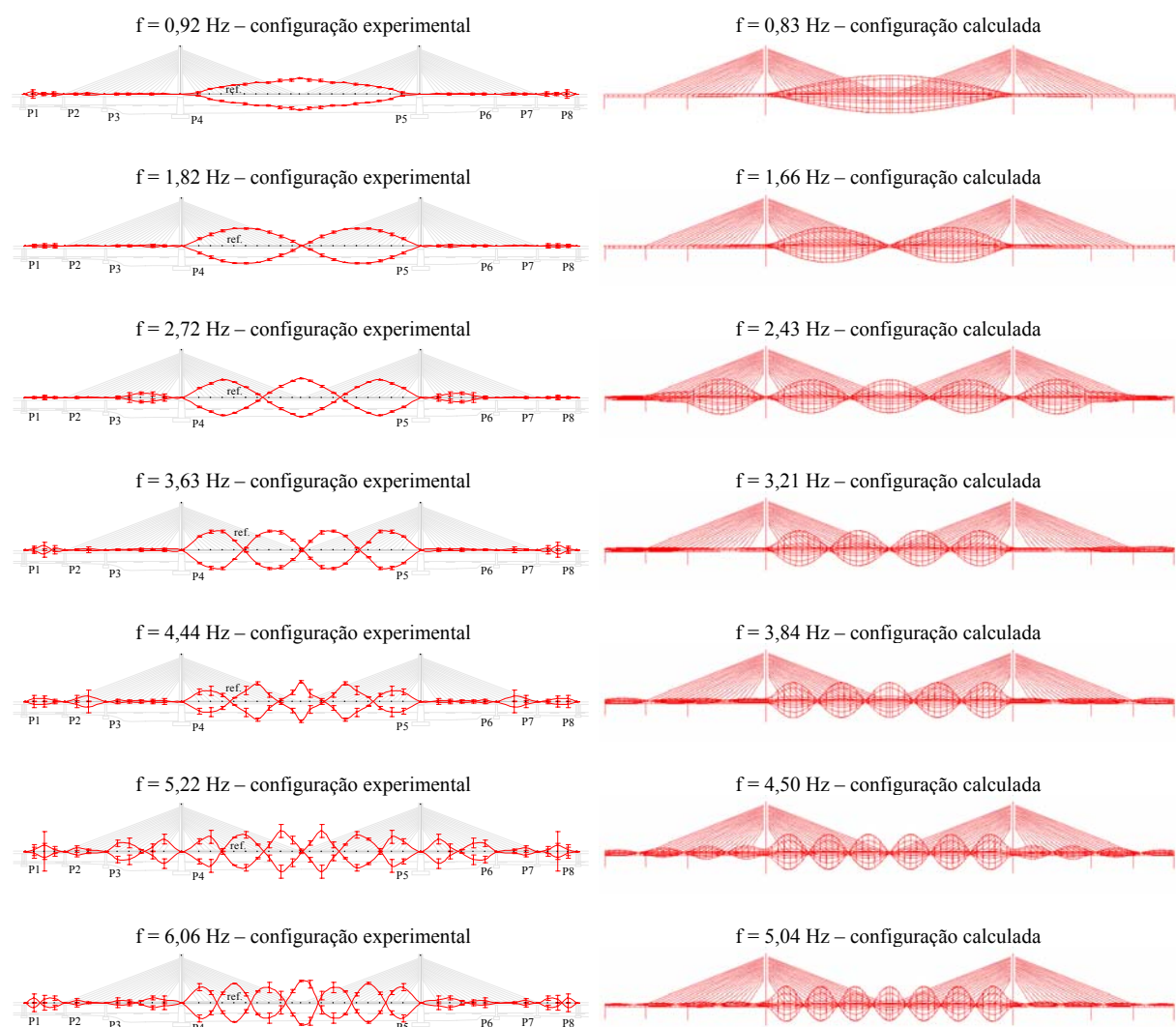


Figura 6.97 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção da ponte Salgueiro Maia.

Na figura 6.98 comparam-se, com representações em planta, as configurações identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração transversais da ponte Salgueiro Maia.

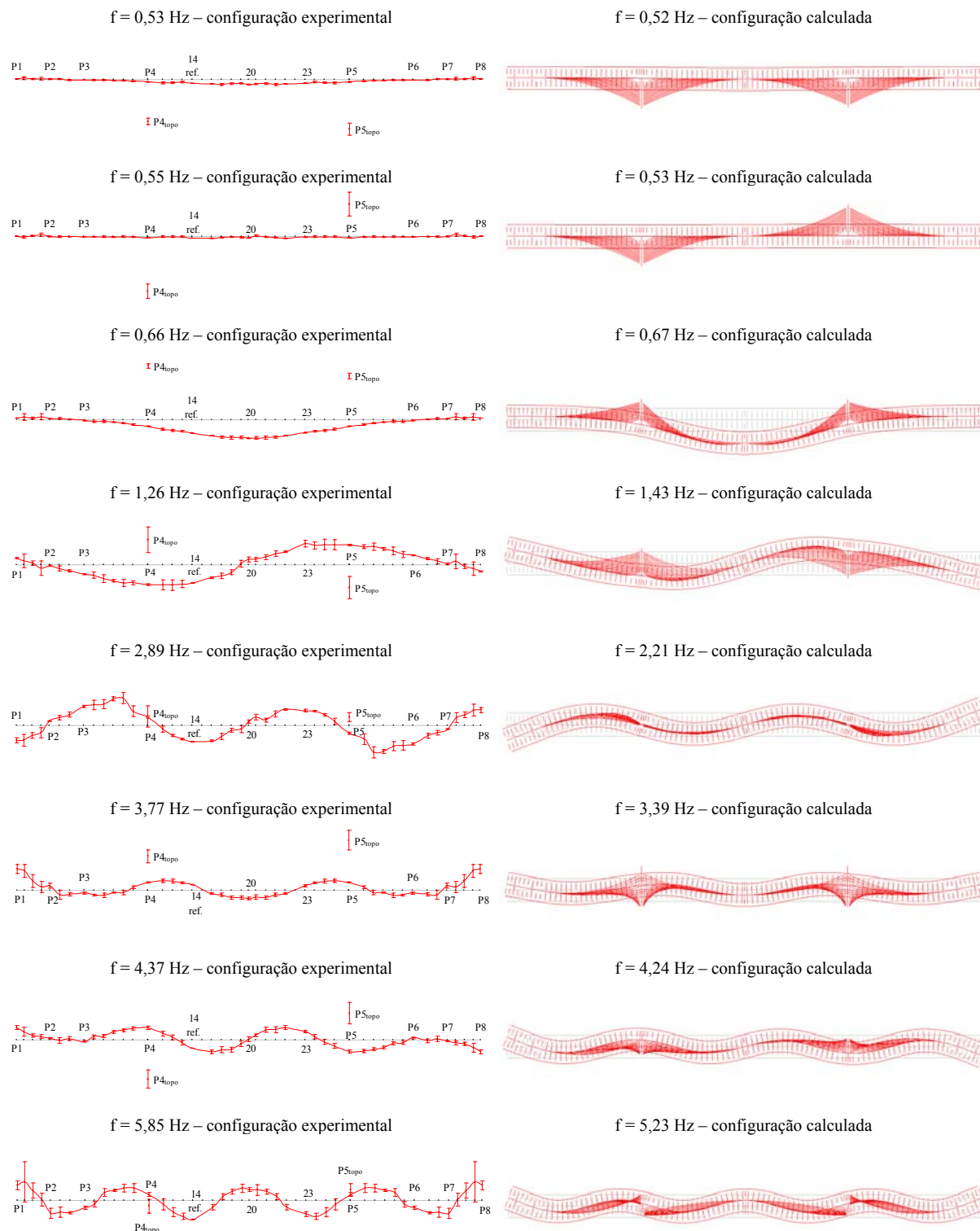


Figura 6.98 – Configurações experimentais e calculadas de modos transversais da ponte Salgueiro Maia.

Relativamente aos modos de vibração transversais, é interessante salientar que os dois primeiros modos transversais têm frequências muito próximas, 0,53 Hz e 0,55 Hz, correspondendo o primeiro, a um modo em que os mastros vibram transversalmente no mesmo sentido (em fase), e o segundo, a um modo em que os mastros vibram transversalmente em sentidos diferentes (em oposição de fase). Para ilustrar melhor essa diferença entre os dois primeiros modos de vibração transversais, apresentam-se na figura 6.99 as correspondentes configurações calculadas; note-se que também com o modelo de elementos finitos, as frequências calculadas para esses modos, têm valores muito próximos, 0,52 Hz e 0,53 Hz.

É assim de salientar que a identificação dos dois primeiros modos transversais, só foi possível porque as funções de densidade espectral da resposta da estrutura, foram estimadas com uma resolução em frequência (0,006 Hz) que permitiu distinguir os picos de ressonância correspondentes a cada um desses modos (ver o espectro normalizado médio da figura 6.92).

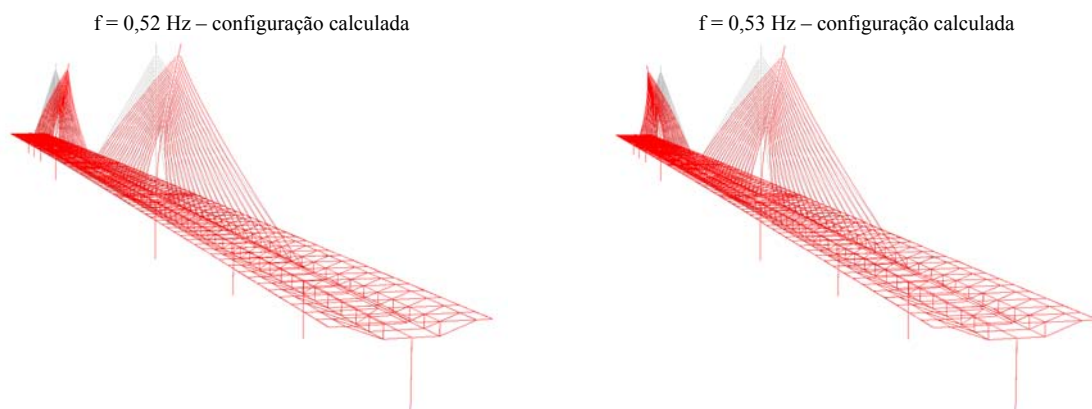


Figura 6.99 – Configurações calculadas dos modos transversais com 0,52 Hz e 0,53 Hz.

Na figura 6.100 comparam-se as configurações identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração longitudinais da ponte Salgueiro Maia.

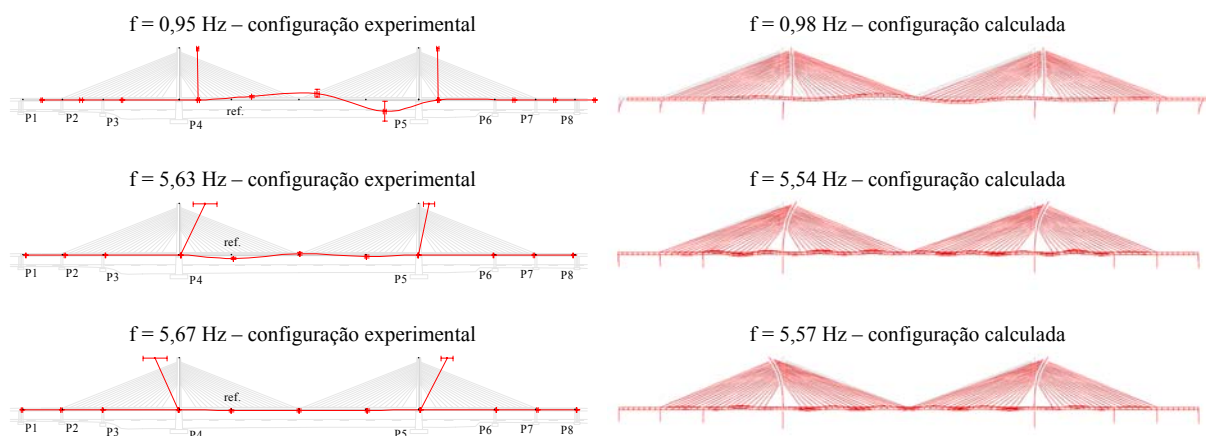


Figura 6.100 – Configurações experimentais e calculadas de modos longitudinais da ponte Salgueiro Maia.

Nas representações das configurações modais identificadas experimentalmente, apresentadas nas figuras 6.96, 6.97, 6.98 e 6.100, incluíram-se barras de erro que representam os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais, avaliados de acordo com o processo descrito no capítulo 4. Como se pode verificar, em várias das configurações, essas barras de erro são muito pequenas, o que ilustra a existência, nas respectivas frequências, de uma boa coerência entre os sinais de resposta em diferentes secções e na secção de referência.

Considerações finais:

Através da aplicação de um método de identificação modal estocástica na análise da informação obtida nos ensaios de caracterização dinâmica da ponte Salgueiro Maia, foi possível avaliar as seguintes características dinâmicas da estrutura:

- Os valores de 32 frequências de modos de vibração globais da estrutura (14 de modos verticais, 7 de modos de torção, 8 de modos transversais e 3 de modos longitudinais);
- As configurações de 32 desses modos de vibração;
- Estimaram-se também os coeficientes de amortecimento dos 32 modos de vibração.

As características dinâmicas identificadas experimentalmente constituem um contributo importante para a caracterização global do comportamento e do estado da ponte Salgueiro Maia, após as obras de construção e no início da sua utilização. O acompanhamento da evolução dessas características ao longo da vida da obra permitirá avaliar a evolução do estado da estrutura, podendo ser efectuado através da realização de ensaios de medição da resposta da estrutura às acções ambiente, realizados em condições de funcionamento normal da ponte.

Comentam-se em seguida alguns aspectos do estudo de caracterização dinâmica experimental da ponte Salgueiro Maia:

- Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, em face do grande número de modos de vibração que foi possível identificar numa forma inequívoca;
- A utilização de um modelo de elementos finitos, em paralelo com o trabalho experimental e de análise da informação obtida nos ensaios, revelou ser importante quer para a fase de preparação dos ensaios quer para a fase da análise de identificação modal. Em resultado da experiência ganha com este estudo, considera-se que, na identificação modal estocástica, pode ser bastante importante na fase de validação dos resultados da identificação, efectuar a sua comparação com os valores calculados com modelos de elementos finitos. A utilidade dessa comparação revela-se sobretudo na validação dos modos de ordem superior, para os quais é difícil ter uma ideia prévia clara de como é a sua configuração. Note-se que uma das questões que se coloca nos métodos de identificação modal estocástica, conforme referido no

capítulo 4, é a capacidade de distinguir os picos de ressonância ou os pólos dos modos do sistema a identificar, de eventuais picos de ressonância ou pólos do sistema das acções ambiente; a comparação dos resultados da identificação experimental com os resultados obtidos com um modelo de elementos finitos pode ajudar a efectuar essa distinção;

- Do ponto de vista prático da realização dos ensaios, importa também referir que todas as secções em que foram colocados os transdutores utilizados, foram previamente marcadas no dia anterior aos dias dos ensaios, com a numeração indicada na figura 6.87, o que durante a execução dos ensaios, evitou que houvesse dúvidas quanto à colocação dos transdutores em cada ensaio;
- Para a identificação modal da ponte Salgueiro Maia, utilizou-se o método básico no domínio da frequência (apresentado no capítulo 4), implementado no programa **modal ID** desenvolvido em *LabView*, o qual tem capacidade de análise simultânea dos registos de vários ensaios e possibilidade de transferência de resultados para *Excel*.

6.2.7 Ponte ferroviária de Canelas

Considerações gerais:

O estudo sobre o comportamento dinâmico da ponte ferroviária de Canelas (LNEC – Rodrigues, 2001) foi desenvolvido por solicitação da REFER, com o objectivo de avaliar a adequabilidade dessa obra de arte, para o aumento da velocidade máxima de circulação dos comboios de pendulação activa 4001/10 (comboios pendulares) de 140 km/h para 220 km/h.

O estudo efectuado na ponte de Canelas envolveu a realização de ensaios *in situ* para avaliação das características dinâmicas da estrutura e dos efeitos dinâmicos do tráfego ferroviário.

A adequabilidade da ponte de Canelas para a circulação de comboios pendulares com velocidades de 220 km/h foi analisada considerando os aspectos relacionados com: a segurança da estrutura; a segurança da circulação dos comboios; e o conforto dos passageiros. A análise, relativamente a estes três aspectos foi efectuada, considerando as disposições da regulamentação aplicável, nomeadamente o Eurocódigo 1 (CEN, 2001) e as regras da *Union Internationale des Chemins de Fer* (UIC, 1976, 1979, 1994), tendo em conta as características dinâmicas da estrutura avaliadas experimentalmente, e simulando analiticamente a resposta dinâmica da estrutura à passagem do sistema de forças correspondente ao comboio pendular.

O estudo sobre o comportamento dinâmico da ponte de Canelas sob a acção do tráfego ferroviário foi apresentado numa conferência internacional (Rodrigues, 2002).

Não é do âmbito deste trabalho entrar em detalhe na análise das questões relacionadas com o comportamento dinâmico de estruturas de pontes, sob a acção do tráfego ferroviário de alta velocidade; nesse domínio, refere-se o trabalho de Calçada (1995). Na apresentação que se faz em seguida, do estudo efectuado na ponte de Canelas, aborda-se apenas a análise de identificação modal que foi efectuada, e que constituiu uma parte importante do mesmo.

Breve descrição da ponte ferroviária de Canelas:

A ponte ferroviária de Canelas situa-se ao Km 282,944 da linha do Norte, tendo um desenvolvimento total de 72 m entre eixos de apoios extremos. Esta obra de arte, projectada no gabinete Gapres, é constituída por seis tramos com 12 m de vão, simplesmente apoiados em pilares de tipo laminar, nos apoios intermédios, e em encontros de tipo aparente em cofre, nos apoios extremos.

A ponte de Canelas suporta duas vias férreas de via larga com tabuleiros independentes para cada uma, havendo para tal uma junta longitudinal ao longo de toda a estrutura. Os pilares e os encontros são únicos para as duas vias, suportando assim, ambos os tabuleiros. Em planta, a directriz da via ascendente (via A) apresenta um raio de 892 m, e a da via descendente (via D) um raio de 896 m. Em perfil longitudinal, a rasante é horizontal, sendo a cota do carril da fila baixa de 5,75 m ao longo de toda a obra.

As fundações dos pilares e dos encontros são de tipo indirecto por estacas, encabeçadas por maciços de espessura adequada para garantir a uniformidade do seu funcionamento.

Na figura 6.101 apresenta-se o alçado da ponte de Canelas, e na figura 6.102, o alçado dum pilar e a secção transversal do tabuleiro.

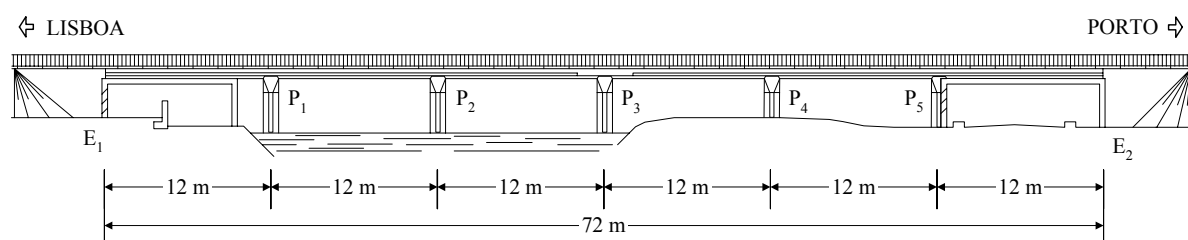


Figura 6.101 – Alçado da ponte de Canelas.

Em cada uma das vias da ponte de Canelas, o tabuleiro tem 6,2 m de largura, sendo constituído por uma laje maciça com 4,5 m e 0,7 m de espessura e uma consola lateral com 1,7 m de largura e altura variável entre 0,3 m e 0,5 m. A laje maciça em estrutura mista aço-betão, possui 9 perfis metálicos HE 500B embebidos, com um afastamento entre si de 0,475 m. O tabuleiro da ponte

dispõe ainda de um guarda balastro que é constituído por uma viga com 0,6 m de altura e 0,3 m de largura, localizado entre a laje de betão e a consola lateral.

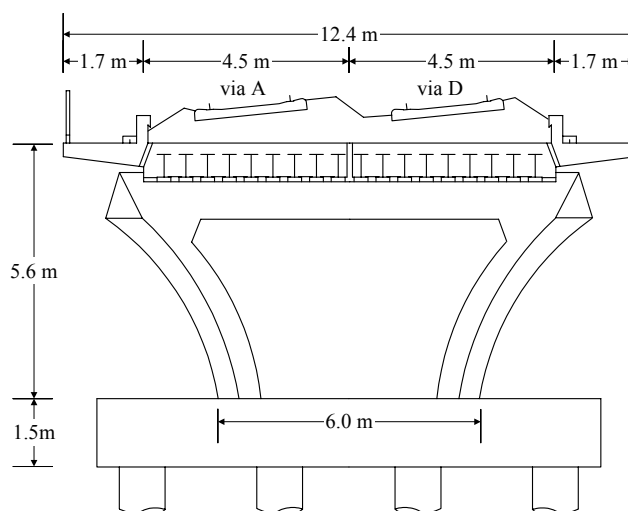


Figura 6.102 – Alçado dum pilar e secção transversal do tabuleiro da ponte de Canelas.

Todos os tramos do tabuleiro são fixos de um dos lados (lado para onde o comboio se desloca) e móveis do outro (lado de onde o comboio se desloca). Cada um dos apoios móveis é constituído por nove aparelhos de apoio (um sob cada perfil HE 500B) de secção rectangular e formados por neoprene envolvendo chapas de aço inoxidável. Os apoios fixos são idênticos aos móveis, havendo no entanto, no intervalo entre perfis, ferrolhos de aço inoxidável, embebidos no betão do pilar ou do encontro.

Na figura 6.103 podem observar-se algumas vistas gerais da ponte ferroviária de Canelas.

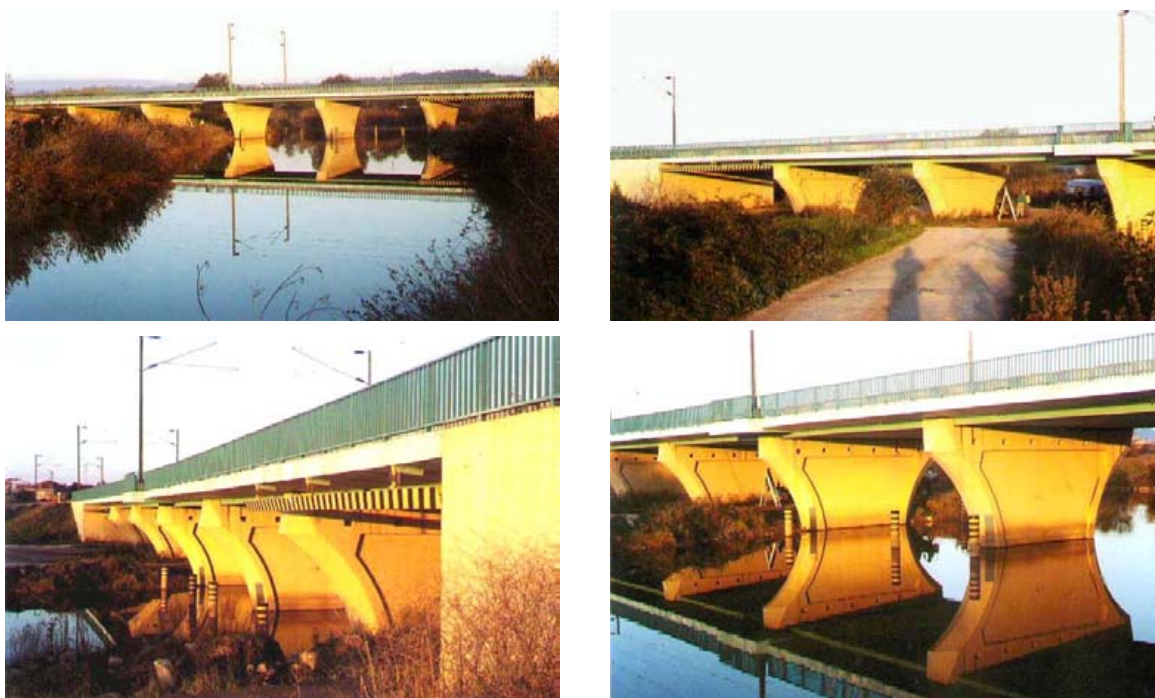


Figura 6.103 – Vistas gerais da ponte de Canelas.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Os ensaios efectuados na ponte de Canelas foram realizados num período desde cerca das 9h. até perto das 18h.30m., tendo consistido na medição de extensões e de acelerações induzidas pela passagem dos comboios. Para a realização dos ensaios não foi imposta qualquer restrição ao tráfego que usualmente circula sobre a ponte, tendo-se apenas solicitado à REFER, a informação relativa às velocidades dos comboios que circularam sobre a estrutura durante o período de ensaio.

Nos ensaios *in situ* realizados na ponte de Canelas utilizou-se o seguinte equipamento:

- 15 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo ES-U da Kinemetrics;
- 5 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;
- 2 extensómetros indutivos e respectivo equipamento de condicionamento e alimentação;
- 4 extensómetros piezoeléctricos de circuito integrado (ICP) de marca PCB, modelo 740A02, e fonte de alimentação apropriada;
- 1 computador portátil;
- placa de aquisição de dados *DAQ Card AI-16XE-50* da *National Instruments* com conversão analógica/digital a 16 bits, instalada no computador portátil;
- chassis SCXI-1000DC de 32 canais, também da *National Instruments*, ligado a uma bateria;
- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição.

Os ensaios efectuados na ponte de Canelas tiveram como principais objectivos, por um lado, a determinação das características dinâmicas da estrutura, e por outro, a avaliação de amplificações dinâmicas associadas ao tráfego ferroviário. Os acelerómetros foram utilizados principalmente para conseguir o primeiro objectivo, enquanto que os extensómetros foram utilizados, fundamentalmente, para atingir o segundo.

Embora a ponte de Canelas seja constituída por 6 tramos independentes para cada via, ou seja, por um total de 12 tramos simplesmente apoiados, na instrumentação utilizada optou-se por manter 3 acelerómetros sempre nos mesmos pontos (11A e 11D), enquanto que os outros foram sendo colocados em pontos diferentes, de ensaio para ensaio. Foram assim efectuados 5 ensaios em que os acelerómetros foram colocados em 46 pontos da estrutura (23 em cada via). Na figura 6.104 indica-se a localização dos pontos instrumentados e no quadro 6.22 indicam-se os pontos instrumentados com os acelerómetros ES-U em cada ensaio.

Como se pode verificar no quadro 6.22, nos 3 primeiros ensaios obtiveram-se, essencialmente, registos na direcção vertical, em pontos situados a meio vão e a quartos de vão dos 12 tramos.

Fizeram-se ainda os ensaios 4 e 5 em que os acelerómetros foram mudados para a direcção horizontal, obtendo-se, nesses dois ensaios, registos nas direcções transversal e longitudinal ao eixo da ponte.

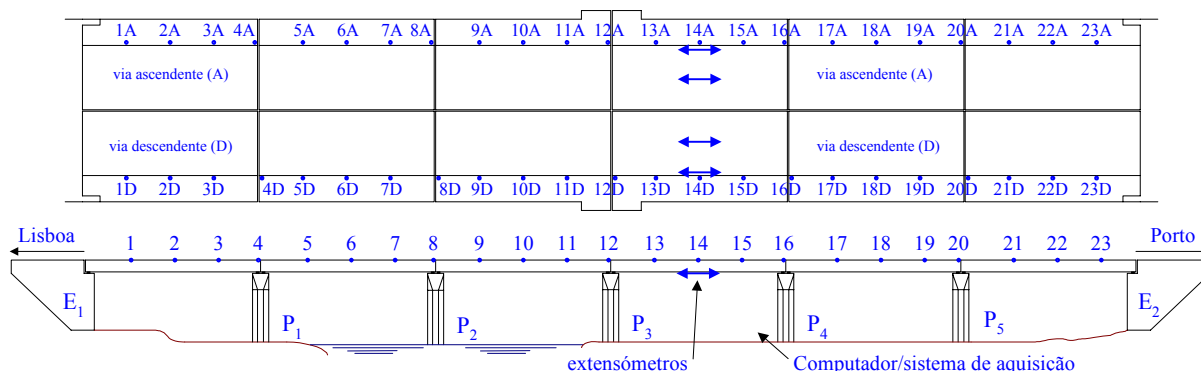


Figura 6.104 – Pontos instrumentados nos ensaios da ponte de Canelas.

Quadro 6.22 – Pontos instrumentados com os acelerómetros ES-U em cada ensaio.

ensaio	unidade 1			unidade 2			unidade 3			unidade 4			unidade 5		
	cn.1	cn.2	cn.3	cn.4	cn.5	cn.6	cn.7	cn.8	cn.9	cn.10	cn.11	cn.12	cn.13	cn.14	cn.15
1	13A vert.	14A vert.	15A vert.	13D vert.	14D vert.	15D vert.	1A vert.	2A vert.	3A vert.	1D vert.	2D vert.	3D vert.	11A trans.	11A vert.	11D vert.
2	17A vert.	18A vert.	19A vert.	17D vert.	18D vert.	19D vert.	5A vert.	6A vert.	7A vert.	5D vert.	6D vert.	7D vert.			
3	21A vert.	22A vert.	23A vert.	21D vert.	22D vert.	23D vert.	9A vert.	10A vert.	11A vert.	9D vert.	10D vert.	11D vert.			
4	14A trans.	16A trans.	20A trans.	14D trans.	16D trans.	20D trans.	4A trans.	8A trans.	12A trans.	4D trans.	8D trans.	12D trans.			
5	14A long.	16A long.	20A long.	14D long.	16D long.	20D long.	4A long.	8A long.	12A long.	4D long.	8D long.	12D long.			

Na figura 6.105, ilustra-se a colocação dos acelerómetros ES-U nas consolas laterais do tabuleiro, e também dos extensómetros que, durante todos os ensaios efectuados, ficaram colocados na secção de meio vão do tramo entre os pilares P3 e P4 (ver figura 6.104). Os extensómetros indutivos (que se designam por IND1 e IND2) foram colocados na superfície de betão junto ao bordo exterior da laje. Quanto aos extensómetros piezoeléctricos de circuito integrado (que se designam por ICP1, ICP2, ICP3 e ICP4), optou-se por colocá-los na face inferior do banzo de quatro dos perfis HE 500B.

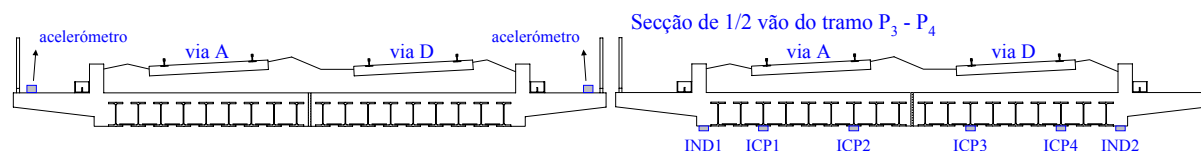


Figura 6.105 – Colocação dos acelerómetros e extensómetros.

Antes da realização dos ensaios, foi efectuada uma visita ao local da ponte, com o objectivo de avaliar as condições em que os ensaios seriam efectuados, e também para obter alguns registos

preliminares que permitiram avaliar o nível de vibrações induzidas pelo tráfego ferroviário e estimar a gama de frequências em que se situa a frequência do primeiro modo de flexão vertical dos tramos da ponte. Com base na análise desses registos preliminares, definiu-se a configuração do equipamento a adoptar nos ensaios. O sistema com os acelerómetros ES-U foi assim utilizado com uma sensibilidade de 5 Volt/g, o que para as características do equipamento de aquisição de dados utilizado, corresponde a uma capacidade de discretização de uma amplitude mínima de aceleração de $61,0 \mu g$.

Durante o período de ensaio foram registadas as acelerações e extensões induzidas na estrutura da ponte, pela passagem de um total de 68 comboios (33 na via A e 35 na via D), incluindo 8 comboios pendulares (que circularam com uma velocidade máxima de 140 km/h).

A frequência de amostragem utilizada nos ensaios foi de 200 Hz.

Na figura 6.106 podem observar-se algumas fotografias do tráfego ferroviário sobre a ponte de Canelas durante o dia dos ensaios.



Figura 6.106 – Tráfego ferroviário sobre a ponte de Canelas durante os ensaios.

Identificação modal:

Os registos de acelerações adquiridos nos ensaios da ponte de Canelas (LNEC – Rodrigues, 2001) foram analisados, para efeitos de identificação modal, utilizando o método BFD e o método de Ibrahim no domínio do tempo (ITD), que já foram descritos no capítulo 4. O método BFD foi utilizado com o objectivo de avaliar as frequências e configurações dos primeiros modos naturais de vibração dos tramos da ponte. O método ITD foi utilizado, fundamentalmente, para avaliar o coeficiente de amortecimento do 1º modo vertical dos tramos da ponte (que era um parâmetro importante a determinar, para as simulações analíticas da passagem do comboio pendular), permitindo também estimar a correspondente frequência (por uma via diferente da seguida no método BFD).

Na aplicação de ambos os métodos de identificação modal (BFD e ITD), houve a preocupação de determinar as características dinâmicas dos tramos da ponte na situação de estarem descarregados. Assim, o método BFD foi aplicado considerando as acelerações registadas durante as passagens de

comboios na via oposta à do tramo em análise (para os tramos da via A analisaram-se as acelerações registadas nas passagens de comboios na via D; para os tramos da via D analisaram-se as acelerações correspondentes a passagens de comboios na via A). O método ITD foi aplicado às respostas em regime livre obtidas através da média das acelerações registadas imediatamente após os comboios terem passado sobre a ponte.

Antes da aplicação dos métodos de identificação modal, os registos de aceleração obtidos nos ensaios foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-alto a 0,5 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 2;
- filtragem passa-baixo a 20 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 4;
- decimação dos registos, da frequência de 200 Hz para uma frequência de 50 Hz.

Para aplicar o método BFD, as funções de densidade espectral da resposta dos tramos da ponte foram avaliadas utilizando o algoritmo da FFT, de acordo com o processo descrito no capítulo 4. As funções de densidade espectral, foram assim estimadas considerando amostras com 256 valores, tendo-se aplicado uma janela de *Hanning* a cada amostra para reduzir o efeito de escorregamento (*leakage*). A resolução em frequência das funções de densidade espectral é portanto a correspondente aos 256 valores com uma frequência de amostragem de 50 Hz, ou seja $\Delta f = 0,195$ Hz.

O método BFD foi aplicado de forma independente para cada tramo da ponte, considerando os registos de acelerações verticais. Na análise efectuada, determinaram-se os espectros médios correspondentes aos três registos de acelerações verticais, obtidos simultaneamente em cada tramo de cada via (a meio vão e a quartos de vão). Para ilustrar os espectros que foram obtidos, apresenta-se na figura 6.107, o espectro médio das acelerações verticais no tramo E₁-P₁ da via D, e também as funções de coerência entre os sinais de resposta obtidos nos três pontos instrumentados nesse tramo.

Para os restantes tramos da ponte (para além do tramo E₁-P₁ da via D) obtiveram-se espectros semelhantes ao representado na figura 6.107. Nesses espectros foi feita uma análise de selecção dos picos de ressonância mais evidentes. Simultaneamente analisaram-se as funções de coerência entre os registos obtidos em cada tramo de cada via. Conforme se referiu no capítulo 4 e tem sido salientado nos exemplos anteriores, valores da função de coerência próximos de 1 indicam que há uma forte relação de linearidade entre os movimentos nos diferentes pontos instrumentados, constituindo assim uma indicação de que os respectivos picos de ressonância correspondem a modos naturais de vibração.

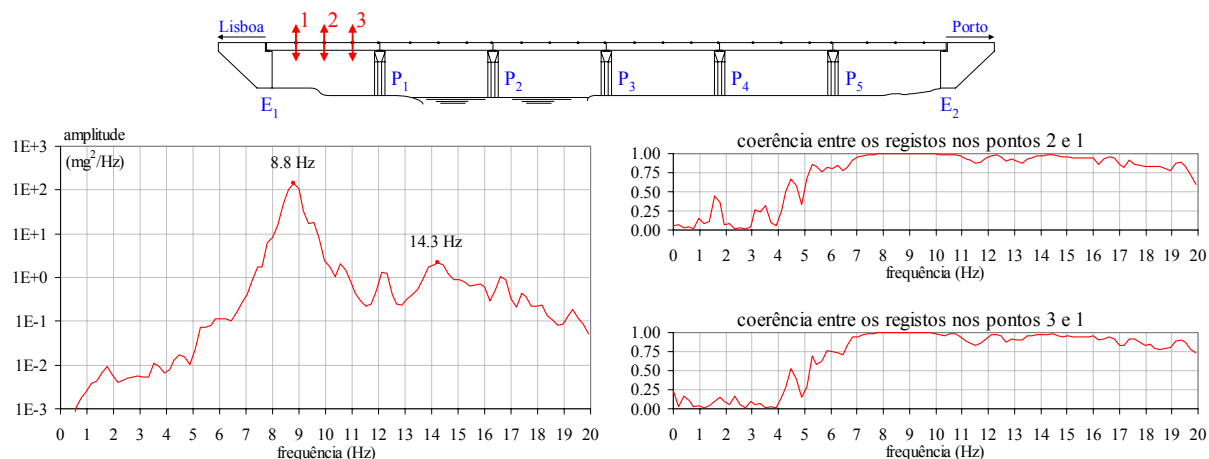


Figura 6.107 – Espectro médio e funções de coerência dos registos verticais no tramo E_1 - P_1 da via D.

No método BFD, é também importante analisar as configurações modais nas frequências de ressonância, de modo a poder interpretá-las, numa forma mais conclusiva, como frequências de modos naturais de vibração. No caso da ponte de Canelas essa análise também foi feita, tendo-se obtido uma representação das configurações modais ao longo de todo o comprimento dos tramos da ponte, através do ajuste duma função polinomial de 2ª ordem às componentes modais avaliadas nos três pontos instrumentados em cada tramo.

Na figura 6.108 representam-se as configurações modais obtidas para o tramo E_1 - P_1 da via D, nas duas frequências identificadas (8,8 Hz e 14,3 Hz).

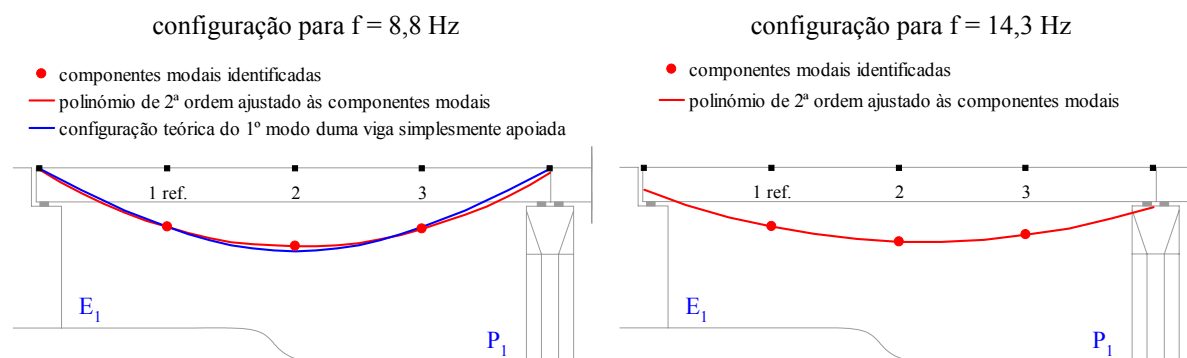


Figura 6.108 – Configurações identificadas para o tramo E_1 - P_1 da via D, nas frequências de 8,8 Hz e 14,3 Hz.

Na figura 6.108 representa-se também a configuração teórica do 1º modo de vibração vertical duma viga simplesmente apoiada (escalada de maneira a que a componente modal no ponto de referência é igual nas duas configurações representadas na figura). Como se pode verificar na figura 6.108, há uma concordância muito boa entre a configuração teórica e o polinómio de 2ª ordem ajustado às componentes modais identificadas, o que confirma e evidencia que a frequência de 8,8 Hz corresponde ao 1º modo de vibração vertical do tramo E_1 - P_1 da via D.

Quanto à frequência de 14,3 Hz, considerou-se que a mesma corresponde ao 1º modo de vibração de torção. De facto, com o polinómio de 2ª ordem ajustado às componentes modais identificadas nessa frequência, obtiveram-se componentes não nulas nas secções sobre os apoios, o que, considerando que os acelerómetros foram colocados próximo da extremidade das consolas laterais do tabuleiro, deve verificar-se no 1º modo de vibração de torção.

As frequências e configurações do 1º modo vertical e do 1º modo de torção dos 12 tramos da ponte de Canelas foram avaliadas através do método BFD. Obtiveram-se ligeiras diferenças nas frequências e configurações estimadas para cada tramo (que devem resultar da existência de pequenas diferenças na rigidez e massa dos diferentes tramos). As frequências identificadas com o método BFD para cada tramo da ponte, são indicadas no quadro 6.23.

Os registos de acelerações transversais e longitudinais foram também analisados, tendo-se determinado as correspondentes funções de densidade espectral. Essa análise não foi contudo, conclusiva em termos de identificação de características dinâmicas da ponte.

Para a aplicação do método ITD, consideraram-se apenas os registos verticais a meio vão de cada tramo da ponte. Para determinar as funções de resposta em regime livre, às quais aplicou-se o método ITD, determinou-se a média de amostras com 2 segundos de duração, retiradas das acelerações registadas imediatamente após os comboios terem passado sobre a ponte. Utilizou-se assim uma técnica semelhante ao método do decremento aleatório (RD) apresentado no capítulo 4. As amostras consideradas para o cálculo das funções de resposta em regime livre foram seleccionadas com uma mesma condição inicial de *passagem por zero com inclinação positiva* (Ibrahim, 2001). As funções de resposta em regime livre, obtidas para os pontos de meio vão dos dois tabuleiros do tramo E₁-P₁, são apresentadas na figura 6.109.

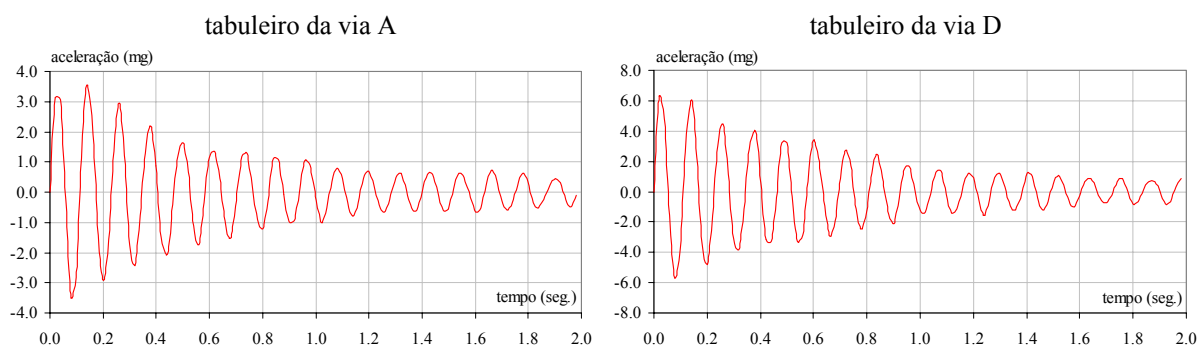


Figura 6.109 – Funções de resposta em regime livre nos dois tabuleiros do tramo E₁-P₁.

O método ITD foi implementado num programa em *LabView* e aplicado na análise das funções de resposta em regime livre avaliadas de acordo com o processo acima descrito. Os

coeficientes de amortecimento (ξ) e as frequências estimadas com o método ITD para o 1º modo de vibração vertical dos diversos tramos da ponte, são indicados no quadro 6.23.

Quadro 6.23 – Características dinâmicas identificadas para a ponte de Canelas.

tramo	via	método BFD		método ITD	
		1º modo vertical	1º modo de torção	1º modo vertical	
		f (Hz)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)
E1-P1	A	8,8	15,4	8,6	2,3
	D	8,8	14,3	8,7	2,1
P1-P2	A	8,8	15,8	9,0	2,4
	D	8,8	15,4	8,9	1,8
P2-P3	A	8,6	15,0	8,8	2,0
	D	8,8	14,8	9,0	1,8
P3-P4	A	9,0	16,0	9,1	1,8
	D	9,2	15,2	9,2	2,3
P4-P5	A	8,6	15,6	8,8	1,7
	D	9,4	15,0	9,2	2,1
P5-E2	A	8,6	15,6	8,8	1,5
	D	8,8	15,0	8,8	2,2

Analisando os valores apresentados no quadro 6.23 pode-se verificar que há ligeiras diferenças entre as frequências identificadas com os dois métodos (diferenças que no máximo atingem os 0,2 Hz); note-se que as funções de densidade espectral consideradas no método BFD, foram estimadas com uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,195$ Hz. Os valores obtidos com o método ITD podem ser considerados como mais fiáveis do que os avaliados com o método BFD, uma vez que na sua avaliação não há os problemas relacionados com a resolução finita em frequência e com o efeito de *leakage*, que existem nas funções de densidade espectral analisadas no método BFD.

Para efeitos de calibração das características do modelo de viga simplesmente apoiada, considerado para efectuar as simulações analíticas da passagem do sistema de forças correspondente ao comboio pendular, foram considerados os menores valores das frequências e do coeficiente de amortecimento, estimados para os diversos tramos da ponte.

Considerações finais:

O estudo efectuado sobre o comportamento dinâmico da ponte de Canelas sob a acção do tráfego ferroviário permitiu ao autor deste trabalho contactar com mais uma aplicação prática em que também é importante conhecer as características dinâmicas *reais* duma estrutura: a avaliação da capacidade de uma ponte para suportar o tráfego de comboios de alta velocidade. Conforme já referido, o estudo desenvolvido (LNEC – Rodrigues, 2001) envolveu diversas componentes que não foram descritas em pormenor neste trabalho, por ficarem um pouco fora do seu âmbito.

Sendo a ponte de Canelas constituída por tramos simplesmente apoiados com vãos relativamente pequenos (12 m), na análise de identificação modal procurou-se apenas identificar as características dos primeiros modos de vibração (do 1º modo de vibração vertical e do 1º modo de vibração de torção), pois elas seriam suficientes para o objectivo do estudo efectuado.

No caso da ponte de Canelas, como os seus tramos têm frequências naturais de vibração com valores relativamente elevados, seria possível aplicar métodos de ensaio com vibração forçada (e consequentemente, métodos de identificação modal *clássica* com análise da entrada e da resposta) não havendo os problemas, referidos no capítulo 3, que se verificam em estruturas mais flexíveis (por exemplo pontes de grande vão) relacionados com a dificuldade de aplicar forças de excitação que induzam respostas significativamente superiores às devidas às acções ambiente. Note-se, no entanto, que com a metodologia adoptada, aproveitaram-se as acções a que a ponte está normalmente sujeita, sem interferir com o seu funcionamento normal (a realização de ensaios de vibração forçada exigiria a interrupção do tráfego na ponte, o que constituiria sempre um transtorno para o funcionamento da linha do Norte), tendo-se conseguido obter as características dinâmicas pretendidas.

Na análise de identificação modal utilizaram-se os métodos BFD e ITD. A ideia de utilizar a resposta em regime livre, que se verifica imediatamente após os comboios passarem por uma ponte, mostrou ser adequada e foi também explorada em outros três estudos efectuados em pontes ferroviárias, um dos quais será apresentado mais adiante.

6.2.8 Passagem superior PS17 da auto-estrada A14

Considerações gerais:

Os ensaios de caracterização dinâmica da passagem superior PS17 da auto-estrada A14 (LNEC – Rodrigues, 2001) foram efectuados no âmbito dos ensaios de recepção dessa estrutura, realizados pelo LNEC no fim da sua construção.

O estudo efectuado na PS17, teve como objectivo a avaliação experimental de características dinâmicas da estrutura, nomeadamente frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos seus modos verticais e de torção. Efectuaram-se assim ensaios de medição da resposta em aceleração da estrutura, sob a acção do tráfego de camiões carregados (os mesmos que foram utilizados nos ensaios de carga estáticos) e de algum tráfego corrente que, na altura de realização dos ensaios, já circulava sobre a estrutura. Este estudo foi apresentado numa conferência nacional (Rodrigues, 2001) e foi publicado num artigo na revista *Mecânica Experimental* (Rodrigues, 2001).

Breve descrição da passagem superior PS17 da auto-estrada A14:

A passagem superior PS17 está localizada no troço S^{ta}. Eulália – Coimbra (Norte) da auto-estrada A14. Tem um comprimento total de 68 m entre eixos dos encontros, dividido em dois vãos laterais de 16 m e um vão central de 36 m (ver figura 6.110). É uma estrutura em pórtico com o tabuleiro monoliticamente ligado aos dois pilares intermédios e apoiado nos encontros através de aparelhos de apoio unidireccionais.

Os pilares da PS17, têm secção circular com 1,20 m de diâmetro e alturas de 7,89 m e 7,79 m. As fundações dos pilares são directas, sendo constituídas por sapatas quadradas com 5,0 m de lado e 1,5 m de altura. No caso dos encontros, as fundações são indirectas, sendo formadas por 8 estacas com 0,8 m de diâmetro e comprimentos de 11,4 m e 8,4 m.

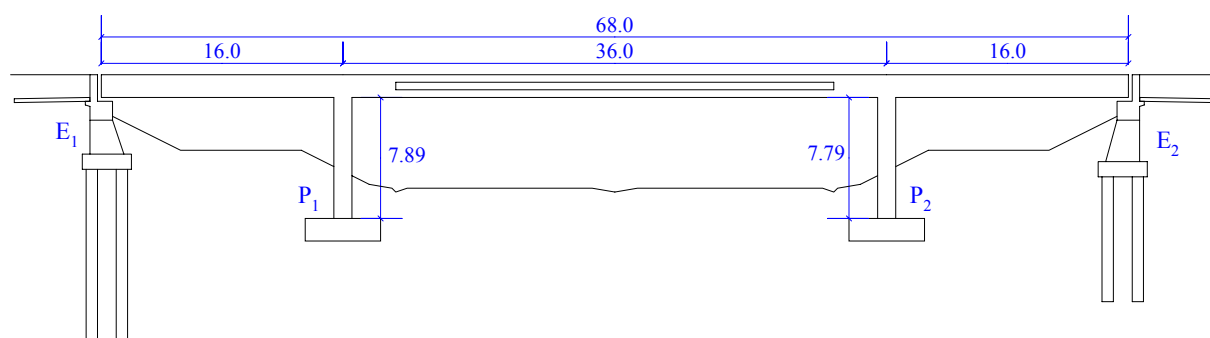


Figura 6.110 – Corte longitudinal da PS17.

O tabuleiro da PS17 é constituído por uma viga-laje com secção transversal trapezoidal que se prolonga lateralmente em consolas de espessura variável. Nos vãos laterais e na zona sobre os pilares, a viga-laje é em secção cheia, enquanto que no vão central, numa extensão de 29,0 m, a secção é aligeirada por intermédio de 4 vazados circulares com 0,90 m de diâmetro (ver figura 6.111). A altura do tabuleiro é de 1,50 m e a sua largura total é de 11,10 m.

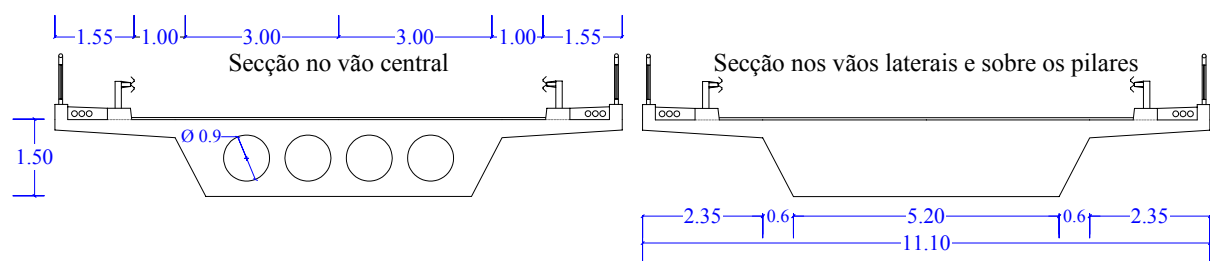


Figura 6.111 – Secções transversais do tabuleiro da PS17.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Os ensaios de caracterização dinâmica da PS17 foram efectuados com o seguinte equipamento (cujas características foram já descritas no capítulo 3):

- 12 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo ES-U da Kinemetrics;
- 4 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;
- 1 computador portátil com 1 placa *DAQ Card AI-16XE-50* da National Instruments, com conversão analógica/digital a 16 bits;
- 1 chassis SCXI-1000DC com 32 canais;
- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição.

Os ensaios efectuados visaram a identificação experimental dos modos verticais e de torção do tabuleiro da PS17, tendo-se medido apenas acelerações na direcção vertical.

Utilizou-se uma técnica de ensaio em que se escolheu uma secção de referência onde se colocaram transdutores que aí permaneceram em todos os ensaios realizados, enquanto que os restantes acelerómetros foram colocados, em cada ensaio, em secções diferentes ao longo da estrutura. Instrumentaram-se assim 22 pontos da estrutura, em 11 secções do tabuleiro, ver figuras 6.112 e 6.113.

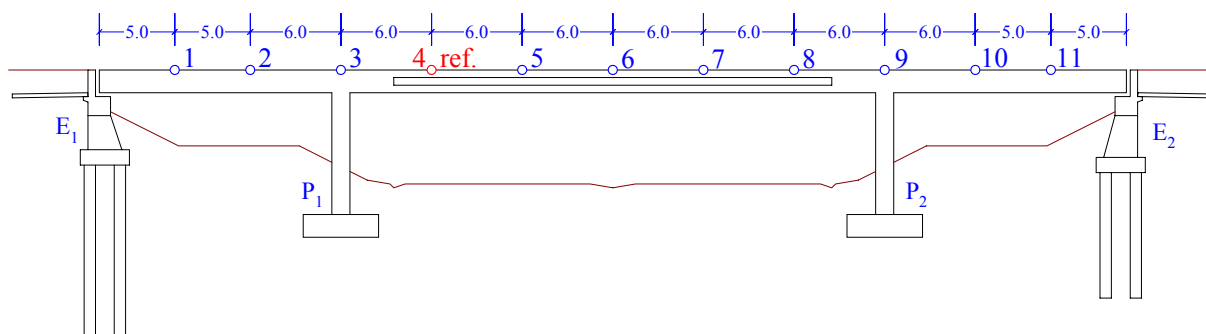


Figura 6.112 – Secções instrumentadas nos ensaios da PS17.

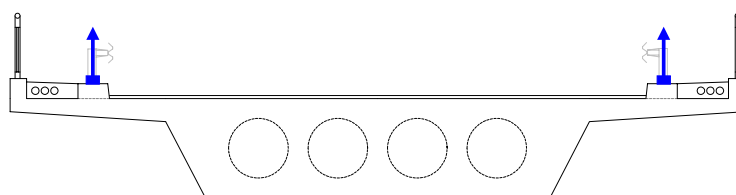


Figura 6.113 – Pontos de colocação dos acelerómetros em cada secção.

Na PS17 foram efectuados dois ensaios, correspondendo cada um deles a colocações diferentes dos acelerómetros na estrutura. Na figura 6.114 e no quadro 6.24 indicam-se os pontos instrumentados em cada ensaio.

Nos dois ensaios efectuados, fizeram-se circular 4 camiões sobre a estrutura com velocidades de 30 a 40 km/h. Estes camiões, com cerca de 300 kN de peso, foram os mesmos que tinham sido utilizados nos ensaios de carga estáticos.

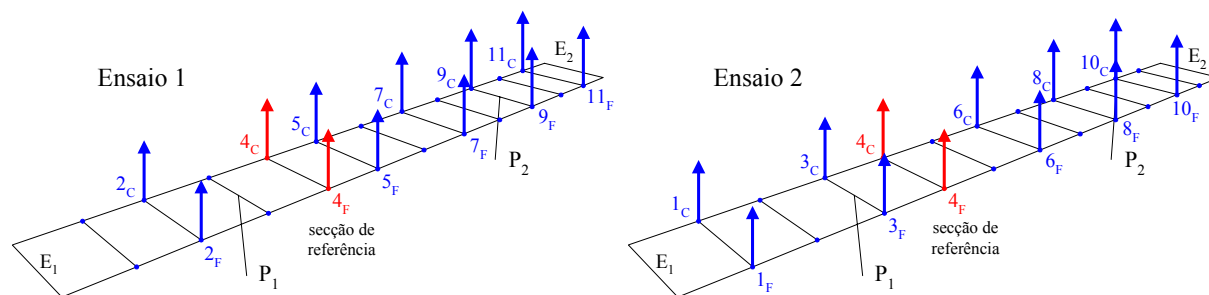


Figura 6.114 – Ensaios efectuados na PS17.

Quadro 6.24 – Pontos instrumentados em cada ensaio.

Ensaio	unidade 1			unidade 2			unidade 3			unidade 4		
	cn.1	cn.2	cn.3	cn.4	cn.5	cn.6	cn.7	cn.8	cn.9	cn.10	cn.11	cn.12
1	2 _F	4 _F	5 _F	2 _C	4 _C	5 _C	7 _F	9 _F	11 _F	7 _C	9 _C	11 _C
2	1 _F		3 _F	1 _C		3 _C	6 _F	8 _F	10 _F	6 _C	8 _C	10 _C

Na figura 6.115 podem observar-se duas fases dos ensaios realizados na PS17.



Figura 6.115 – Fases dos ensaios realizados na PS17.

A frequência de amostragem utilizada nos ensaios foi de 200 Hz, e em cada um deles obtiveram-se registos com cerca de 19 minutos de duração. No sistema de medição, utilizou-se uma configuração que permitiu discretizar uma amplitude mínima de aceleração de 2,44 μg .

Identificação modal:

O método de identificação modal estocástica utilizado para analisar os registos obtidos nos ensaios efectuados na PS17 (LNEC – Rodrigues, 2001) foi o método BFD que já foi descrito no capítulo 4.

Antes da aplicação do método de identificação modal, os registos da resposta da estrutura, obtidos nos ensaios foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-baixo a 40 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 4;

- decimação dos registos, dos 200 Hz com que foram adquiridos nos ensaios, para 100 Hz.

Ao nível do pré-processamento dos registos, foram ainda calculadas as séries correspondentes à semi-soma e à semi-diferença dos dois registos verticais obtidos em cada secção instrumentada. As séries assim determinadas foram as consideradas na análise subsequente de identificação modal pois dessa forma tornou-se bastante mais fácil distinguir entre modos verticais e modos de torção.

Para ilustrar as séries obtidas após o pré-processamento, apresentam-se na figura 6.116, amostras das acelerações registadas na secção 6 (a $\frac{1}{2}$ vão do tramo central).

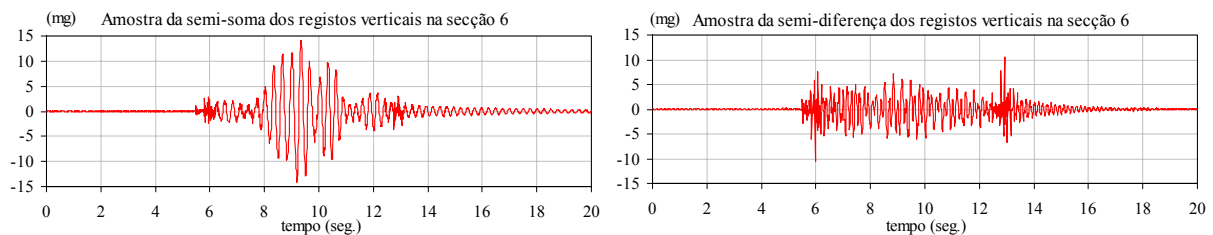


Figura 6.115 – Amostras dos registos na secção 6.

As funções de densidade espectral da resposta da estrutura foram avaliadas através do algoritmo da FFT, utilizando a técnica descrita no capítulo 4. Nessa avaliação, os registos totais foram subdivididos em amostras com 4096 valores, donde resulta, para a frequência de amostragem de 100 Hz, uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,024$ Hz. Antes do cálculo das funções de densidade espectral, a cada uma das amostras foi aplicada uma janela de *Hanning* para reduzir os efeitos de escorregamento (*leakage*).

Os espectros normalizados médios foram calculados separadamente para a semi-soma dos registos verticais (figura 6.117), para identificar as frequências de modos verticais, e para a semi-diferença dos registos verticais (figura 6.118), para identificar as frequências de modos de torção.

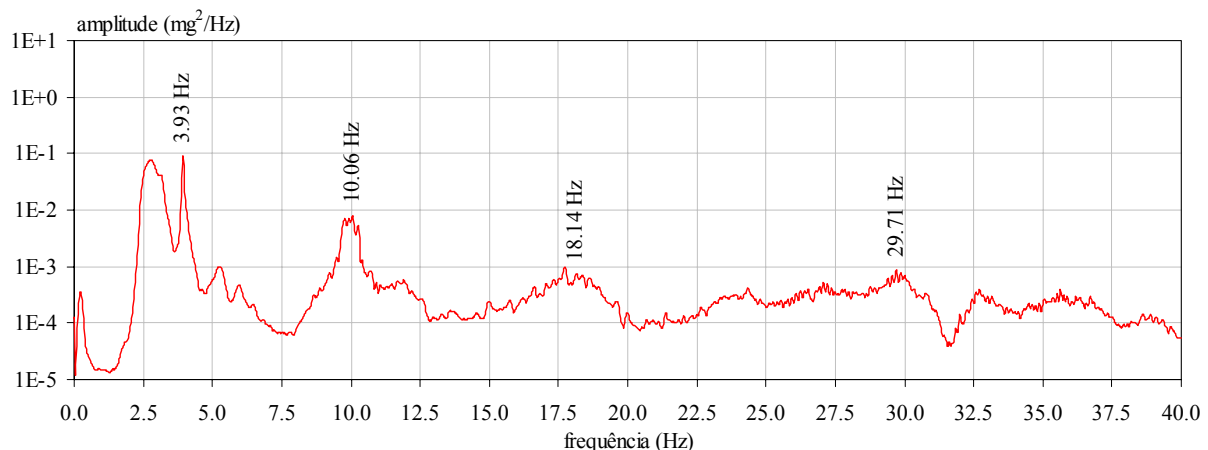


Figura 6.117 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.

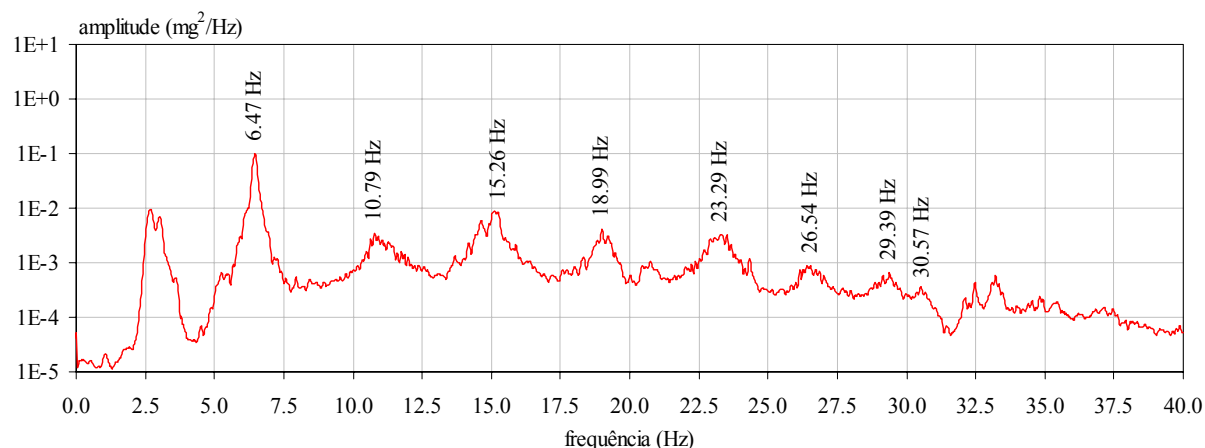


Figura 6.118 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.

Nas figuras 6.117 e 6.118 indicam-se também as frequências que foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração da estrutura. Na escolha dessas frequências, para além da selecção dos picos de ressonância mais evidentes, foi também feita uma análise dos valores das funções de coerência e das relações de amplitude e fase (configurações) entre as diferentes secções instrumentadas. Verificou-se assim que:

- o pico na frequência de 0,24 Hz (ver figura 6.117) não corresponde a um modo natural de vibração da PS17; este pico deve-se à deformada da estrutura induzida pelas cargas rolantes (camiões carregados) que a atravessaram durante os ensaios; note-se que uma carga rolante a 30 km/h tem um período de circulação sobre o vão central (36 m) de 4,36 segs., o que corresponde a uma deformada da estrutura com uma frequência de 0,23 Hz;
- o pico bastante evidente na frequência de 2,76 Hz (ver figuras 6.117 e 6.118) também não corresponde a um modo natural de vibração da PS17; analisando este pico e o pico seguinte na frequência de 3,93 Hz, concluiu-se que ele se deve às frequências de vibração da carga dos camiões sobre os seus sistemas de suspensão, que normalmente têm valores entre 2 Hz e 5 Hz (Paultre *et al.*, 1995); para confirmar esta hipótese, calcularam-se as funções de densidade espectral com uma amostra que não contem os instantes de passagem dos camiões, e verificou-se que o pico a 3,93 Hz mantém-se nessas funções de densidade espectral, enquanto que o pico a 2,76 Hz desaparece.

Este caso permite ilustrar uma das questões que se coloca na identificação modal estocástica e que foi salientada no capítulo 4 – nas funções de densidade espectral da resposta dum sistema ou nas matrizes de estado de modelos ajustados a essa resposta, podem surgir picos de ressonância ou pólos que são devidos às acções ambiente e não a modos dos sistemas. Nos métodos de identificação modal estocástica, é necessário distinguir entre uns e outros, para tal, consoante o método que estiver a ser utilizado, é importante analisar a função de coerência entre os registos de resposta em diferentes pontos, ou analisar os diagramas de

estabilização. Para fazer essa distinção pode também ser importante comparar os modos identificados com os calculados com modelos de elementos finitos, ou procurar compreender, como se fez neste caso, se determinados picos ou pólos identificados na resposta, estão associados a alguns eventos particulares (como por exemplo os instantes de passagem dum camião).

Portanto, no caso da análise efectuada para a PS17, concluiu-se que a frequência de 2,76 Hz é de facto uma frequência das acções ambiente (o tráfego de camiões) e não dum modo natural de vibração da estrutura.

As configurações dos modos de vibração da PS17 foram avaliadas de acordo com o método BFD, já descrito no capítulo 4. Na representação gráfica das configurações dos modos de vibração identificados, incluem-se também os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais em cada secção. As configurações modais identificadas, serão apresentadas mais adiante, em paralelo com as calculadas com um modelo de elementos finitos.

Para avaliar os coeficientes de amortecimento, foi utilizado o método, já apresentado no capítulo 4, que consiste no ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto espectros das acelerações registadas nos ensaios.

Com o método de identificação modal estocástica utilizado, identificaram-se as frequências, configurações e coeficientes de amortecimento de 12 modos de vibração da passagem superior PS17 (4 modos verticais e 8 modos de torção). No quadro 6.25 indicam-se os valores das frequências e dos coeficientes de amortecimento, identificados experimentalmente.

Comparação com um modelo de elementos finitos:

Em paralelo com o estudo de caracterização dinâmica experimental da PS17, desenvolveu-se também um modelo de elementos finitos. Na fase de planeamento dos ensaios, este modelo constituiu um elemento importante para a escolha da secção de referência e de todas as secções a instrumentar. Tal como nalguns exemplos anteriores, os resultados obtidos com o modelo ajudaram também na interpretação dos resultados experimentais.

O modelo elaborado é um modelo espacial, sendo constituído por: 128 elementos de casca para as consolas laterais do tabuleiro; 12 elementos de barra para os pilares; 180 elementos de barra para o tabuleiro; e, 4 elementos de ligação para os aparelhos de apoio nos encontros. No total, o modelo tem 1050 graus de liberdade.

No modelo desenvolvido, representado na figura 6.119, as fundações dos pilares foram consideradas como apoios rígidos. Foram ainda admitidas as seguintes características:

- módulo de elasticidade, $E = 35,0 \text{ GPa}$ para todos os elementos estruturais;
- rigidez dos aparelhos de apoio nos encontros:
 - $k_L = 4 \times 10^3 \text{ kN/mm}$ (longitudinal);
 - $k_T = 1 \times 10^7 \text{ kN/mm}$ (transversal);
 - $k_V = 1 \times 10^{12} \text{ kN/mm}$ (vertical);
- para além da massa da estrutura, considerou-se ainda a massa correspondente às restantes cargas permanentes, com um valor de 173 kg/m^2 .

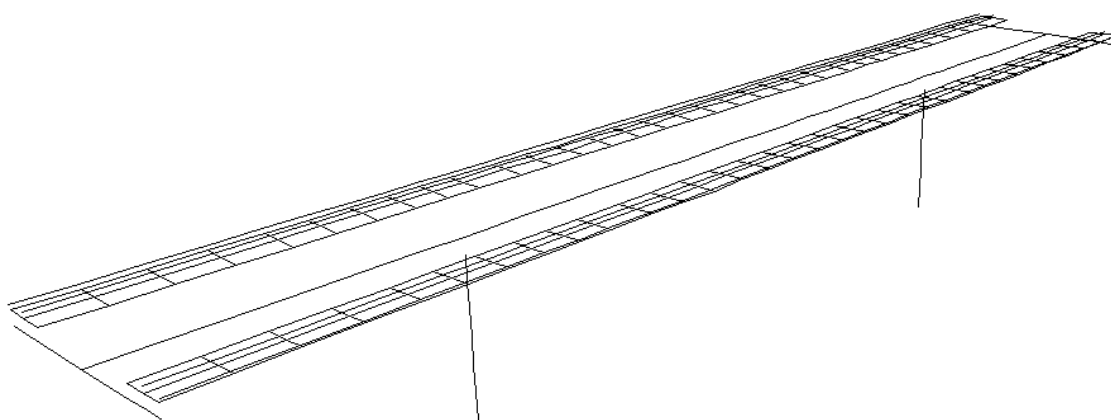


Figura 6.119 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da PS17.

No quadro 6.25 indicam-se os valores das frequências calculadas com o modelo de elementos finitos, comparando-as com as identificadas experimentalmente. Na figura 6.120 essa comparação é feita graficamente. Como se pode verificar, há um bom ajuste entre as frequências identificadas e as calculadas com o modelo de elementos finitos; sendo esse ajuste um pouco melhor para as frequências dos modos verticais do que para as frequências dos modos de torção.

Quadro 6.25 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.

Modos verticais			Modos de torção		
ensaios		modelo	ensaios		modelo
f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
3,93	1,2	3,06	6,47	1,4	7,24
10,06	2,0	8,12	10,79	3,0	12,68
18,14	0,4	16,15	15,26	1,2	16,11
29,71	2,2	28,15	18,99	1,9	19,30
			23,29	2,1	21,96
			26,54	1,6	24,06
			29,39	2,5	25,95
			30,57	0,2	27,96

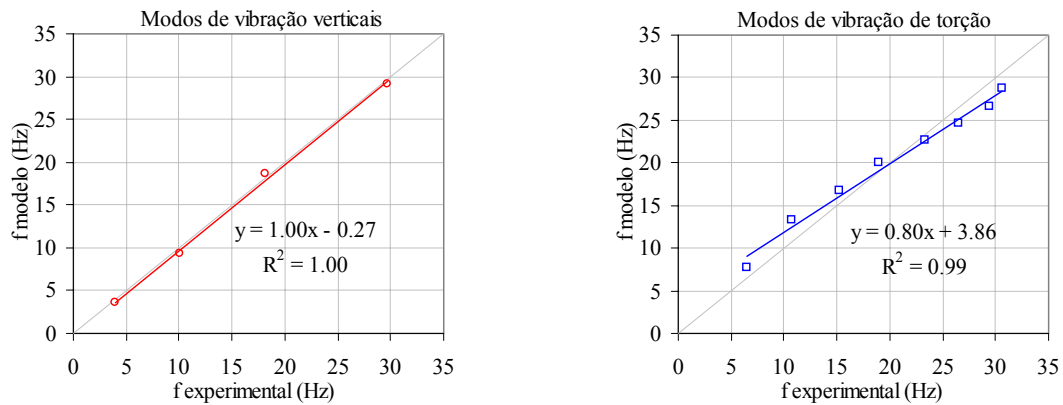


Figura 6.120 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.

Na figura 6.121 comparam-se as configurações identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração vertical da PS17. Como se pode verificar nessa figura, há uma boa concordância entre as configurações experimentais e as calculadas com o modelo.

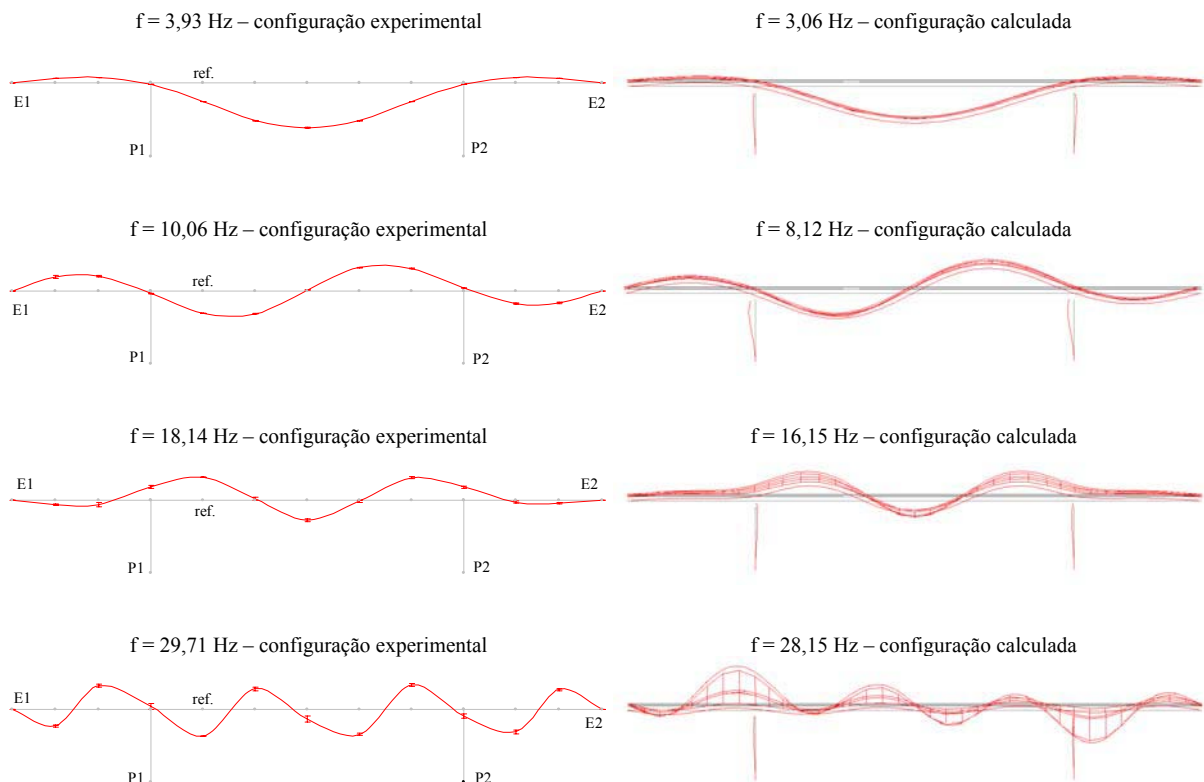


Figura 6.121 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais da PS17.

Na configuração identificada para o 3º modo vertical, aparece uma componente vertical importante na secção sobre os pilares, note-se no entanto que os acelerómetros foram colocados aproximadamente a meio das consolas laterais da secção transversal do tabuleiro. Assim, essa

componente vertical na secção sobre os pilares, resulta fundamentalmente da flexão das consolas e não propriamente da deformação axial dos pilares.

Na figura 6.122 comparam-se as configurações experimentais com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração de torção da PS17. Para esses modos, há também uma boa concordância entre as configurações experimentais e as calculadas com o modelo.

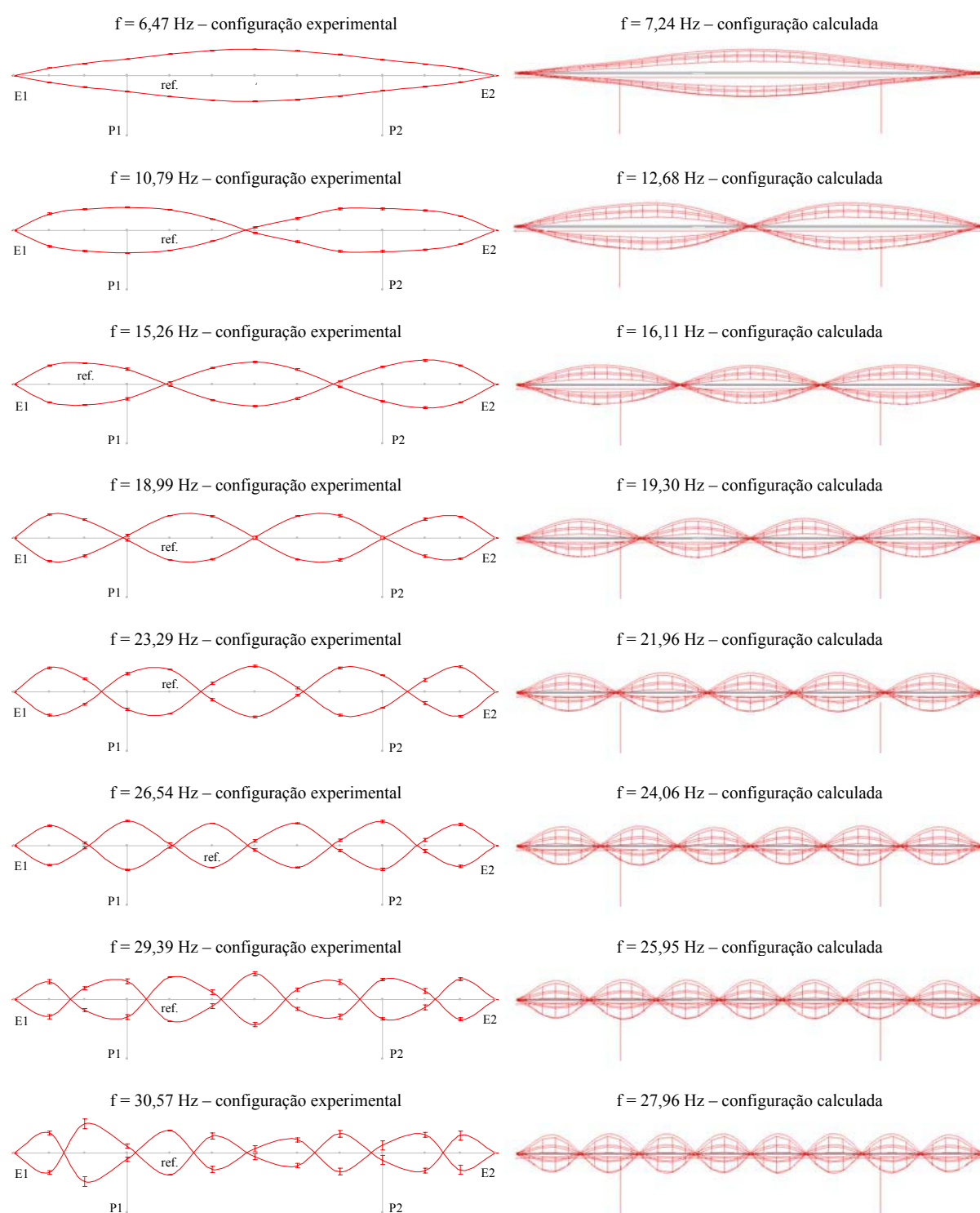


Figura 6.122 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção da PS17.

Para comparar as configurações identificadas experimentalmente com as calculadas com o modelo de elementos finitos, determinaram-se também os coeficientes MAC que exprimem a correlação entre ambas as configurações (valores de 1 indicam uma correlação perfeita e de 0 exprimem a existência de uma má correlação, conforme referido no capítulo 5). Na figura 6.123 apresentam-se graficamente as matrizes dos valores MAC obtidos; como se pode verificar, os elementos da diagonal principal dessa matriz são todos muito próximos de 1, enquanto que os restantes elementos são todos muito próximos de 0, o que mostra a boa correlação entre as componentes modais identificadas e as calculadas com o modelo.

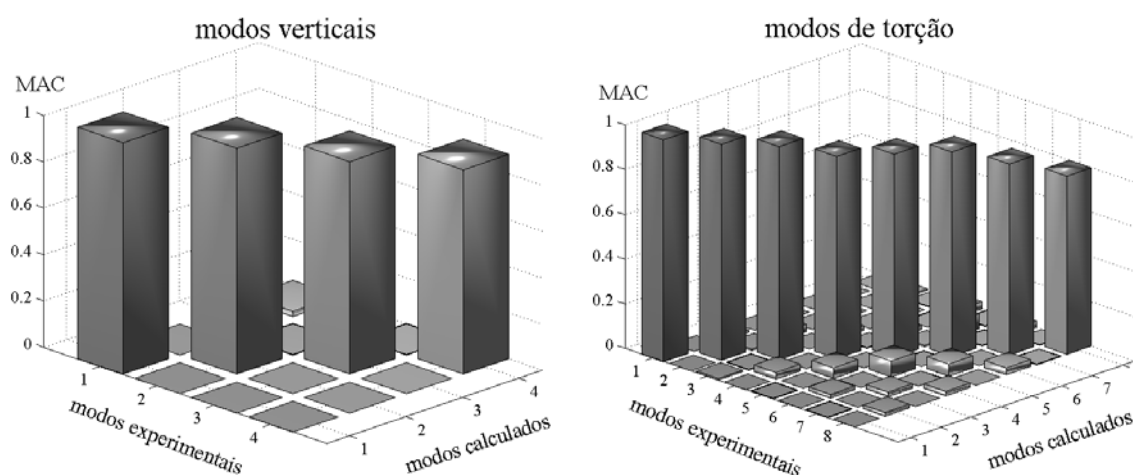


Figura 6.123 – Coeficientes MAC.

Considerações finais:

Aplicando um método de identificação modal estocástica na análise de registos de acelerações obtidos em ensaios realizados *in situ*, foram identificadas as características de 12 modos de vibração da PS17, incluindo as suas frequências, configurações e coeficientes de amortecimento.

As características dinâmicas identificadas experimentalmente foram também comparadas com as avaliadas com um modelo de elementos finitos, verificando-se uma boa concordância entre resultados experimentais e analíticos.

Há dois aspectos do estudo efectuado na PS17, que se julga ter interesse salientar:

- Foi possível identificar modos até frequências com valores já perto dos 30 Hz, o que em termos de estruturas de engenharia civil já é um valor que se pode considerar como elevado; este facto mostra por um lado a capacidade dos transdutores utilizados, em responderem bem até essas frequências, e também dos métodos de identificação modal estocástica aplicados à resposta das estruturas, induzida pelas acções a que normalmente estão sujeitas;

- O facto de se ter detectado um pico de ressonância que corresponde à acção dos camiões e não a um modo natural de vibração da estrutura, permite ilustrar uma das questões que se coloca na identificação modal estocástica, que é a capacidade de distinguir os picos de ressonância ou os pólos dos modos do sistema a identificar, de eventuais picos de ressonância ou pólos do sistema das acções ambiente.

6.2.9 Viaduto V1 da auto-estrada A14

Considerações gerais:

O estudo de caracterização dinâmica experimental do viaduto V1 da auto-estrada A14 (LNEC – Rodrigues, 2001) foi efectuado no âmbito dos ensaios de recepção dessa obra, realizados pelo LNEC no fim da sua construção e antes da sua abertura ao tráfego.

O estudo efectuado no viaduto V1 consistiu na realização de ensaios *in situ*, para medição da resposta em aceleração da estrutura, sob a acção do tráfego de camiões carregados (os mesmos que foram utilizados nos ensaios de carga estáticos), e na aplicação dum método de identificação modal estocástica, para avaliação de frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração do viaduto.

Breve descrição do viaduto V1 da auto-estrada A14:

O viaduto V1 está localizado no troço S^{ta}. Eulália – Coimbra (Norte) da auto-estrada A14. É uma obra de arte constituída por dois viadutos semelhantes, cada um dos quais serve uma das faixas de rodagem da auto-estrada. Ambos os viadutos têm uma extensão total de 467 m entre eixos dos encontros, subdividida em 14 tramos intermédios com vãos de 30,5 m e 2 tramos extremos com vãos de 20 m (ver figura 6.124).

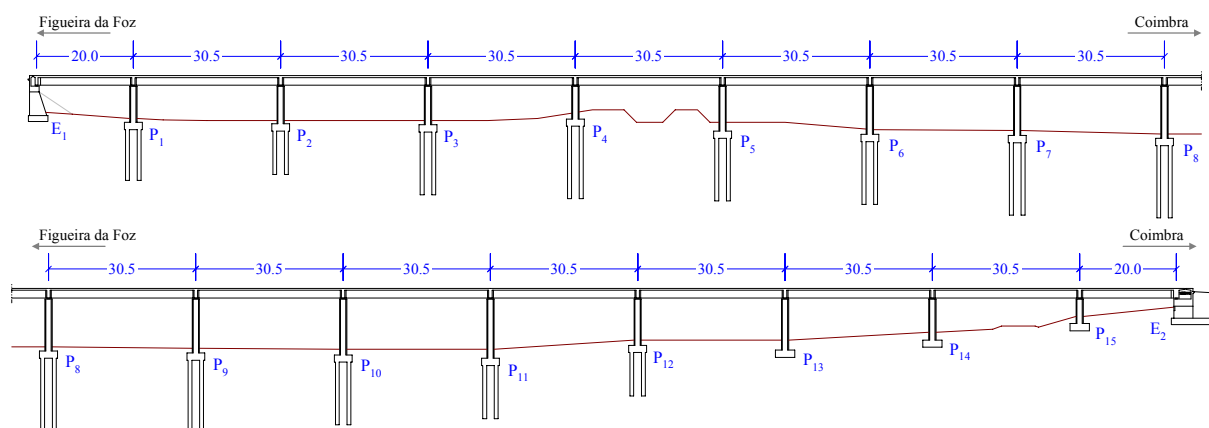


Figura 6.124 – Corte longitudinal do viaduto V1.

Os tabuleiros dos viadutos são contínuos em toda a sua extensão, apoiando-se nos pilares e nos encontros, através de aparelhos de apoio. Nos pilares P_8 e P_9 os aparelhos de apoio são fixos em ambas as direcções, enquanto que nos restantes pilares, são unidireccionais, restringindo apenas os deslocamentos na direcção transversal ao eixo do viaduto.

Nos encontros, o tabuleiro apoia-se também em aparelhos de apoio unidireccionais, havendo ainda no encontro E_2 , dispositivos oleodinâmicos, colocados segundo a direcção longitudinal, para efeitos de transmissão e dissipação das forças longitudinais resultantes da acção dos sismos.

Os pilares têm alturas desde cerca de 5 m até cerca de 12 m. As suas fundações são constituídas ou por grupos de 6 estacas encabeçadas por maciços de fundação, ou, no caso dos pilares P_{13} a P_{15} , por sapatas de fundação directa.

As secções transversais dos viadutos têm uma forma em duplo T, com uma altura de 2,0 m, uma largura total de 14,7 m e uma distância de 8,2 m entre os eixos das vigas longitudinais (ver figura 6.125). Nas secções sobre os encontros e sobre os pilares, existem carlingas transversais com larguras de 0,6 m (encontro E_1), 1,1 m (encontro E_2) e 0,7 m (pilares).

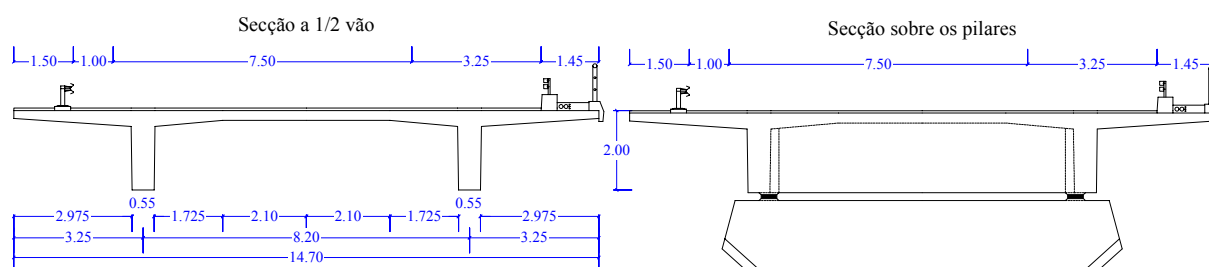


Figura 6.125 – Secções transversais do viaduto V1.

Os ensaios *in situ* de caracterização dinâmica do viaduto V1 foram efectuados apenas no viaduto do lado Sul. À data de realização desses ensaios, ainda não tinham sido colocadas todas as camadas do pavimento betuminoso no viaduto ensaiado. Faltava também terminar a colocação dos *rails* de protecção e os dispositivos oleodinâmicos ainda não tinham sido instalados.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Os ensaios de caracterização dinâmica do viaduto V1 foram efectuados com o seguinte equipamento (cujas características foram já descritas no capítulo 3):

- 15 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo ES-U da *Kinematics*;
- 5 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;
- 1 computador portátil com 1 placa *DAQ Card AI-16XE-50* da National Instruments, com conversão analógica/digital a 16 bits;

- 1 chassis SCXI-1000DC com 32 canais;
- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição.

Uma vez que o viaduto V1 tem 16 tramos com um comprimento total de 467 m, optou-se por efectuar os ensaios dinâmicos, observando a resposta da estrutura em apenas 4 desses tramos, de modo a não tornar os ensaios excessivamente morosos. Assim, os ensaios incidiram apenas sobre os tramos entre os pilares P_{10d} e P_{14d} , conforme se indica na figura 6.126.

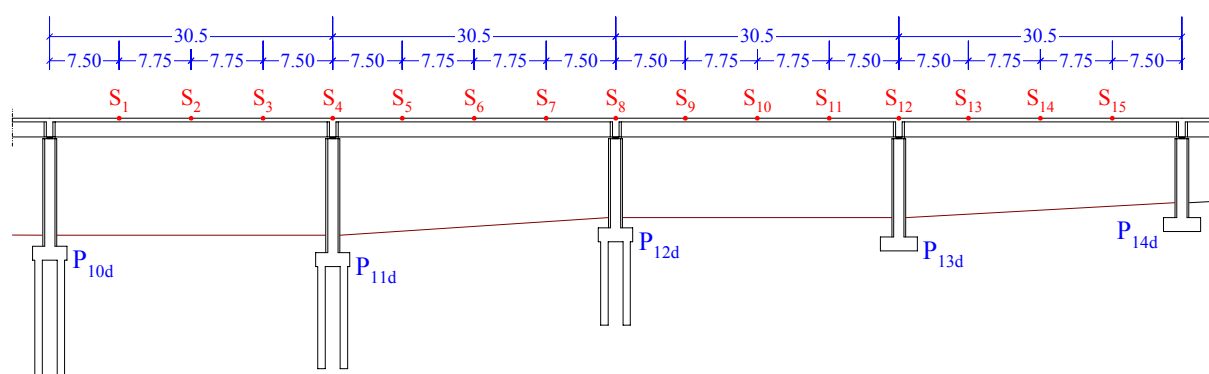


Figura 6.126 – Secções instrumentadas nos ensaios do viaduto V1.

Os acelerómetros ES-U foram colocados (ver figura 6.127) de modo a permitir avaliar os movimentos verticais e de torção nas 15 secções indicadas na figura 6.126, os movimentos transversais em 5 dessas secções e os movimentos longitudinais em apenas 3 delas. No total dos três ensaios efectuados, foram instrumentados 30 pontos do viaduto, conforme se indica nos esquemas em perspectiva apresentados na figura 6.128.

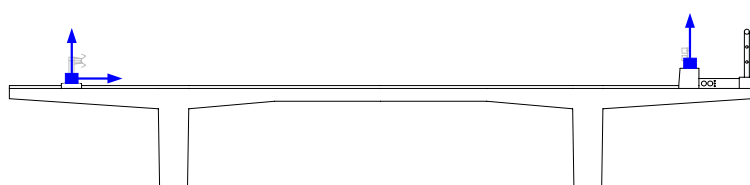


Figura 6.127 – Pontos de colocação dos acelerómetros em cada secção.

No quadro 6.26 e na figura 6.128 indicam-se os pontos instrumentados e a orientação dos 15 acelerómetros utilizados em cada um dos três ensaios efectuados.

Quadro 6.26 – Pontos instrumentados em cada ensaio do viaduto V1.

ensaio	unidade 1			unidade 2			unidade 3			unidade 4			unidade 5		
	cn.1	cn.2	cn.3	cn.4	cn.5	cn.6	cn.7	cn.8	cn.9	cn.10	cn.11	cn.12	cn.13	cn.14	cn.15
1	9 v.	11 v.	13 v.	10 v.	12 v.	14 v.	25 v.	27 v.	29 v.	26 v.	28 v.	30 v.	7 t.	11 t.	15 t.
2		7 v.	3 v.		8 v.	4 v.	19 v.	21 v.	23 v.	20 v.	22 v.	24 v.	23 t.	19 t.	
3		5 v.	1 v.		6 v.	2 v.	13 v.	15 v.	17 v.	14 v.	16 v.	18 v.	23 l.	19 l.	

v. – direcção vertical; t. – direcção transversal; l. – direcção longitudinal.

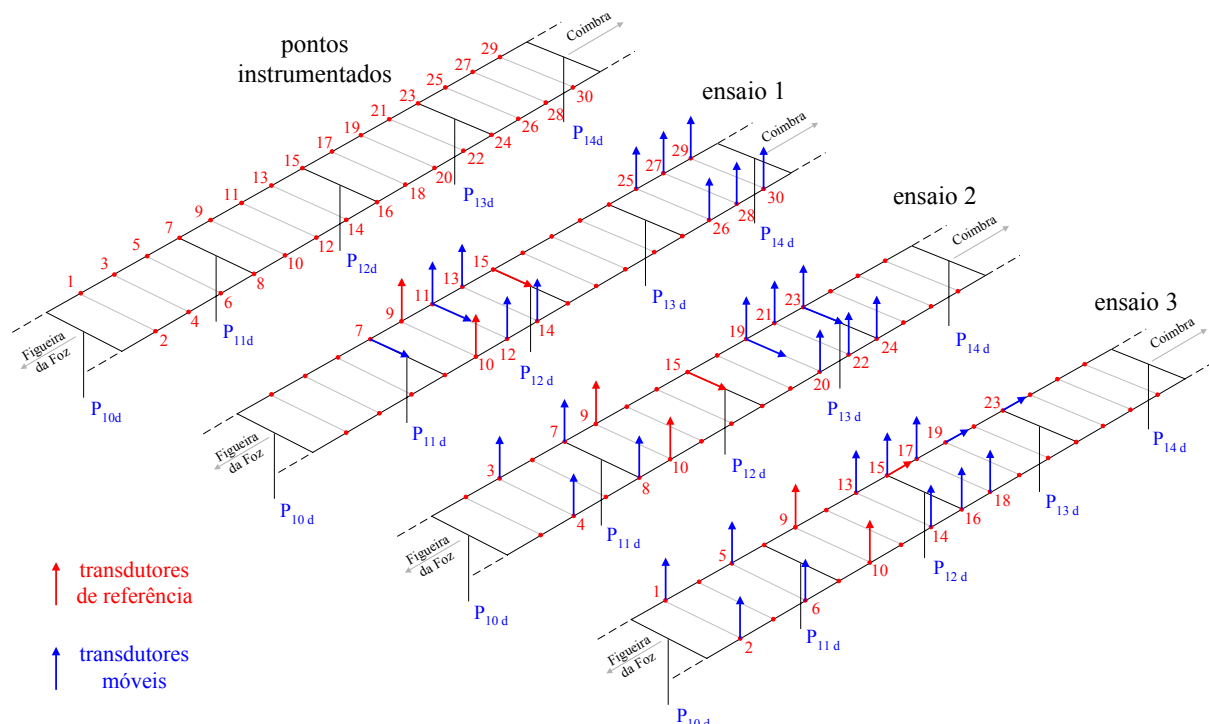


Figura 6.128 – Pontos instrumentados e sequência dos três ensaios efectuados no viaduto V1.

Durante os períodos de registo da resposta da estrutura, correspondentes a cada ensaio, fizeram-se circular sobre o viaduto os 6 camiões que também foram utilizados nos ensaios estáticos.

A frequência de amostragem utilizada foi de 200 Hz e em cada ensaio obtiveram-se registos com cerca de 14 minutos de duração total (163840 valores a 200 Hz). No sistema de medição, utilizou-se uma configuração que permitiu discretizar uma amplitude mínima de aceleração de 2,44 μg .

Identificação modal:

Na análise de identificação modal efectuada com os registos obtidos nos ensaios efectuados no viaduto V1, foi utilizado o método BFD que já foi descrito no capítulo 4.

Antes da aplicação do método de identificação modal, os registos da resposta da estrutura, obtidos nos ensaios foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-baixo a 20 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 4;
- decimação de 200 Hz para 50 Hz.

Ao nível do pré-processamento dos registos, foram também calculadas as séries resultantes da semi-soma e da semi-diferença dos dois registos verticais obtidos em cada secção instrumentada. As

séries assim determinadas foram as consideradas na análise subsequente de identificação modal, tornando mais fácil a distinção entre modos verticais e modos de torção.

As funções de densidade espectral da resposta da estrutura, foram estimadas através do algoritmo da FFT, utilizando a técnica descrita no capítulo 4. Nessa avaliação, os registos totais foram subdivididos em amostras com 4096 valores, donde resultou, para a frequência de amostragem de 50 Hz, uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,012$ Hz. A cada uma das amostras foi aplicada uma janela de *Hanning*, antes do cálculo das funções de densidade espectral, para reduzir os efeitos de escorregamento (*leakage*).

Os espectros normalizados médios foram calculados separadamente para a semi-soma dos registos verticais (figura 6.129), para a semi-diferença dos registos verticais (figura 6.130), para os registos transversais (figura 6.131) e para os registos longitudinais (figura 6.132).

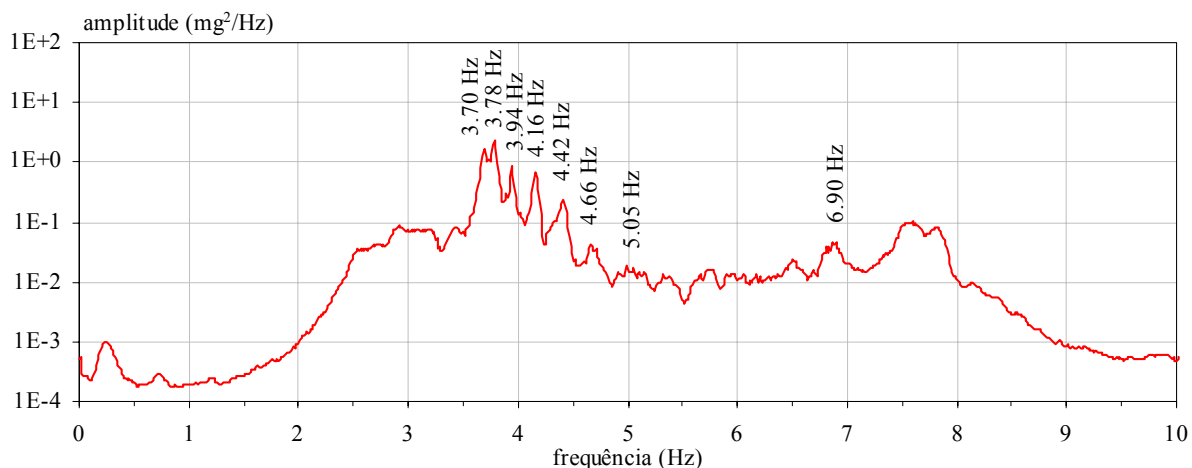


Figura 6.129 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.

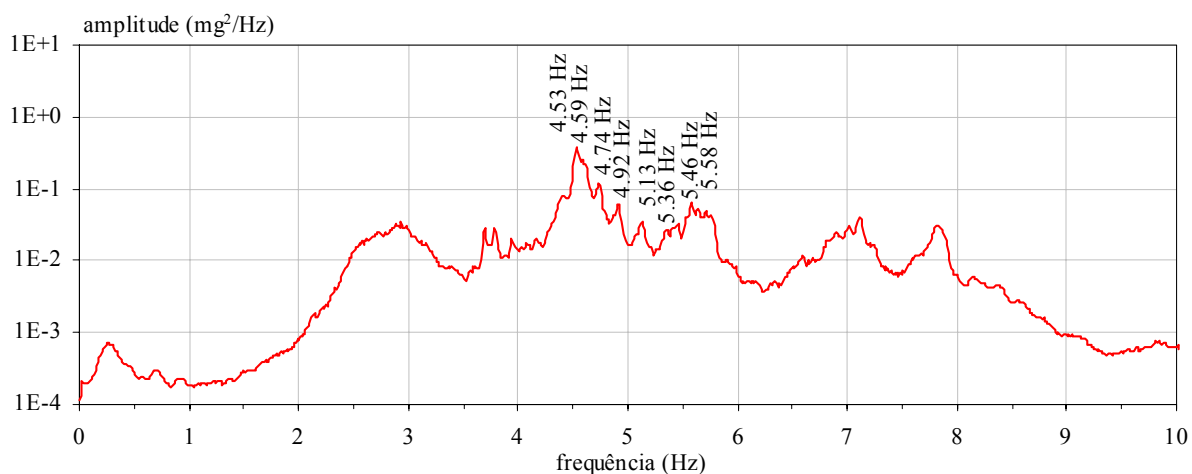


Figura 6.130 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registos verticais.

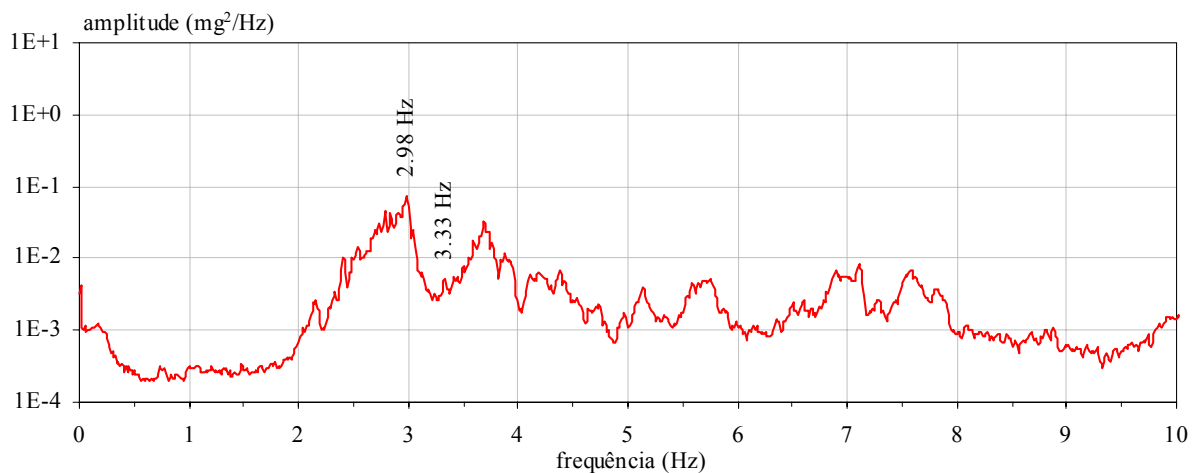


Figura 6.131 – Espectro normalizado médio dos registos transversais.

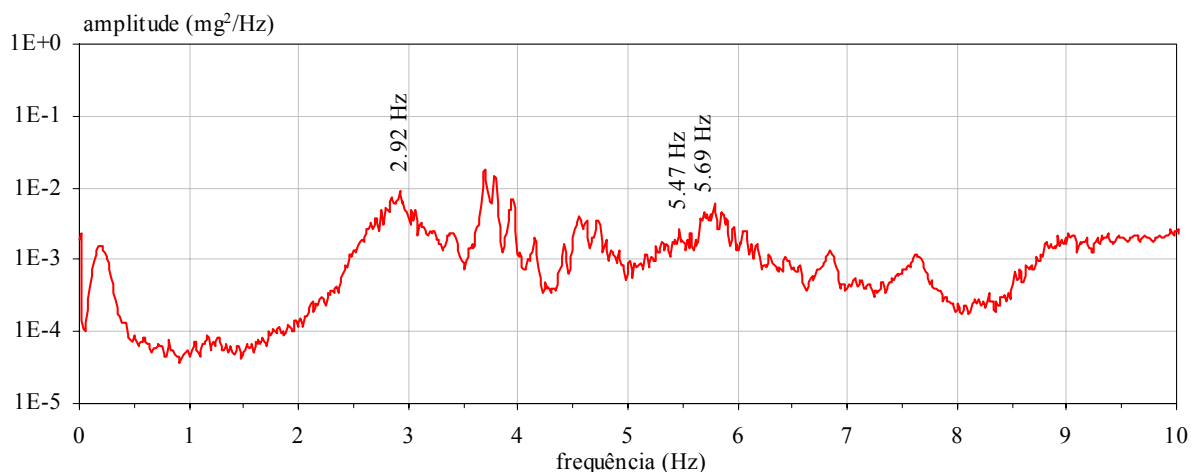


Figura 6.132 – Espectro normalizado médio dos registos longitudinais.

Nas figuras 6.129 a 6.132 indicam-se também as frequências que foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração da estrutura. Na selecção dessas frequências, teve-se em conta, os valores das funções de coerência e das relações de amplitude e fase (configurações) entre as diferentes secções instrumentadas.

Como se pode verificar nos espectros normalizados médios apresentados nas figuras 6.129 e 6.130, o viaduto V1 tem vários modos, quer verticais quer de torção, com frequências muito próximas. De facto, uma viga contínua de secção constante tem as frequências dos seus modos naturais de vibração, em zonas concentradas, havendo em cada uma dessas zonas tantos modos (com frequências muito próximas) quantos os tramos da viga contínua (Fryba, 1996). Considerando que esta especificidade das características dinâmicas desse tipo de estruturas se verifica quer nos modos verticais, quer nos modos de torção, os viadutos de tabuleiro contínuo com múltiplos tramos são um

dos casos de estruturas reais em que é difícil efectuar a identificação experimental das características dinâmicas.

As configurações modais identificadas através do método BFD, para o viaduto V1, serão apresentadas mais adiante, em paralelo com as calculadas com um modelo de elementos finitos. Na representação gráfica das configurações dos modos de vibração identificados, incluem-se também os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais em cada secção.

Para avaliar os coeficientes de amortecimento, foi utilizado o método, já apresentado no capítulo 4, que consiste no ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto espectros das acelerações registadas nos ensaios. Dada a proximidade entre as frequências dos modos de vibração do viaduto V1, para alguns modos, foi difícil conseguir um bom ajuste do espectro analítico aos valores experimentais, obtendo-se estimativas dos coeficientes de amortecimento que devem ser consideradas com alguma reserva.

Com o método de identificação modal estocástica utilizado, avaliaram-se as frequências e coeficientes de amortecimento de 21 modos de vibração do viaduto V1 (8 modos verticais, 8 modos de torção, 2 modos transversais e 3 modos longitudinais). Identificaram-se também as configurações desses modos de vibração, nos 4 tramos observados nos ensaios. Por comparação das configurações identificadas nesses tramos com as configurações calculadas com um modelo de elementos finitos, torna-se também possível depreender a configuração dos modos identificados, ao longo de toda a extensão do viaduto (conforme se apresentará adiante). No quadro 6.27 indicam-se os valores das frequências e dos coeficientes de amortecimento identificados experimentalmente.

Comparação com um modelo de elementos finitos:

Desenvolveu-se também um modelo de elementos finitos do viaduto V1 que, tal como em exemplos anteriores, foi um elemento importante para o planeamento dos ensaios e para a interpretação dos resultados experimentais.

O modelo elaborado é um modelo espacial (ver figura 6.133), sendo constituído por: 256 elementos de barra para as vigas longitudinais do tabuleiro; 76 elementos de barra para as carlingas transversais do tabuleiro; 15 elementos de barra para os pilares; 1024 elementos de casca para a laje do tabuleiro; 34 elementos de ligação para os aparelhos de apoio nos pilares e encontros; e 15 elementos de mola para as fundações dos pilares. No total o modelo tem 7116 graus de liberdade.

No modelo desenvolvido para o viaduto V1, foram consideradas as seguintes características:

- módulo de elasticidade: $E = 35 \text{ GPa}$ para os pilares, $E = 46,5 \text{ GPa}$ para o tabuleiro;

- rigidez dos aparelhos de apoio sobre os encontros e pilares:
 - $k_L = 8 \times 10^2$ kN/mm (longitudinal, encontros e pilares P_1 a P_7 e P_{10} a P_{15});
 - $k_L = 1 \times 10^{12}$ kN/mm (longitudinal, pilares P_8 e P_9);
 - $k_T = 1 \times 10^{12}$ kN/mm (transversal);
 - $k_V = 1 \times 10^{12}$ kN/mm (vertical);
- características dos elementos de mola na base dos pilares:
 - rígidos para o deslocamento vertical e rotação em torno do eixo vertical;
 - rigidez nas direcções transversal e longitudinal, $k_T = k_L = 1 \times 10^9$ kN/mm;
 - rigidez para a rotação em torno do eixo longitudinal, $k_{\theta L} = 68 \times 10^6$ kN.m/rad;
 - rigidez para a rotação em torno do eixo transversal, $k_{\theta T} = 70 \times 10^6$ kN.m/rad;
- para além da massa dos elementos estruturais, considerou-se também a massa correspondente às restantes cargas permanentes (passeios, guardas, pavimento betuminoso) com um valor de 204 kg/m^2 .

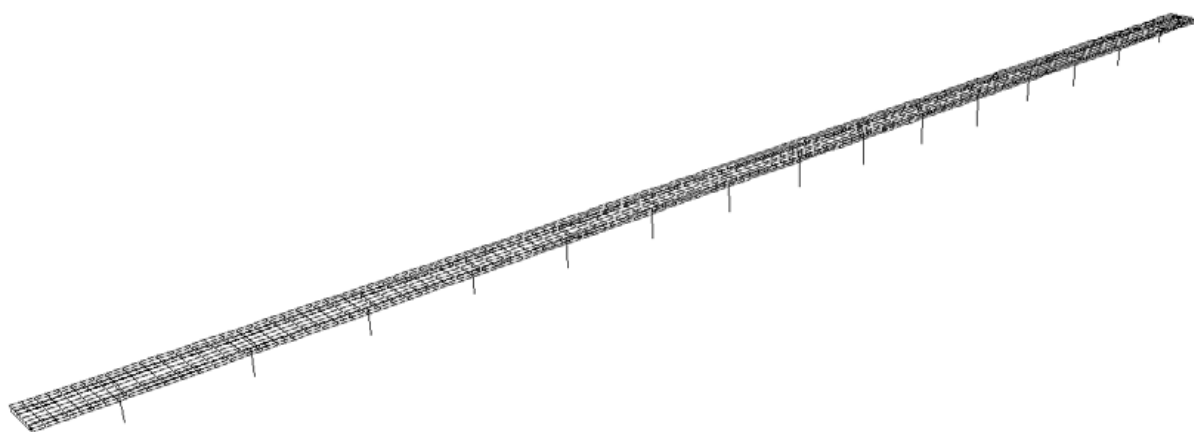


Figura 6.133 – Perspectiva do modelo de elementos finitos do viaduto V1.

No quadro 6.27 indicam-se os valores das frequências calculadas com o modelo de elementos finitos, comparando-as com as identificadas experimentalmente.

Quadro 6.27 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.

modos verticais			modos de torção			modos transversais		
ensaios		modelo	ensaios		modelo	ensaios		modelo
f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
3,70	0,6	3,69	4,53	0,6	4,41	2,98	1,2	3,00
3,78	0,7	3,81	4,59	1,5	4,49	3,33	0,7	3,33
3,94	0,4	3,99	4,74	0,9	4,62	modos longitudinais		
4,16	0,4	4,22	4,92	1,1	4,78	ensaios		modelo
4,42	0,8	4,50	5,13	0,9	4,97	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
4,66	2,1	4,81	5,36	0,5	5,18	2,92	1,7	2,91
5,05	0,1	5,15	5,46	0,6	5,37	5,47	1,1	5,46
6,90	1,7	6,98	5,58	1,0	5,40	5,69	1,2	5,59

Na figura 6.134, a comparação entre frequências calculadas com o modelo e identificadas experimentalmente, é feita graficamente.

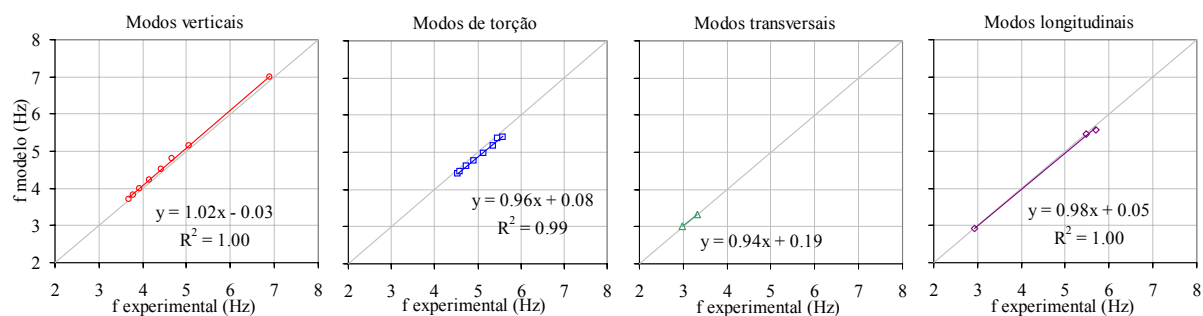


Figura 6.134 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.

Nas figuras 6.135 e 6.136 comparam-se as configurações identificadas com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração vertical do viaduto V1.

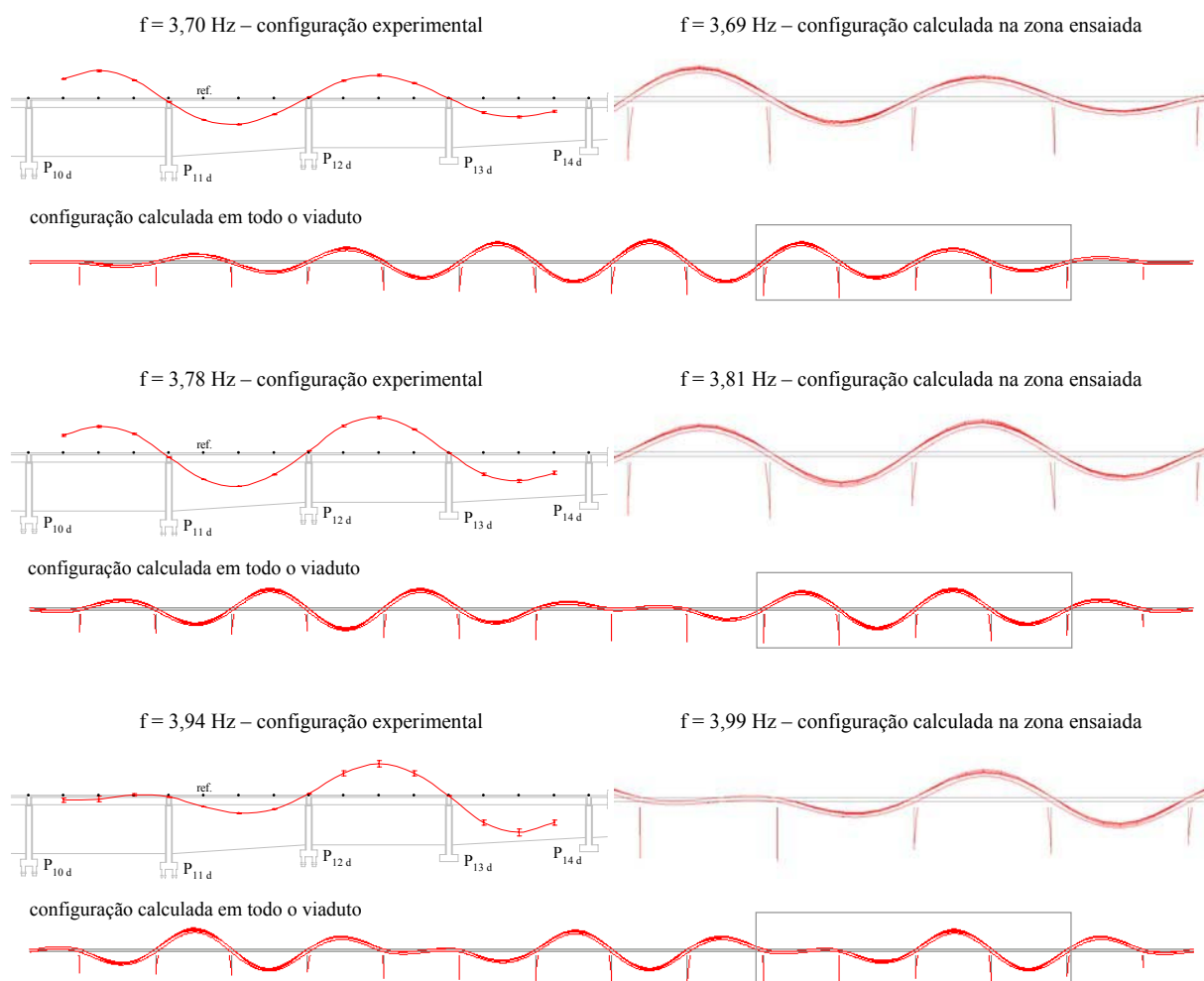


Figura 6.135 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais do viaduto V1.

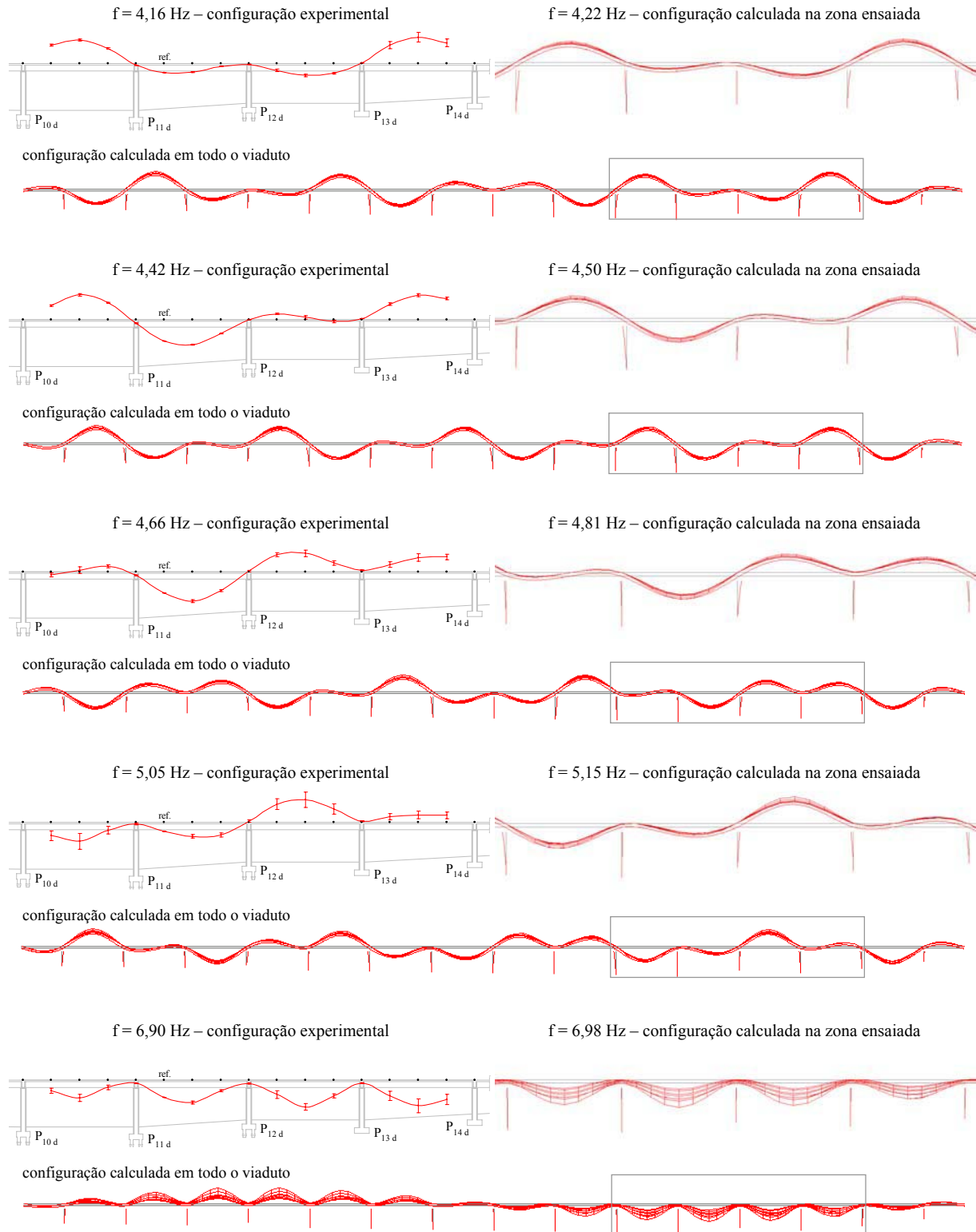


Figura 6.136 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais do viaduto V1.

Nas figuras 6.137 e 6.138 comparam-se as configurações experimentais com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração de torção do viaduto V1.

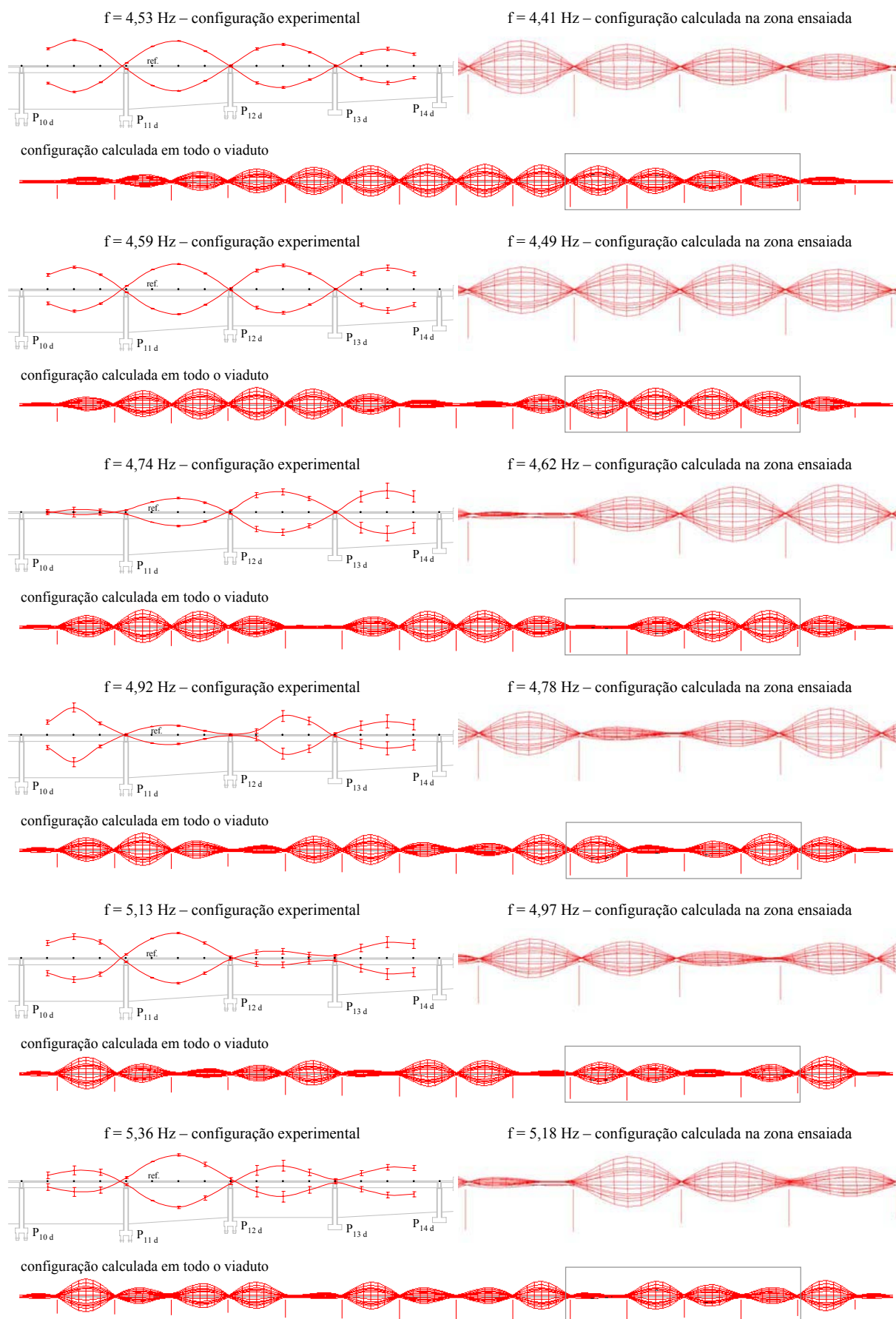


Figura 6.137 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção do viaduto V1.

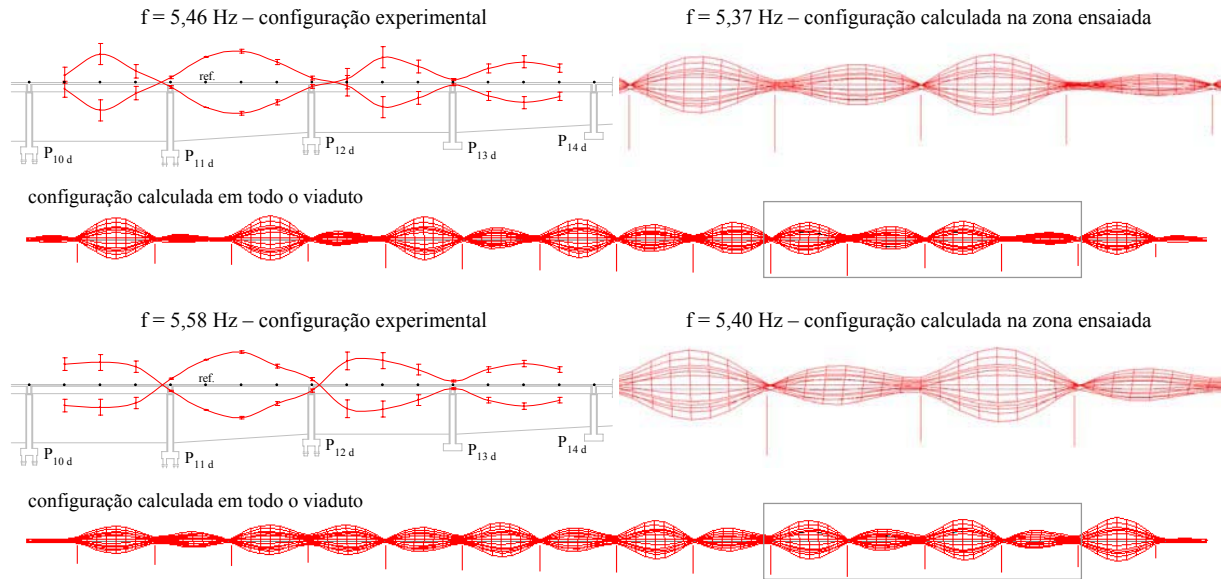


Figura 6.138 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção do viaduto V1.

Na figura 6.139 comparam-se as configurações experimentais com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração transversais do viaduto V1.

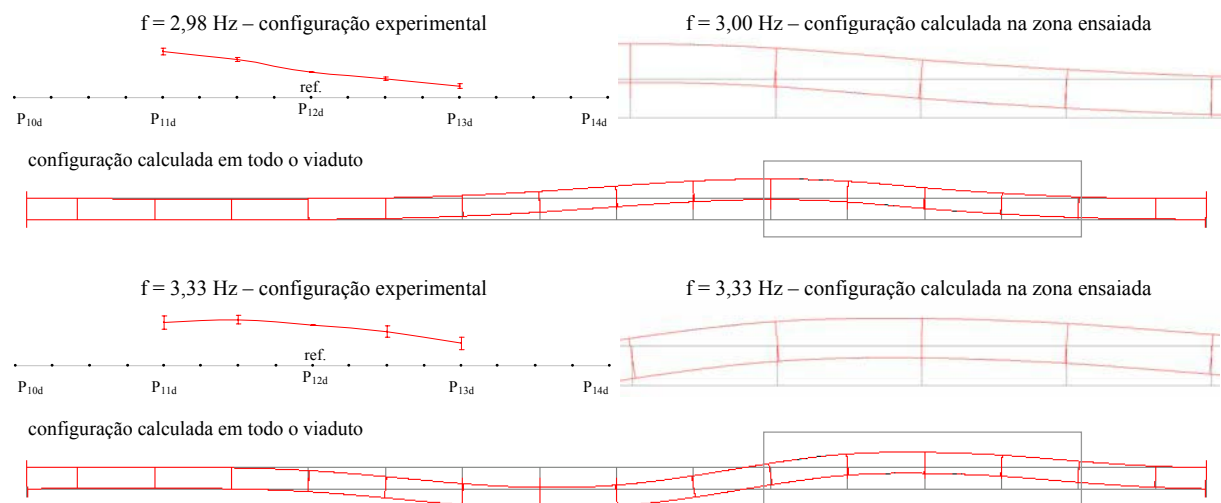


Figura 6.139 – Configurações experimentais e calculadas de modos transversais do viaduto V1.

Nas figuras 6.140 e 6.141 comparam-se as configurações experimentais com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração longitudinais do viaduto V1.

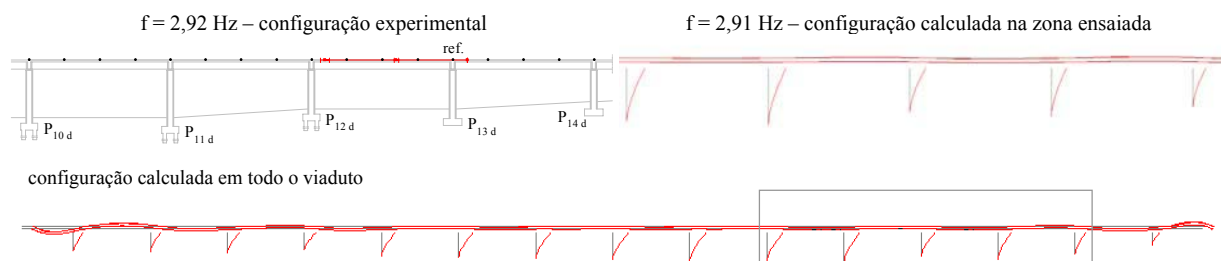


Figura 6.140 – Configurações experimentais e calculadas de modos longitudinais do viaduto V1.

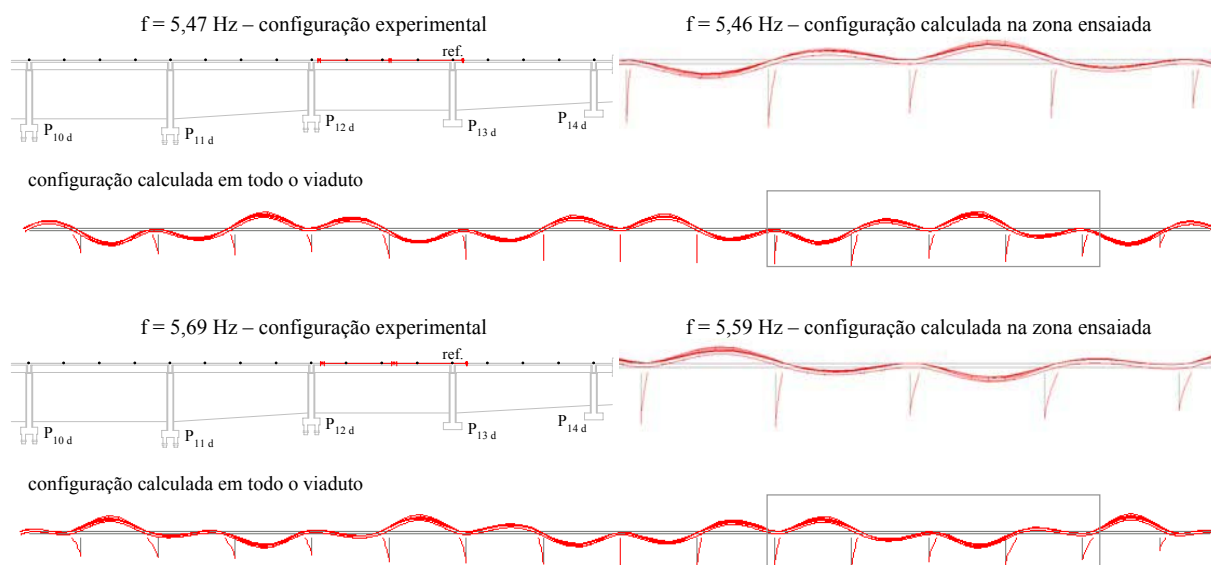


Figura 6.141 – Configurações experimentais e calculadas de modos longitudinais do viaduto V1.

Como se pode verificar nas figuras 6.135 a 6.141, há uma boa concordância entre as configurações experimentais e as calculadas com o modelo de elementos finitos do viaduto V1.

Considerações finais:

Através da análise dos registos da resposta do viaduto V1, à acção do tráfego de camiões, utilizando um método de identificação modal estocástica, foram identificadas as características de 21 modos de vibração dessa estrutura, incluindo as suas frequências, configurações e coeficientes de amortecimento.

Conforme se salientou anteriormente, as estruturas de pontes ou viadutos constituídas por tabuleiros contínuos com múltiplos tramos (tal como o viaduto V1) são uma das situações práticas em que de facto há modos com frequências muito próximas, o que constitui sempre um desafio para a sua identificação experimental. No estudo desenvolvido para o viaduto V1, utilizou-se o método BFD com o qual, em virtude de se basear na análise de funções de densidade espectral com uma resolução finita em frequência, podem surgir dificuldades na identificação de modos com frequências muito próximas. No entanto, considera-se que os resultados obtidos com esse método foram bastante positivos.

Em face do exposto no parágrafo anterior, teria sido melhor ter efectuado registos com uma duração maior do que a escolhida. No entanto, para não tornar os ensaios excessivamente morosos, optou-se por limitar o tempo de aquisição em cada ensaio aos 14 minutos que foram adoptados.

Um outro aspecto interessante do estudo realizado no viaduto V1 relaciona-se com o facto de, devido ao grande número de tramos do viaduto e à sua extensão total, se ter optado por observar a

resposta da estrutura em apenas quatro dos tramos. Por comparação das configurações modais identificadas para os tramos observados, com as configurações modais calculadas com um modelo de elementos finitos, e em face da boa concordância entre essas configurações, tornou-se também possível depreender a forma das configurações modais ao longo de toda a extensão do viaduto.

Tal como em exemplos anteriores, em que se apresentaram estudos de identificação modal de estruturas, realizados imediatamente antes da sua entrada em serviço, considera-se que as características dinâmicas identificadas para o viaduto V1 constituem um contributo importante para a caracterização global do comportamento e do estado dessa estrutura.

6.2.10 Viaduto V2 da auto-estrada A14

Considerações gerais:

O estudo de identificação das características dinâmicas do viaduto V2 da auto-estrada A14 (LNEC – Rodrigues, 2002) foi efectuado no âmbito dos ensaios de recepção dessa obra, realizados pelo LNEC no fim da sua construção e antes da sua abertura ao tráfego.

No viaduto V2 foram efectuados ensaios *in situ*, para medição da resposta em aceleração da estrutura, sob a acção do tráfego de camiões carregados (os mesmos que foram utilizados nos ensaios de carga estáticos). Na análise da informação assim obtida, foi aplicado um método de identificação modal estocástica, para avaliação de frequências, configurações e coeficientes de amortecimento dos modos naturais de vibração do viaduto.

Breve descrição do viaduto V2 da auto-estrada A14:

O viaduto V2 está localizado no troço S^{ta}. Eulália – Coimbra (Norte) da auto-estrada A14. É uma obra de arte constituída por dois viadutos idênticos, cada um dos quais serve uma das faixas de rodagem da auto-estrada.

Ambos os viadutos têm uma extensão total de 136 m entre eixos dos encontros, subdividida em 4 tramos com vãos de 34 m (ver figura 6.142). Os tabuleiros são contínuos em toda a extensão dos viadutos, apoiando-se em cada um dos pilares intermédios através de dois aparelhos de apoio, e em cada um dos encontros através de quatro aparelhos de apoio.

Nos pilares os aparelhos de apoio são fixos em ambas as direcções, enquanto que nos encontros são unidireccionais, restringindo apenas os deslocamentos na direcção transversal ao eixo do viaduto.

Os pilares têm alturas entre cerca de 18,5 m até cerca de 22,5 m. As suas fundações são constituídas ou por grupos de 6 estacas encabeçadas por maciços de fundação, ou, no caso do pilar P_3 , por uma sapata de fundação directa. As estacas têm um diâmetro de 1,0 m e os seus comprimentos são de 7 m para o pilar P_1 e de 10 m para o pilar P_2 .

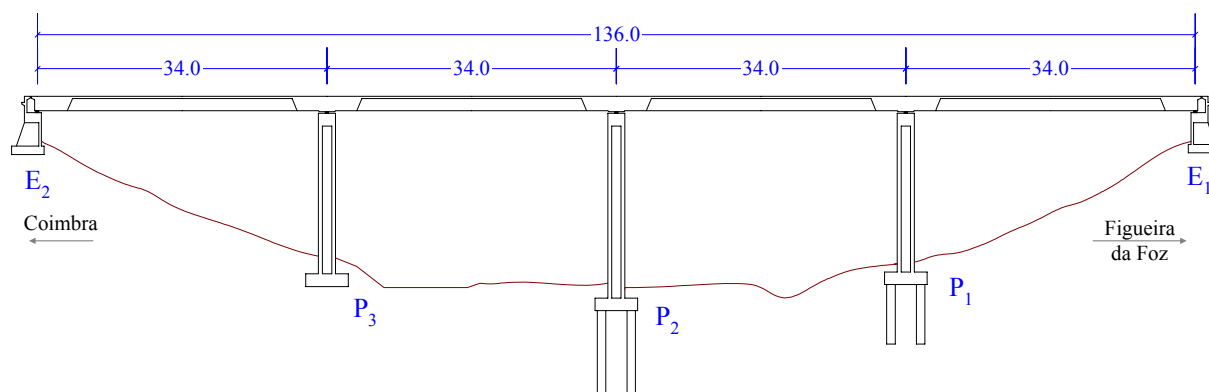


Figura 6.142 – Corte longitudinal do viaduto V2.

O tabuleiro de ambos os viadutos é constituído por duas vigas, com secção transversal trapezoidal, por uma laje central que une as duas vigas, e por consolas laterais de espessura variável. Nas zonas sobre os encontros e sobre os pilares, as vigas trapezoidais são em secção cheia, enquanto que nos vãos, são aligeiradas por intermédio de vazados circulares com 1,2 m de diâmetro. A altura da secção transversal do tabuleiro é de 1,7 m e a sua largura total é de 14,7 m (ver figura 6.143).

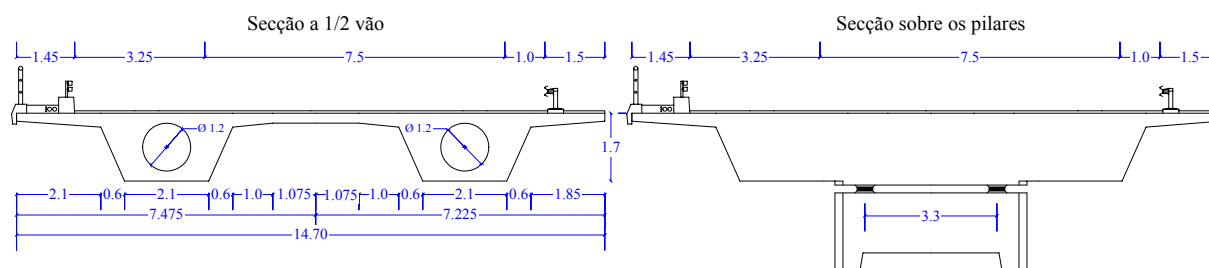


Figura 6.143 – Secções transversais do viaduto V2.

Na figura 6.144 podem-se observar alguns aspectos do viaduto V2.



Figura 6.144 – Alguns aspectos do viaduto V2.

Os ensaios *in situ* de caracterização dinâmica do viaduto V2, foram efectuados apenas no viaduto do lado Norte. À data de realização desses ensaios, ainda não tinham sido colocadas todas as camadas do pavimento betuminoso no viaduto ensaiado. Faltava também terminar a colocação dos *rails* de protecção no separador central.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios de caracterização dinâmica do viaduto V2, foi utilizado exactamente o mesmo equipamento que no exemplo anterior (viaduto V1) não se repetindo aqui a listagem do mesmo.

A metodologia de ensaio foi também igual à adoptada no exemplo anterior. Como o viaduto V2 tem apenas 4 tramos, nos 3 ensaios efectuados, abrangeu-se logo todo o tabuleiro do viaduto. Na figura 6.145 indica-se a localização das secções instrumentadas nos ensaios do viaduto V2.

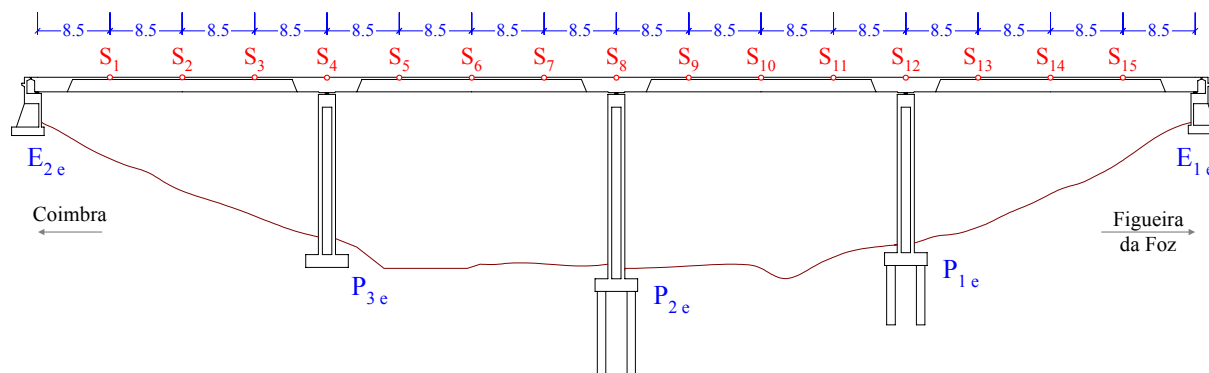


Figura 6.145 – Secções instrumentadas nos ensaios do viaduto V2.

Durante os períodos de medição da resposta da estrutura, correspondentes a cada ensaio, fizeram-se circular sobre o viaduto, os camiões que também foram utilizados nos ensaios estáticos. Na figura 6.146 podem-se observar alguns aspectos dos ensaios realizados no viaduto V2.



Figura 6.146 – Alguns aspectos dos ensaios realizados no viaduto V2.

A frequência de amostragem utilizada nos ensaios do viaduto V2 foi também de 200 Hz e em cada ensaio obtiveram-se registos com cerca de 15 minutos de duração total (180224 valores a 200 Hz). No sistema de medição, utilizou-se uma configuração que permitiu discretizar uma amplitude mínima de aceleração de $2,44 \mu g$.

Identificação modal:

A análise de identificação modal do viaduto V2 foi efectuada utilizando o método BFD que já foi descrito no capítulo 4.

Antes da aplicação do método de identificação modal, os registos da resposta da estrutura obtidos nos ensaios foram objecto de um pré-processamento também idêntico ao aplicado no exemplo anterior (viaduto V1).

As funções de densidade espectral da resposta da estrutura foram estimadas através do algoritmo da FFT, utilizando a técnica descrita no capítulo 4. Para tal, os registos totais foram subdivididos em amostras com 2048 valores, donde resultou, para a frequência de amostragem de 50 Hz, uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,024$ Hz. A cada uma das amostras foi aplicada uma janela de *Hanning*, antes do cálculo das funções de densidade espectral, para reduzir os efeitos de escorregamento (*leakage*).

Determinaram espectros normalizados médios para a semi-soma dos registos verticais (figura 6.147), para a semi-diferença dos registos verticais (figura 6.148), para os registos transversais (figura 6.149) e para os registos longitudinais (figura 6.150).

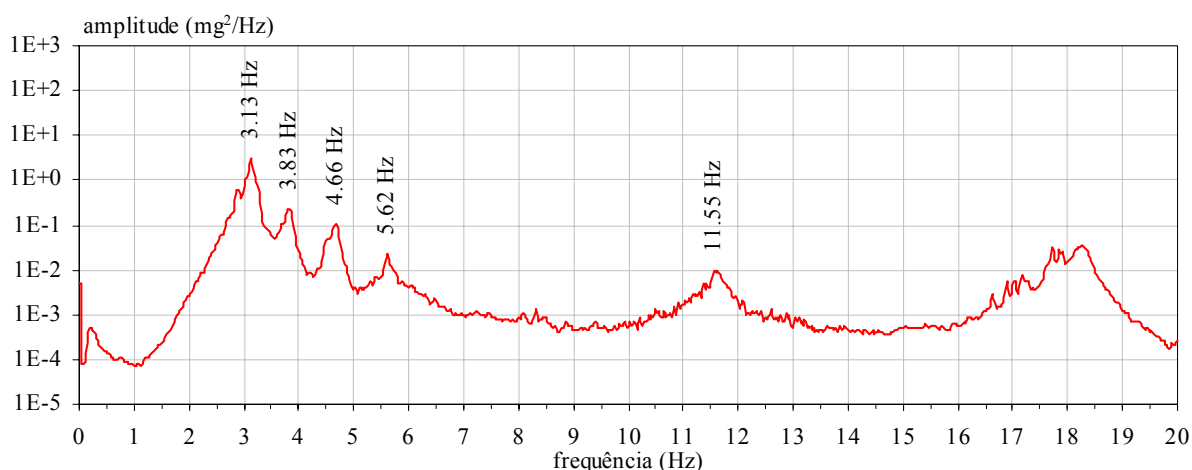


Figura 6.147 – Espectro normalizado médio da semi-soma dos registos verticais.

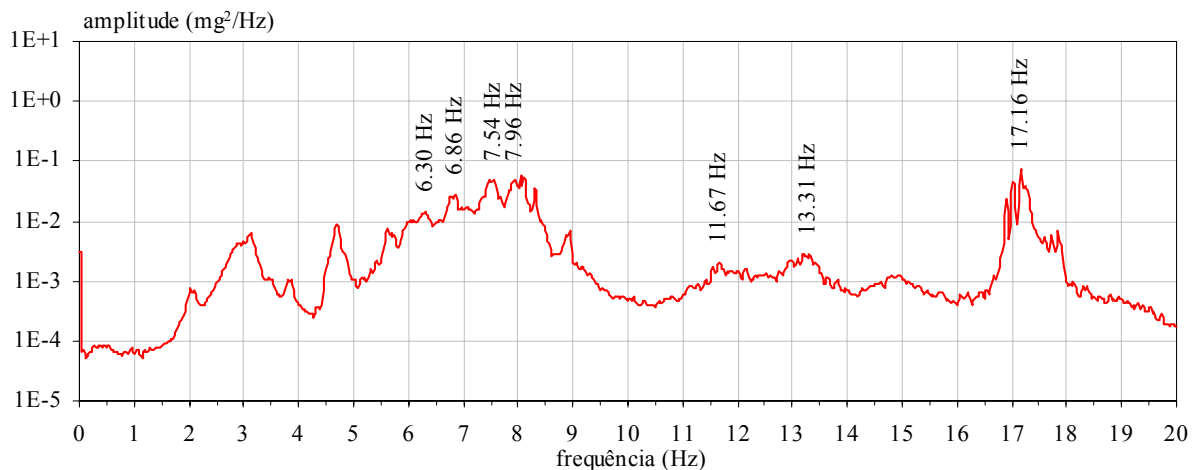


Figura 6.148 – Espectro normalizado médio da semi-diferença dos registros verticais.

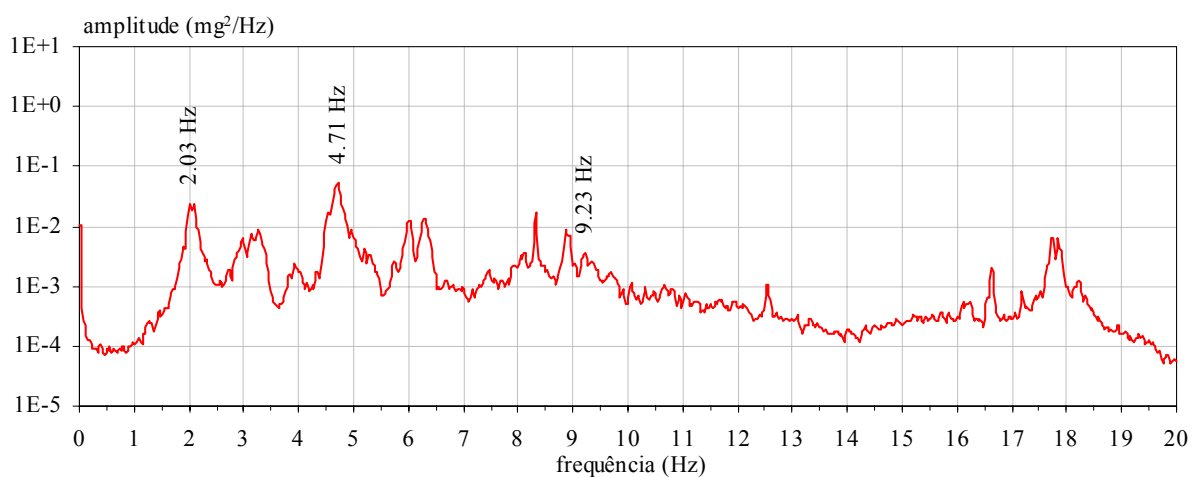


Figura 6.149 – Espectro normalizado médio dos registros transversais.

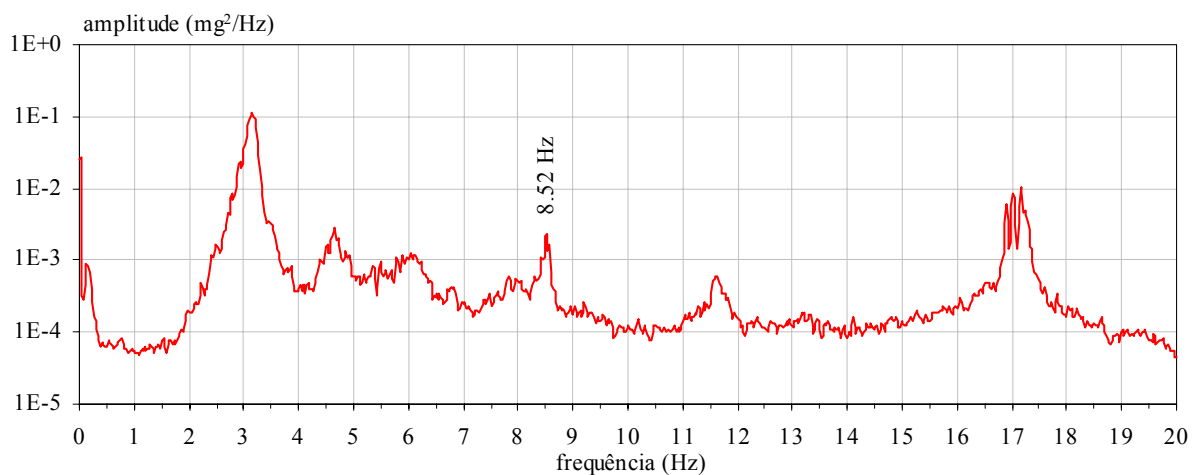


Figura 6.150 – Espectro normalizado médio dos registros longitudinais.

Nos espectros apresentados nas figuras 6.147 a 6.150 indicam-se também as frequências que foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração do viaduto V2. Para a identificação dessas frequências, para além da selecção dos picos de ressonância, teve-se também em

conta, os valores das funções de coerência e das relações de amplitude e fase (configurações) entre as diferentes secções instrumentadas.

As configurações modais identificadas com o método BFD, para o viaduto V2, serão apresentadas mais adiante, juntamente com as calculadas com um modelo de elementos finitos. Na representação gráfica das configurações dos modos de vibração identificados, incluem-se também os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais em cada secção.

Para avaliar os coeficientes de amortecimento, foi utilizado o método, já apresentado no capítulo 4, que consiste no ajuste dum espectro analítico aos picos de ressonância dos auto espectros das acelerações registadas nos ensaios.

Com o método de identificação modal estocástica utilizado, avaliaram-se as frequências, configurações e coeficientes de amortecimento de 16 modos naturais de vibração do viaduto V2 (5 modos verticais, 7 modos de torção, 3 modos transversais e 1 modo longitudinal). No quadro 6.28 indicam-se os valores identificados para as frequências e coeficientes de amortecimento.

Comparação com um modelo de elementos finitos:

Para além do estudo de identificação experimental das características dinâmicas do viaduto V2, desenvolveu-se também um modelo de elementos finitos que, assim como em exemplos anteriores, foi um elemento importante para o planeamento dos ensaios e para a interpretação dos resultados experimentais.

O modelo elaborado é um modelo espacial (ver figura 6.151), sendo constituído por: 64 elementos de barra para as vigas longitudinais do tabuleiro; 60 elementos de barra para as carlingas transversais do tabuleiro; 22 elementos de barra para os pilares; 256 elementos de casca para a laje do tabuleiro; 14 elementos de ligação para os aparelhos de apoio nos pilares e encontros; e 3 elementos de mola para as fundações dos pilares. No total o modelo tem 1926 graus de liberdade.

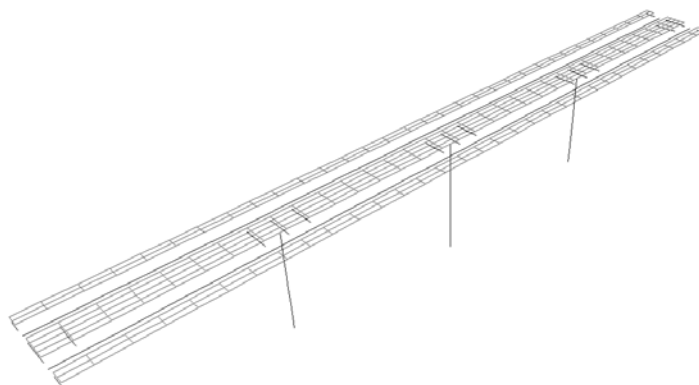


Figura 6.151 – Perspectiva do modelo de elementos finitos do viaduto V2.

No modelo desenvolvido para o viaduto V2, foram consideradas as seguintes características:

- módulo de elasticidade: $E = 35$ GPa para os pilares, $E = 45$ GPa para o tabuleiro;
- rigidez dos aparelhos de apoio sobre os encontros e pilares:
 - $k_V = 1 \times 10^{12}$ kN/mm (vertical);
 - $k_T = 1 \times 10^{12}$ kN/mm (transversal);
 - $k_L = 3 \times 10^3$ kN/mm (longitudinal, encontros);
 - $k_L = 1 \times 10^{12}$ kN/mm (longitudinal, pilares);
- características dos elementos de mola na base dos pilares:
 - rígidos para o deslocamento vertical e rotação em torno do eixo vertical;
 - rigidez nas direcções transversal e longitudinal, $k_T = k_L = 1 \times 10^9$ kN/mm;
 - rigidez para a rotação em torno dos eixos horizontais, $k_\theta = 90 \times 10^6$ kN.m/rad;
- para além da massa dos elementos estruturais, considerou-se também a massa correspondente às restantes cargas permanentes (passeios, guardas, pavimento betuminoso) com um valor de 204 kg/m^2 .

No quadro 6.28 indicam-se os valores das frequências calculadas com o modelo de elementos finitos, comparando-as com as identificadas experimentalmente.

Quadro 6.28 – Frequências e coeficientes de amortecimento experimentais e frequências calculadas.

modos verticais			modos de torção			modos transversais		
ensaios		modelo	ensaios		modelo	ensaios		modelo
f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
3,13	1,9	2,97	6,30	2,9	6,40	2,03	3,3	2,01
3,83	1,7	3,68	6,86	3,4	7,00	4,71	2,2	5,05
4,66	1,4	4,42	7,54	2,4	7,56	9,35	1,6	9,23
5,62	1,0	5,66	7,96	0,9	7,94	modos longitudinais		
11,55	1,3	11,59	11,67	0,7	11,66	ensaios		modelo
			13,31	1,4	13,31	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)
			17,16	0,6	17,07	8,52	1,1	8,08

Na figura 6.152, a comparação entre frequências calculadas com o modelo e identificadas experimentalmente, é feita graficamente.

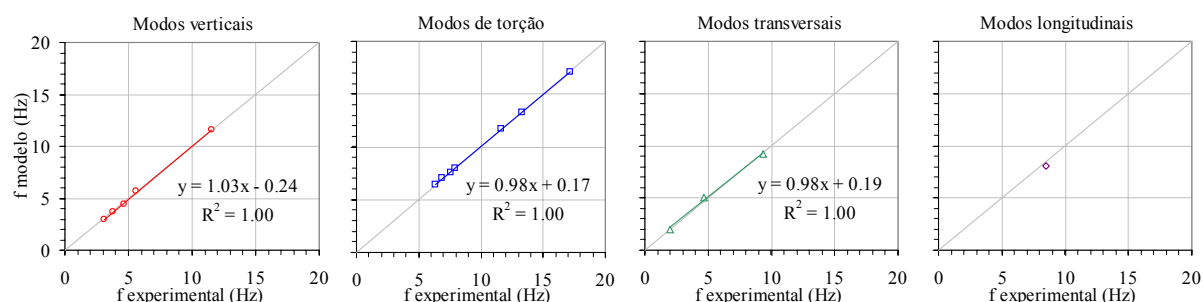


Figura 6.152 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.

Como se pode verificar pelos valores apresentados no quadro 6.28 e na figura 6.152, há uma concordância bastante boa entre as frequências identificadas e as calculadas com o modelo.

Na figura 6.153 comparam-se as configurações identificadas com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração vertical do viaduto V2.

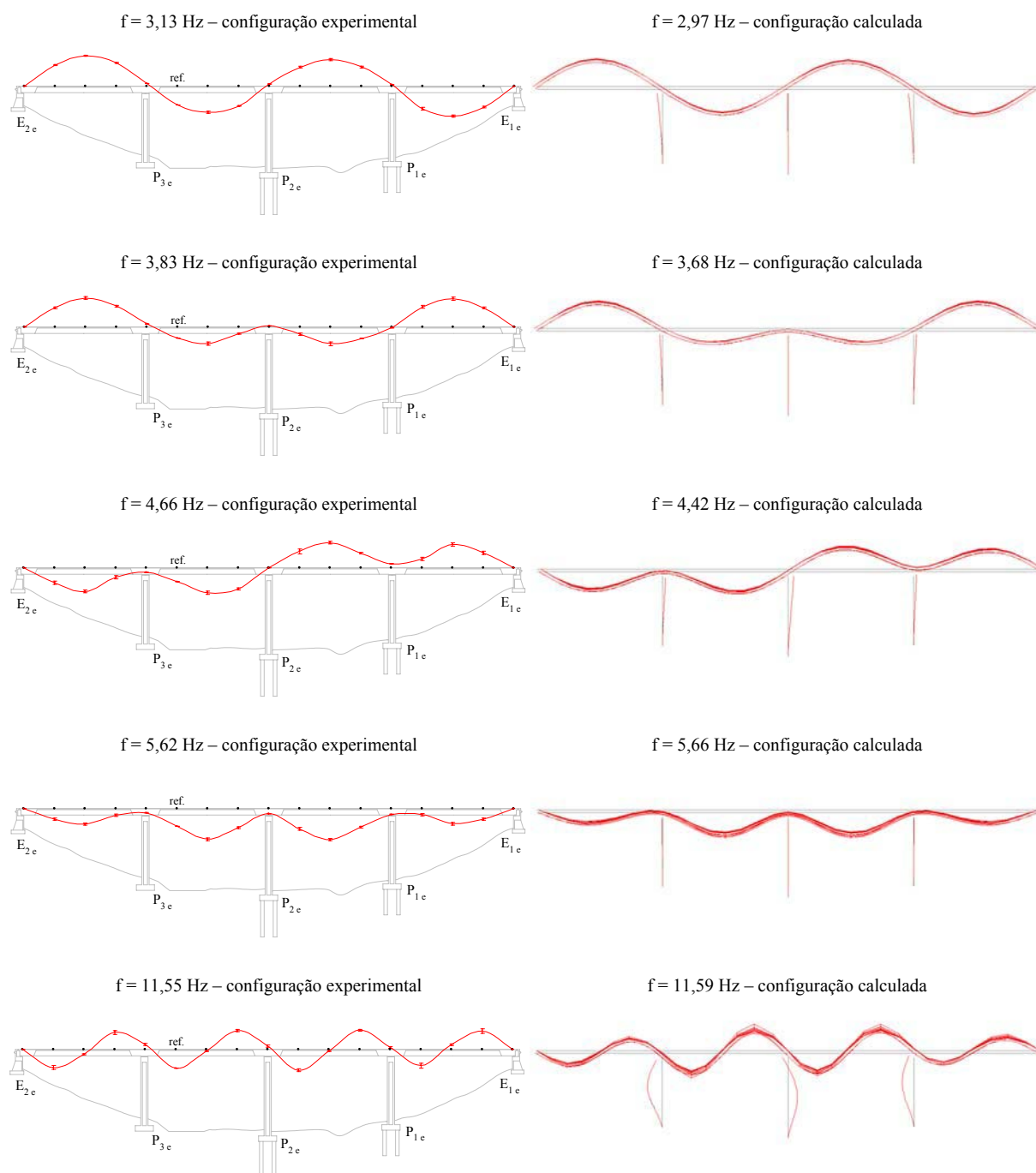


Figura 6.153 – Configurações experimentais e calculadas de modos verticais do viaduto V2.

Na figura 6.154 comparam-se as configurações experimentais com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração de torção do viaduto V2.

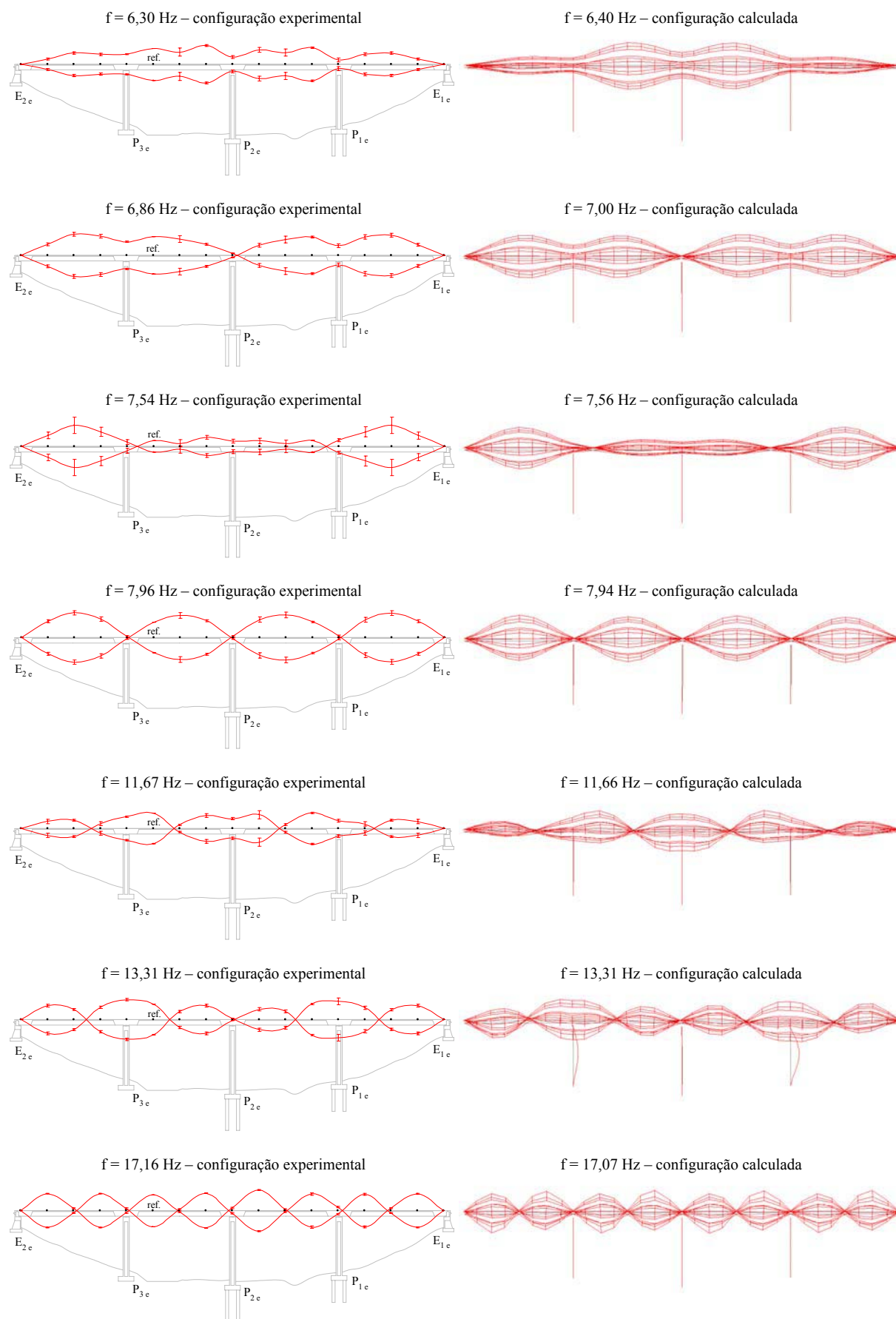


Figura 6.154 – Configurações experimentais e calculadas de modos de torção do viaduto V2.

Na figura 6.155 comparam-se as configurações experimentais com as calculadas com o modelo de elementos finitos, para os modos de vibração transversais do viaduto V2.

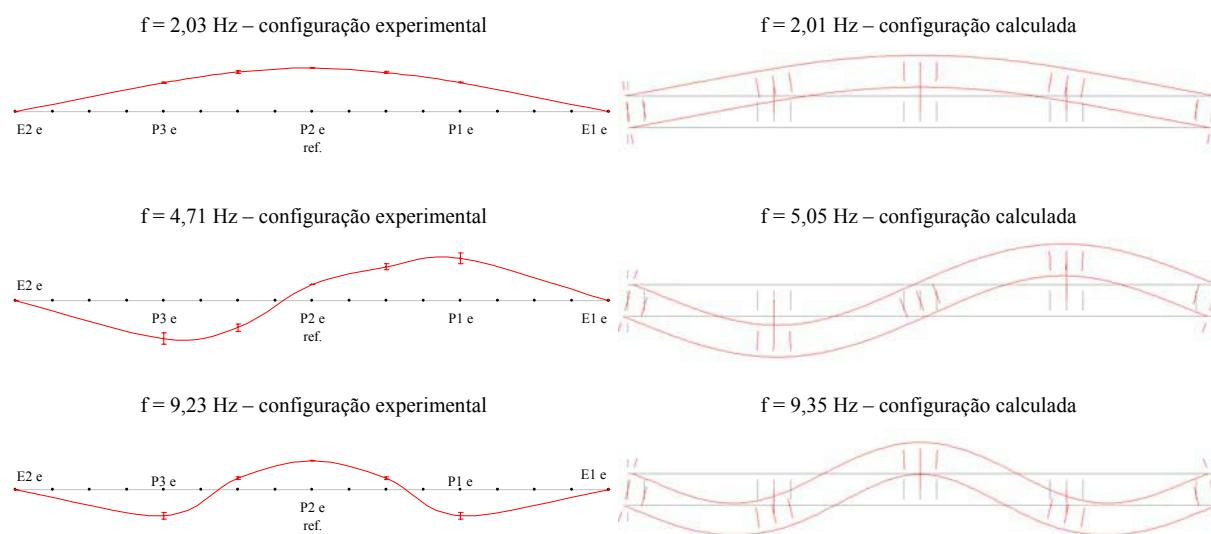


Figura 6.155 – Configurações experimentais e calculadas de modos transversais do viaduto V2.

Na figura 6.156 comparam-se as componentes modais identificadas para o modo longitudinal do viaduto V2, com a configuração calculada com o modelo de elementos finitos.

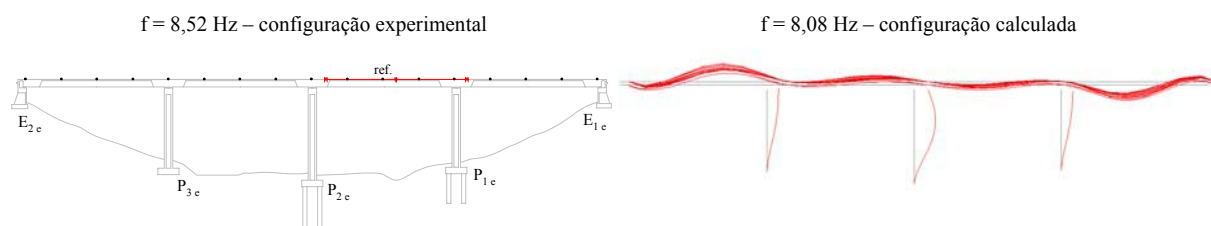


Figura 6.156 – Configuração experimental e calculada do modo longitudinal do viaduto V2.

Para comparar os vectores de componentes modais identificadas experimentalmente com os vectores de componentes modais calculadas com o modelo de elementos finitos, determinaram-se também os coeficientes MAC (ver capítulo 5). Na figura 6.157 apresentam-se graficamente as matrizes dos coeficientes MAC obtidos.

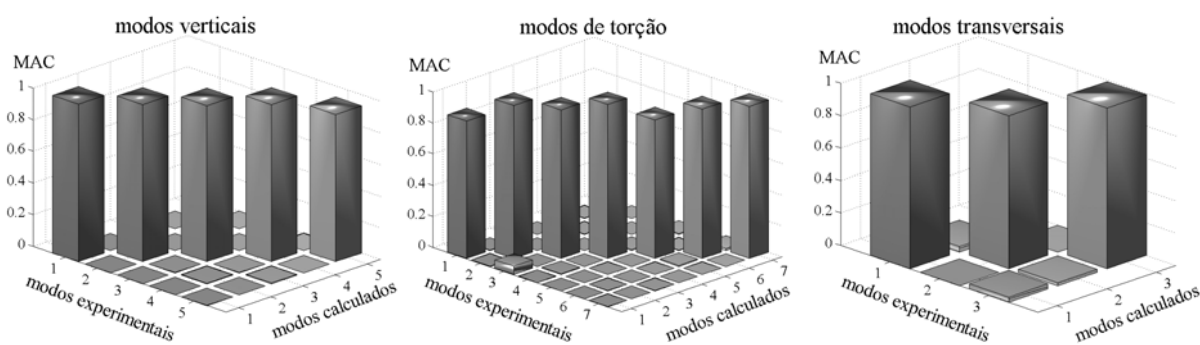


Figura 6.157 – Coeficientes MAC.

Considerações finais:

Aplicando um método de identificação modal estocástica na análise de registos da resposta do viaduto V2, registada em ensaios realizados *in situ*, foram identificadas as características de 16 modos de vibração, incluindo as suas frequências, configurações e coeficientes de amortecimento.

As características dinâmicas identificadas experimentalmente foram também comparadas com as avaliadas com um modelo de elementos finitos, tendo-se obtido uma boa concordância entre os resultados experimentais e os calculados com esse modelo.

6.2.11 Ponte ferroviária de Sacavém

Considerações gerais:

O estudo do comportamento dinâmico da ponte de Sacavém (LNEC – Rodrigues, 2001) sob a acção do tráfego ferroviário foi desenvolvido por solicitação da REFER, com o objectivo de avaliar a capacidade dessa obra de arte, para suportar a circulação de comboios de pendulação activa 4001/10 (comboios pendulares) com velocidades de 200 km/h.

No estudo efectuado para a ponte de Sacavém, foram realizados ensaios *in situ* para avaliação das características dinâmicas da estrutura e dos efeitos dinâmicos do tráfego ferroviário.

A adequabilidade da ponte de Sacavém para a circulação de comboios pendulares com velocidades de 200 km/h foi analisada considerando os aspectos relacionados com: a segurança da estrutura; a segurança da circulação dos comboios; e o conforto dos passageiros. A análise, relativamente a estes três aspectos, foi efectuada, considerando as disposições da regulamentação aplicável, nomeadamente o Eurocódigo 1 (CEN, 2001) e as regras da *Union Internationale des Chemins de Fer* (UIC, 1976, 1979, 1994), tendo em conta as características dinâmicas da estrutura avaliadas experimentalmente, e simulando analiticamente a resposta dinâmica da estrutura à passagem do sistema de forças correspondente ao comboio pendular.

O estudo sobre o comportamento dinâmico da ponte de Sacavém sob a acção do tráfego ferroviário, foi apresentado numa conferência internacional (Rodrigues, 2002).

Conforme se procedeu no exemplo apresentado anteriormente, relativo à ponte ferroviária de Canelas, na apresentação que se faz em seguida, do estudo efectuado na ponte de Sacavém, aborda-se apenas a análise de identificação modal que foi efectuada, e que constituiu uma parte importante do mesmo.

Breve descrição da ponte ferroviária de Sacavém:

A ponte ferroviária de Sacavém situa-se ao Km 9,695 da linha do Norte. É uma obra de arte que atravessa o rio Trancão, junto a Sacavém, vencendo um vão de 31,4 m entre eixos de apoios. É constituída por dois tabuleiros independentes, cada um dos quais suporta uma via férrea de via larga.

Na altura de realização dos ensaios, a ponte era utilizada, preferencialmente, para a circulação de comboios rápidos, sendo as vias por ela suportadas designadas por ascendente rápida (AR) e descendente rápida (DR). O trânsito de comboios com menor velocidade fazia-se, normalmente, por uma outra ponte, vizinha da analisada no estudo efectuado.

A estrutura de cada tabuleiro é constituída, essencialmente, por duas vigas metálicas principais, dispostas lateralmente. Estas vigas são formadas por uma treliça composta por duas cordas, superior e inferior, unidas por montantes e barras diagonais dispostas em cruz de Sto. André.

Na figura 6.158 apresenta-se o alçado, planta e secções transversais da ponte de Sacavém.

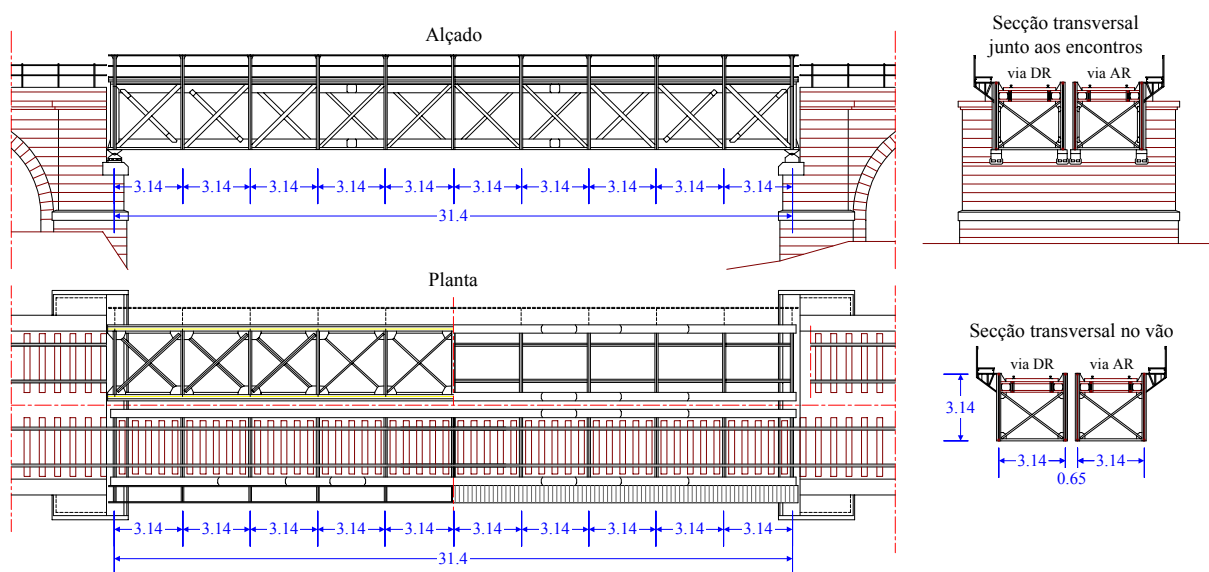


Figura 6.158 – Alçado, planta e secções transversais da ponte de Sacavém.

As estruturas de ambas as vias apoiam, através de aparelhos de apoio rotulados, em superestruturas de alvenaria que formam um arco, com cerca de 7,5 m de vão, e funcionam como encontros da ponte. Os aparelhos de apoio são fixos do lado de onde o comboio se desloca e móveis do outro (lado para onde o comboio se desloca).

A ponte ferroviária de Sacavém tem já uma vida de serviço bastante longa, tendo sido objecto de várias intervenções, quer de manutenção quer de reforço com substituição e/ou adição de elementos estruturais. De acordo com elementos fornecidos pela REFER, foi possível constatar que os desenhos

originais desta obra, elaborados pela *Central Peninsular Railways of Portugal*, datam de 1854. A última das grandes intervenções que a estrutura sofreu foi efectuada em 1970, altura em que foi efectuada uma análise de verificação da sua segurança de acordo com as recomendações do RSEP.

Na figura 6.159 podem observar-se alguns aspectos da ponte de Sacavém.



Figura 6.159 – Alguns aspectos da ponte de Sacavém.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Os ensaios *in situ* da ponte de Sacavém foram realizados em dois dias diferentes, um para a estrutura de cada uma das vias, num período desde cerca das 9h.30m. até perto das 19h. Foram efectuados ensaios de medição de extensões e de acelerações induzidas pela passagem dos comboios e também ensaios de medição da resposta resultante das acções ambiente, essencialmente o vento, mas também o efeito do tráfego ferroviário nas linhas vizinhas às da ponte ensaiada, ou do tráfego rodoviário junto ao local da ponte.

Optou-se por efectuar os ensaios em dois dias diferentes, de modo a que a instrumentação utilizada em cada uma das estruturas permitisse definir as configurações dos seus modos naturais de vibração, duma forma bastante refinada.

Para a realização dos ensaios não foi imposta qualquer restrição ao tráfego que usualmente circula sobre a ponte, tendo-se apenas solicitado à REFER, a informação relativa às velocidades dos comboios que circularam sobre a estrutura durante o período de ensaio.

Os ensaios *in situ* realizados na ponte de Sacavém foram efectuados com o seguinte equipamento:

- 15 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo ES-U da *Kinematics*;
- 5 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;
- 4 extensómetros piezoeléctricos de circuito integrado (ICP) de marca PCB, modelo 740A02, e fonte de alimentação apropriada;
- 1 computador portátil;
- placa de aquisição de dados *DAQ Card AI-16XE-50* da *National Instruments* com conversão analógica/digital a 16 bits, instalada no computador portátil;
- chassis SCXI-1000DC de 32 canais, também da *National Instruments*, ligado a uma bateria;
- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição.

Nos ensaios da ponte de Sacavém os acelerómetros ES-U foram configurados para uma sensibilidade de 2,5Volt/g; quanto ao factor de ganho dos amplificadores, foram utilizados valores de 1, para o registo das passagens de comboios, e de 50 para os ensaios de medição de vibrações *ambiente*. Desta forma, os valores da amplitude mínima de aceleração que foi possível discretizar, foram de 122,1 μg (ganho 1) e de 2,44 μg (ganho 50).

Para definir a configuração do equipamento adoptada nos ensaios, foi importante ter efectuado algumas medições preliminares, realizadas algumas semanas antes da data dos ensaios, que permitiram avaliar o nível das acelerações induzidas pela passagem dos comboios.

Na figura 6.160 podem observar-se diversos aspectos dos acelerómetros ES-U colocados nos banzos das cordas superiores da ponte de Sacavém.

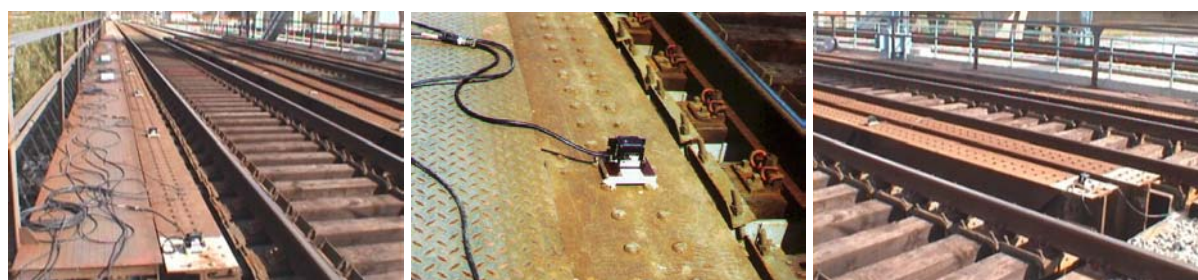


Figura 6.160 – Alguns aspectos dos acelerómetros ES-U colocados nos banzos das cordas superiores.

Em cada estrutura, a resposta em aceleração foi observada em 22 pontos diferentes, correspondentes aos pontos de ligação dos montantes com as cordas superiores das vigas principais. Foram medidas acelerações na direcção vertical em todos esses pontos e também acelerações na direcção transversal em apenas 7 deles, situados do lado exterior dos tabuleiros (lado do passeio).

Para além das acelerações nos banzos das cordas superiores das vigas principais, registaram-se também as extensões nas 4 primeiras diagonais das vigas principais interiores.

A técnica de ensaio utilizada, foi idêntica para as duas estruturas, tendo-se mantido 7 acelerómetros sempre nos mesmos pontos, enquanto que os outros foram sendo colocados em pontos diferentes, num total de 3 ensaios (ver quadro 6.29 e figura 6.161).

Quadro 6.29 – Pontos instrumentados com os acelerómetros ES-U em cada ensaio.

ensaio	unidade 1			unidade 2			unidade 3			unidade 4			unidade 5		
	cn.1	cn.2	cn.3	cn.4	cn.5	cn.6	cn.7	cn.8	cn.9	cn.10	cn.11	cn.12	cn.13	cn.14	cn.15
1							5 vert.	9 vert.	21 vert.	6 vert.	10 vert.	22 vert.	9 tran.		17 tran.
2	11 vert.	15 vert.	19 vert.	12 vert.	16 vert.	20 vert.	3 vert.	7 vert.	17 vert.	4 vert.	8 vert.	18 vert.	7 tran.	15 tran.	13 tran.
3							1 vert.	7 vert.	13 vert.	2 vert.	8 vert.	14 vert.	5 tran.		11 tran.

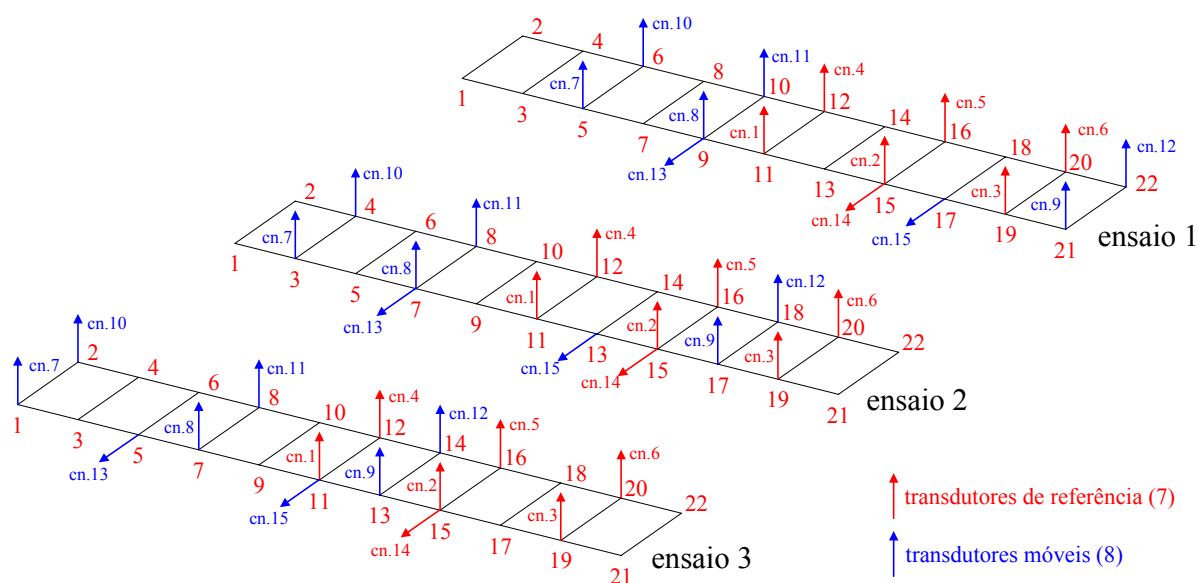


Figura 6.161 – Sequência dos três ensaios efectuados nas duas estruturas da ponte de Sacavém.

Durante os dois dias de ensaio, foram registadas as acelerações e extensões induzidas nas estruturas pela passagem de um total de 50 comboios (29 na via AR e 21 na via DR), incluindo 9 comboios pendulares (que circularam com uma velocidade máxima de 160 km/h).

A frequência de amostragem utilizada nos ensaios foi de 200 Hz. Nos ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente, a duração total dos registos foi de cerca de 30 minutos.

Na figura 6.162 podem observar-se algumas fotografias da passagem de comboios pendulares sobre a ponte de Sacavém durante os dias dos ensaios.



Figura 6.162 – Passagem de comboios pendulares sobre a ponte de Sacavém durante os ensaios.

Identificação modal:

As acelerações registadas nos ensaios da ponte de Sacavém (LNEC – Rodrigues, 2001), foram analisadas, para efeitos de identificação modal, utilizando o método BFD e o método de Ibrahim no domínio do tempo (ITD), que já foram descritos no capítulo 4.

Antes da aplicação dos métodos de identificação modal, os registos de aceleração obtidos nos ensaios foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-alto a 0,5 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 2;
- filtragem passa-baixo a 20 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 4;
- decimação dos registos, de 200 Hz para 50 Hz.

O método BFD foi aplicado considerando as acelerações registadas nos ensaios de medição da resposta resultante das acções ambiente. O método ITD foi aplicado às respostas em regime livre obtidas através da média das acelerações registadas imediatamente após os comboios terem passado sobre a ponte.

Na aplicação de ambos os métodos de identificação modal, utilizaram-se portanto registos correspondentes a situações sem comboios na ponte. Avaliaram-se assim as características dinâmicas das estruturas descarregadas, ou seja, sem influência da massa adicional dos comboios, ou do efeito de vibrações forçadas resultantes das oscilações dos comboios sobre os seus sistemas de suspensão, ou ainda de impactos das rodas sobre os carris.

Para aplicar o método BFD, as funções de densidade espectral da resposta das estruturas foram avaliadas utilizando o algoritmo da FFT, de acordo com o processo descrito no capítulo 4. As funções de densidade espectral foram assim estimadas considerando amostras com 2048 valores, tendo-se aplicado uma janela de *Hanning* a cada amostra para reduzir o efeito de escorregamento (*leakage*). A

resolução em frequência das funções de densidade espectral é portanto a correspondente aos 2048 valores com uma frequência de amostragem de 50 Hz, ou seja $\Delta f = 0,024$ Hz.

Nas figuras 6.163 a 6.165, apresentam-se os espectros normalizados médios obtidos para as estruturas de cada uma das vias. Nessas figuras indicam-se também os valores das frequências que foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração das estruturas.

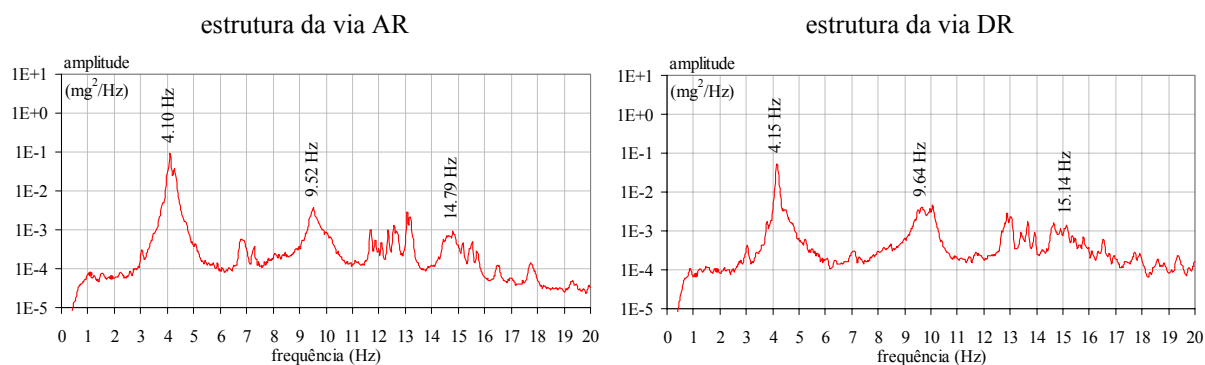


Figura 6.163 – Espectros normalizados médios das acelerações transversais.

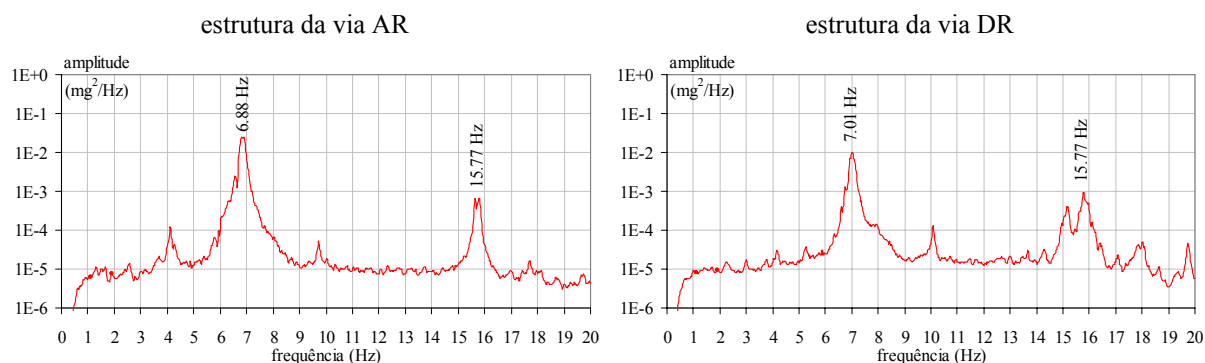


Figura 6.164 – Espectros normalizados médios da semi-soma das acelerações verticais.

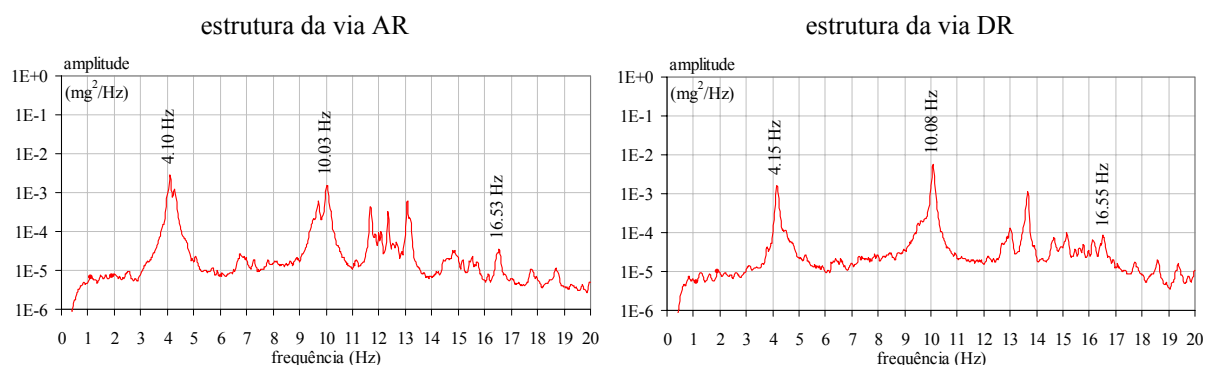


Figura 6.165 – Espectros normalizados médios da semi-diferença das acelerações verticais.

Através do método BFD, identificaram-se as frequências e configurações de 7 modos naturais de vibração das estruturas ensaiadas. Nas figuras 6.166 a 6.172, apresentam-se as representações em planta e em alçado das configurações modais identificadas para as estruturas de cada uma das vias.

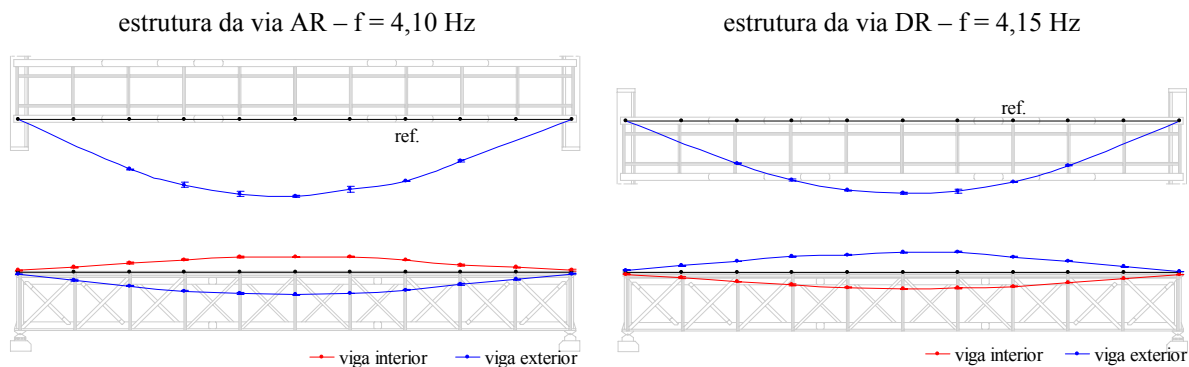


Figura 6.166 – Configuração do 1º modo identificado com o método BFD (1º modo transversal).

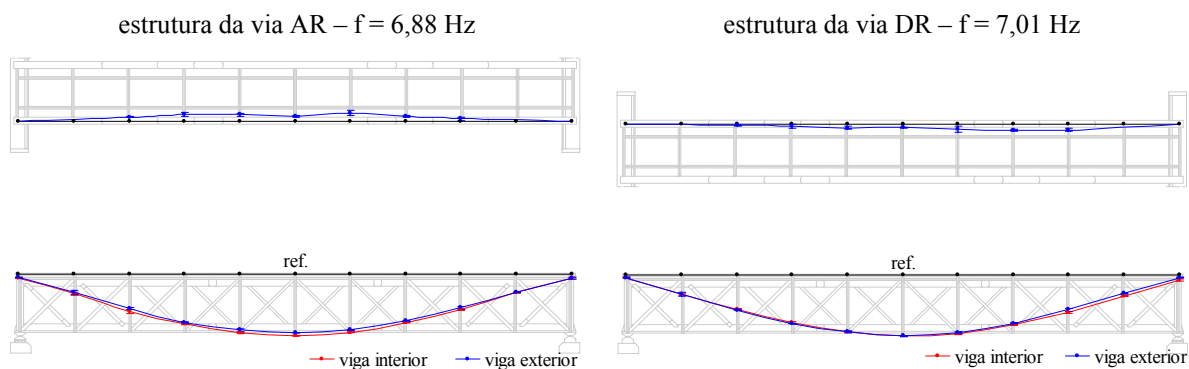


Figura 6.167 – Configuração do 2º modo identificado com o método BFD (1º modo vertical).

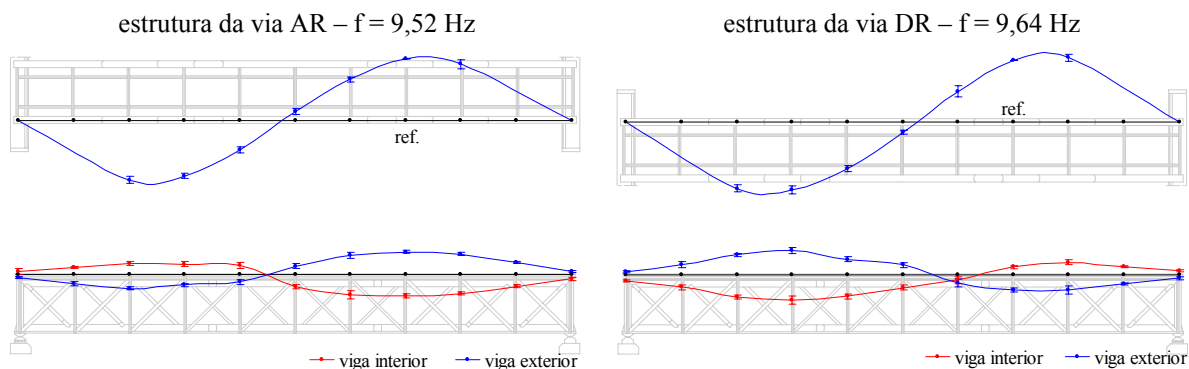


Figura 6.168 – Configuração do 3º modo identificado com o método BFD (2º modo transversal).

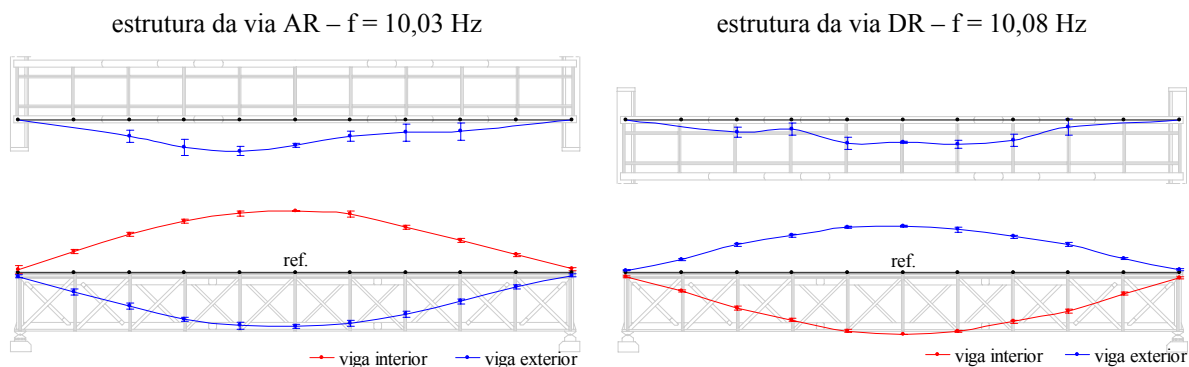


Figura 6.169 – Configuração do 4º modo identificado com o método BFD (1º modo de torção).

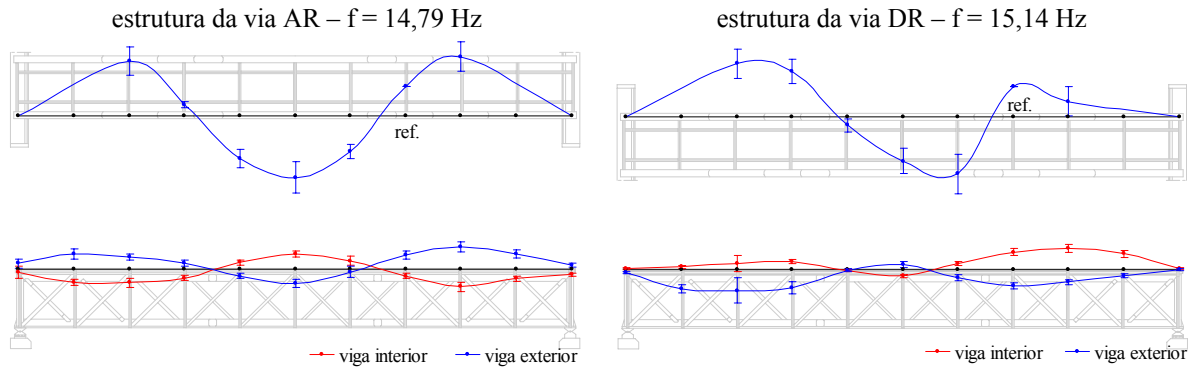


Figura 6.170 – Configuração do 5º modo identificado com o método BFD (3º modo transversal).

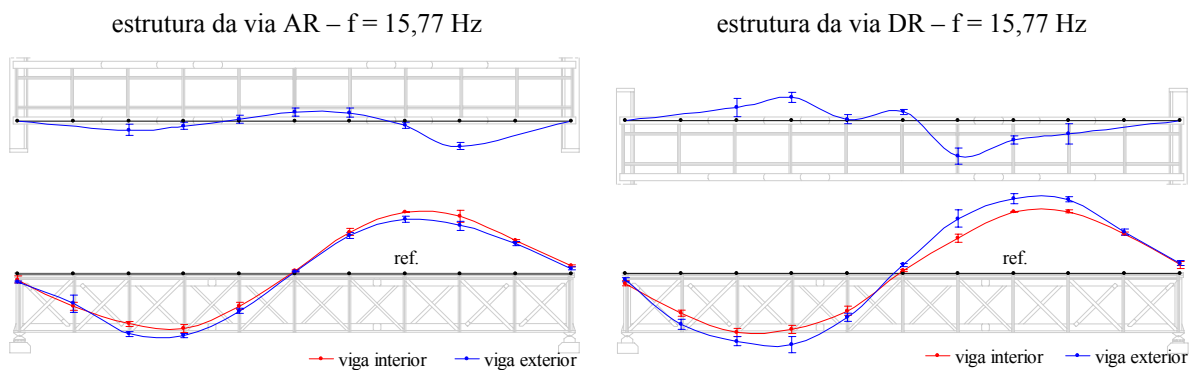


Figura 6.171 – Configuração do 6º modo identificado com o método BFD (2º modo vertical).

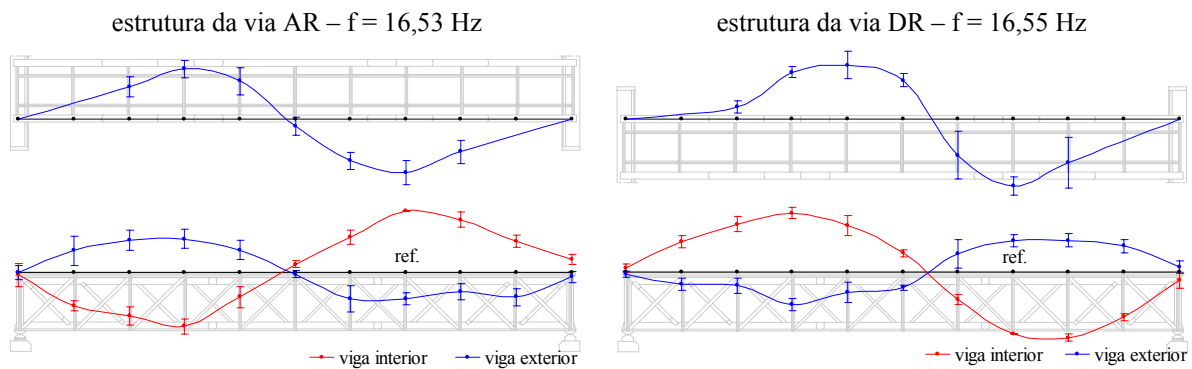


Figura 6.172 – Configuração do 7º modo identificado com o método BFD (2º modo de torção).

Nas configurações representadas nas figuras 6.166 a 6.172, incluíram-se barras de erro que representam os intervalos de confiança a 99 % na estimativa das componentes modais. Como se pode verificar, em relação aos 4 primeiros modos identificados, essas barras de erro são muito pequenas, o que salienta a qualidade dos registos obtidos nos ensaios e dos resultados da identificação modal efectuada com o método BFD.

No estudo efectuado para a ponte de Sacavém, utilizou-se também o método ITD, fundamentalmente para estimar os coeficientes de amortecimento mas também para avaliar, por uma

via diferente do método BFD, as frequências e configurações dos modos naturais de vibração das estruturas ensaiadas.

O método ITD foi aplicado às respostas em regime livre, determinadas através duma média no domínio do tempo, de amostras, com 10 segundos de duração, extraídas das acelerações registadas imediatamente após a passagem dum comboio. Para definir o início dessas amostras, considerou-se uma condição inicial de *passagem por zero com inclinação positiva* (Ibrahim, 2001) do registo na direcção transversal obtido no ponto 15. Estas respostas em regime livre foram determinadas para cada um dos 3 ensaios realizados. Na figura 6.173 apresentam-se amostras com 5 segundos de duração das respostas em regime livre obtidas, para cada estrutura, em 3 dos sinais de referência.

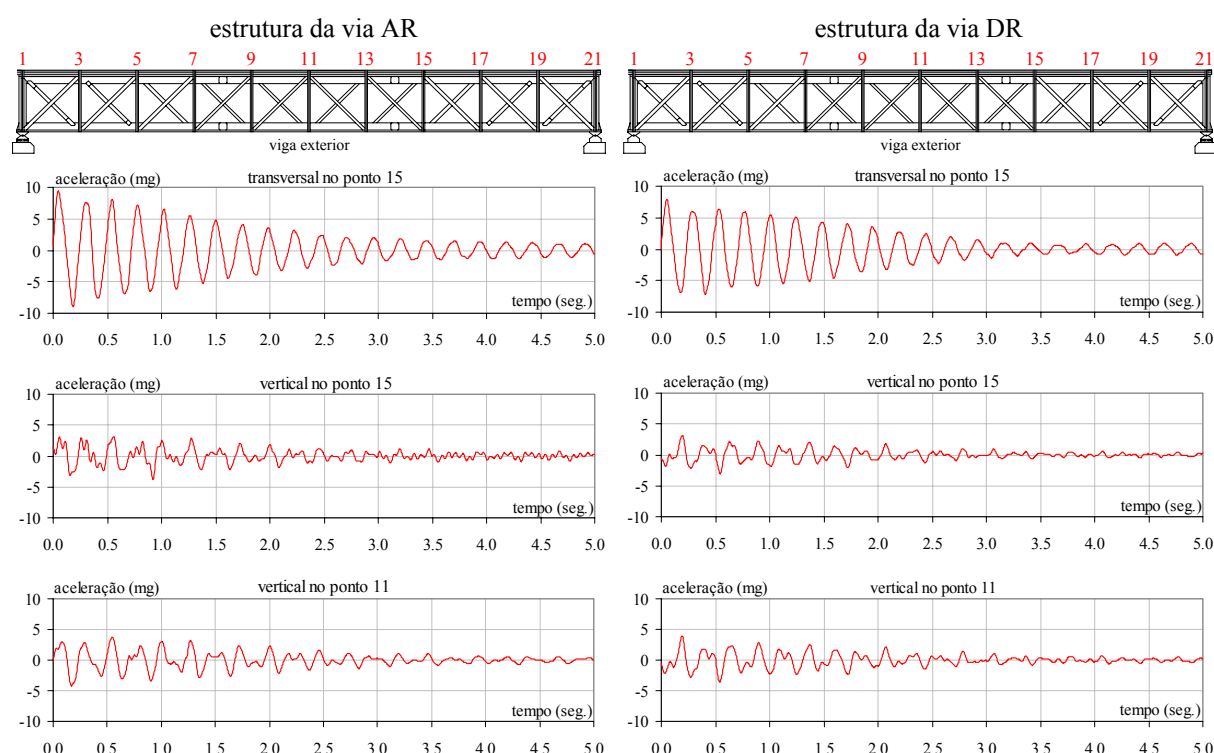


Figura 6.173 – Respostas em regime livre em 3 dos sinais de referência.

Com o método ITD avaliaram-se as características (frequência, coeficiente de amortecimento e configuração) do 1º modo transversal e do 1º modo vertical de ambas as estruturas, e ainda do 1º modo de torção da estrutura da via DR (não se tendo conseguido identificar as características de outros modos para além desses). Para cada um dos três ensaios efectuados, obtiveram-se valores ligeiramente diferentes para as frequências e coeficientes de amortecimento, conforme se pode verificar no quadro 6.30. Essas pequenas diferenças podem resultar da influência de efeitos ambientais, nomeadamente da temperatura, uma vez que os registos obtidos em cada ensaio, correspondem a um período diferente do dia (ensaio 1 das 9h.30m. às 12h.30m., ensaio 2 das 12h.30m. às 16h. e ensaio 3 das 16h. às 19h.). Note-se que em diversos estudos em que foi feita a monitorização das frequências dos modos naturais

de vibração de estruturas, ao longo de um período de tempo longo, tem-se constatado que há uma boa correlação entre as variações dessas frequências e as variações de temperatura (Farrar *et al.*, 1997; Peeters e De Roeck, 2000; Rohrmann *et al.*, 2000; Alampalli e Cioara, 2002; Feltrin, 2002).

Quadro 6.30 – Frequências e coeficientes de amortecimento avaliados com o método ITD.

		Estrutura da via AR						Estrutura da via DR			
		ensaio 1	ensaio 2	ensaio 3	valor médio			ensaio 1	ensaio 2	ensaio 3	valor médio
1º modo transversal	f (Hz)	4,16	4,23	4,18	4,19	1º modo transversal	f (Hz)	4,22	4,25	4,19	4,22
	ξ (%)	1,69	2,11	1,43	1,7		ξ (%)	1,19	1,41	1,03	1,2
1º modo vertical	f (Hz)	6,96	6,97	6,91	6,95	1º modo vertical	f (Hz)	7,06	7,05	7,01	7,04
	ξ (%)	1,77	0,51	0,79	1,0		ξ (%)	1,25	0,75	0,82	0,9
1º modo de torção	f (Hz)					1º modo de torção	f (Hz)	10,53	10,11	10,19	10,28
	ξ (%)						ξ (%)	0,32	0,29	0,37	0,3

Nas figuras 6.174 a 6.176 apresentam-se as representações em planta e em alçado das configurações modais identificadas com o método ITD, para as estruturas de cada uma das vias.

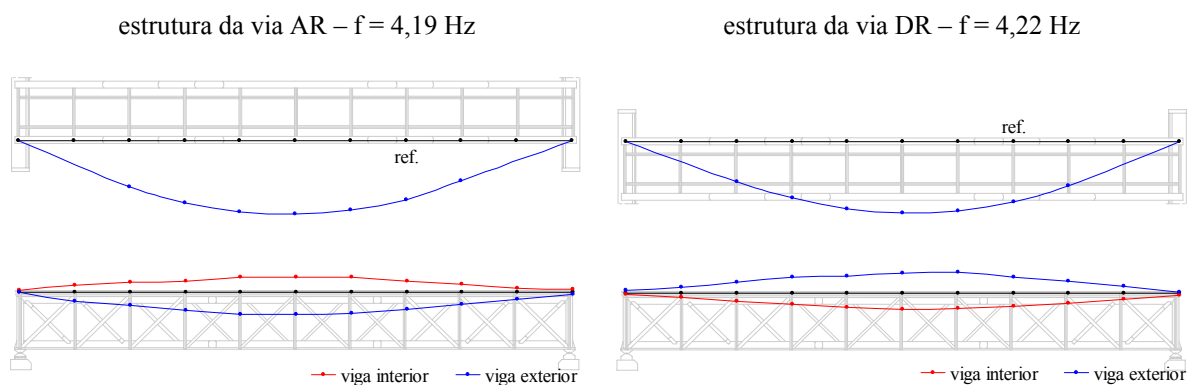


Figura 6.174 – Configuração do 1º modo identificado com o método ITD (1º modo transversal).

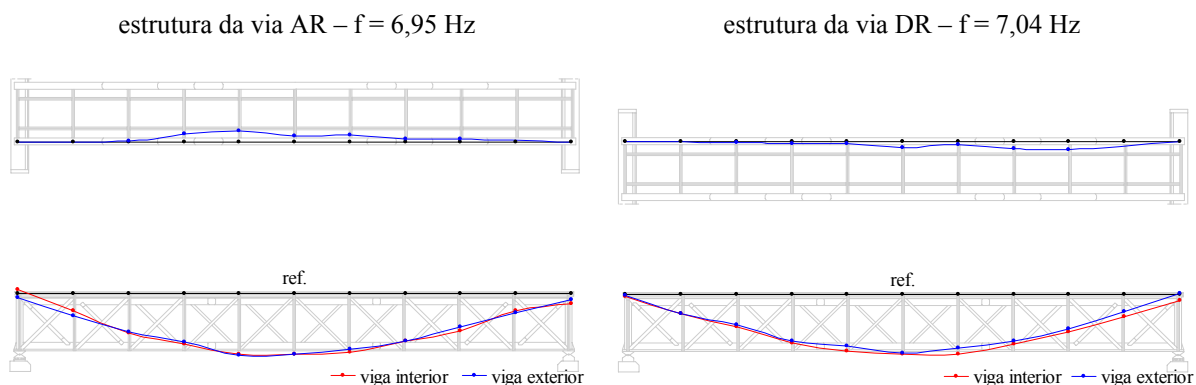


Figura 6.175 – Configuração do 2º modo identificado com o método ITD (1º modo vertical).

estrutura da via DR – $f = 10,28 \text{ Hz}$

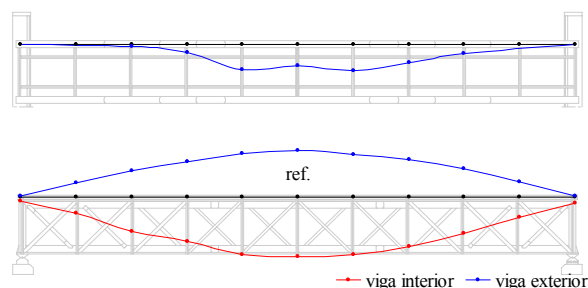


Figura 6.176 – Configuração do 3º modo identificado com o método ITD (1º modo de torção).

No quadro 6.31 resumem-se as características dinâmicas identificadas para as duas estruturas da ponte de Sacavém, com os dois métodos de identificação utilizados (BFD e ITD).

Quadro 6.31 – Características dinâmicas identificadas para a ponte de Sacavém.

modo	estrutura da via AR			estrutura da via DR		
	método BFD	método ITD		método BFD	método ITD	
	$f \text{ (Hz)}$	$f \text{ (Hz)}$	$\xi \text{ (%)}$	$f \text{ (Hz)}$	$f \text{ (Hz)}$	$\xi \text{ (%)}$
1º transversal	4,10	4,19	1,7	4,15	4,22	1,2
1º vertical	6,88	6,95	1,0	7,01	7,04	0,9
2º transversal	9,52	-	-	9,64	10,28	0,3
1º de torção	10,03	-	-	10,08	-	-
3º transversal	14,79	-	-	15,14	-	-
2º vertical	15,77	-	-	15,77	-	-
2º de torção	16,53	-	-	16,55	-	-

Analisando os valores apresentados no quadro 6.31, pode-se verificar que as frequências avaliadas com o método BFD são ligeiramente inferiores às identificadas com o método ITD, o que se considera ser devido ao efeito do amortecimento e também ao facto das estimativas das funções de densidade espectral serem discretas com uma resolução em frequência de 0,024 Hz.

Saliente-se que o 1º modo de vibração identificado para as duas estruturas é um modo transversal, e que o 1º modo vertical só se verifica para uma frequência que é cerca de 1,7 vezes superior; ou seja, em comparação com a direcção vertical, as duas estruturas são mais flexíveis na direcção transversal. Este aspecto, da flexibilidade das estruturas na direcção transversal, e que é evidente nas características dinâmicas identificadas, foi importante para as conclusões do estudo efectuado na ponte de Sacavém. Note-se que tanto o Eurocódigo 1 (CEN, 2001) como as regras da UIC (UIC, 1976, 1979, 1994) impõem limites à deformabilidade das estruturas de pontes para vias de comboios de alta velocidade, incluindo à sua deformabilidade transversal.

É também de notar que o 1º modo de vibração identificado é fundamentalmente transversal, mas também tem uma importante componente de torção (donde resulta o facto de nos espectros das

acelerações verticais registadas, ser também bem evidente um pico de ressonância na frequência correspondente a esse modo transversal).

Comparação com um modelo de elementos finitos:

Para analisar os efeitos da passagem dos comboios pendulares com diversas velocidades, foi desenvolvido um modelo de elementos finitos (ver figura 6.177), cujas características, nomeadamente as constantes de rigidez dos apoios e as condições de ligação nas extremidades das diversas barras, foram ajustadas de modo a aproximar as frequências calculadas com o modelo às frequências identificadas experimentalmente.

O modelo elaborado é constituído por 328 elementos de barra e 12 apoios elásticos com constantes de rigidez de $k = 1000 \text{ kN/mm}$ (apoios fixos) e $k = 10 \text{ kN/mm}$ (apoios móveis). O modelo tem um total de 736 graus de liberdade. Para todos os elementos estruturais, foi considerado um módulo de elasticidade de 200 GPa. A massa total, incluindo os elementos estruturais, os carris, travessas e o passeio lateral, foi considerada com um valor de 1800 kg/m.

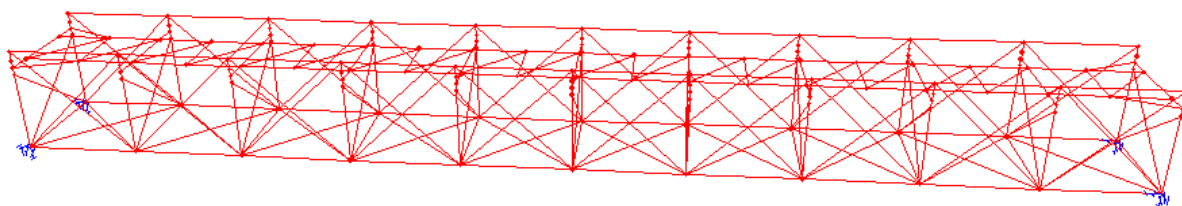


Figura 6.177 – Perspectiva do modelo de elementos finitos da ponte de Sacavém.

Na figura 6.178, comparam-se as frequências calculadas com o modelo de elementos finitos com as identificadas experimentalmente.

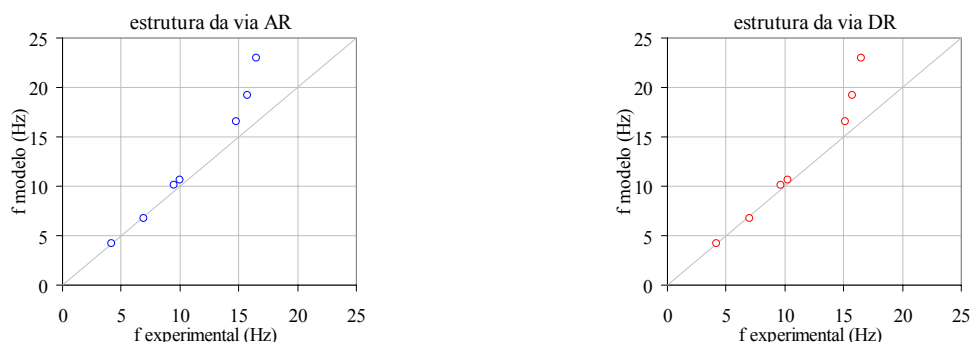


Figura 6.178 – Comparação entre frequências calculadas e identificadas experimentalmente.

Como se pode verificar na figura 6.178, o ajuste entre as frequências calculadas com o modelo e as identificadas experimentalmente é bastante bom para os quatro primeiros modos de vibração, havendo maiores diferenças para os três últimos modos. Embora o modelo pudesse ainda ser

melhorado, considerou-se que, para o objectivo da sua utilização, o ajuste com as características dinâmicas identificadas, era já razoável.

Considerações finais:

No estudo efectuado na ponte de Sacavém, foram utilizados dois métodos de identificação modal, o método BFD e o método ITD, tendo-se obtido bons resultados com ambos.

A ideia de utilizar a resposta em regime livre, que se verifica imediatamente após os comboios passarem por uma ponte, foi novamente explorada com sucesso. Enquanto que, no exemplo apresentado anteriormente relativo à ponte de Canelas, considerou-se apenas a resposta medida num ponto, no estudo efectuado para a ponte de Sacavém, o método ITD foi aplicado, considerando todos os registos de resposta (15 no total) o que permitiu avaliar, através desse método, não só as frequências e coeficientes de amortecimento, mas também as correspondentes configurações modais.

6.2.12 Viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa

Considerações gerais:

Os ensaios de caracterização dinâmica do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa (LNEC – Rodrigues, 2001) integraram-se num estudo de avaliação *in situ* do comportamento dessa obra, realizado pelo LNEC para a Câmara Municipal de Lisboa. Para além dos ensaios de caracterização dinâmica, esse estudo envolveu também a realização de ensaios de carga estáticos.

Antes do trabalho realizado pelo LNEC, foram também efectuados, pela empresa Lisconcebe (Barata, 2000), alguns trabalhos de inspecção da estrutura que envolveram uma inspecção visual, ensaios de avaliação da espessura dos recobrimentos, ensaios de provetes de betão e um nivelamento topográfico do tabuleiro.

Todos os trabalhos de inspecção e avaliação estrutural, efectuados no viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa, foram motivados pelo facto de essa obra apresentar uma deformação vertical que é claramente evidente por observação visual. Para a realização dos ensaios de caracterização dinâmica, contribuiu também o facto de, nos seus passeios laterais, as vibrações induzidas pelo tráfego rodoviário, serem claramente perceptíveis para os peões, havendo casos de pessoas que manifestaram o seu desconforto e até uma sensação de insegurança.

O principal objectivo dos ensaios dinâmicos efectuados no viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa, foi a avaliação experimental das propriedades dinâmicas do viaduto, contribuindo-se dessa

forma, com informação importante, para a compreensão do seu comportamento estrutural e para a calibração de modelos de elementos finitos utilizados no estudo e projecto de trabalhos de reparação e reforço do viaduto.

O estudo efectuado no viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa, foi apresentado numa conferência internacional (Rodrigues, 2002).

Breve descrição do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa:

O viaduto, cujo estudo de caracterização dinâmica experimental se apresenta em seguida, localiza-se em Lisboa, junto à Praça de Espanha, na rua Ramalho Ortigão, constituindo uma passagem superior sobre a Av. Calouste Gulbenkian. É uma obra da autoria do Prof. Edgar Cardoso e foi construída em 1972 pela empresa EMPEC.

Trata-se de um viaduto constituído por duas grandes consolas longitudinais com 30,35 m de comprimento cada uma, em betão armado pré-esforçado, que servem de apoio a um tramo central com 10,0 m, em betão armado, vencendo uma distância total de 70,7 m entre faces dos encontros (ver figura 6.179).

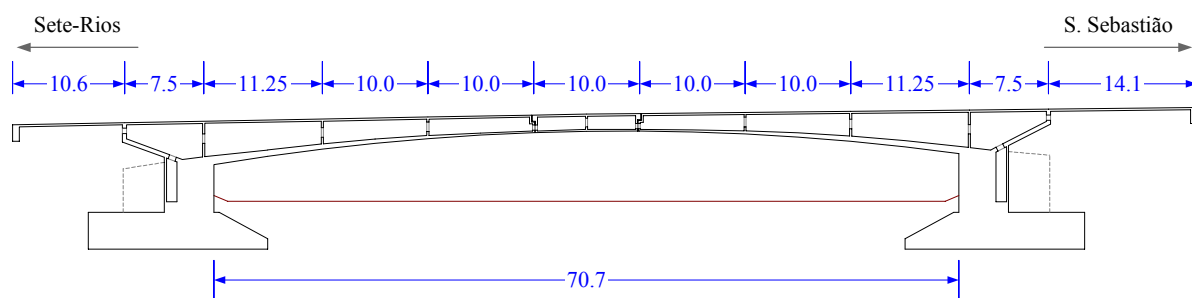


Figura 6.179 – Corte longitudinal do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa.

A estrutura, que vence o vão de 70,7 m, prolonga-se nos seus acessos por nervuras, solidarizadas entre si, na sua extremidade, por uma carlinga. Assim, a extensão total do viaduto entre juntas de dilatação extremas é de 112,2 m.

A secção transversal do tabuleiro do viaduto, é constituída por um caixão tricelular, com 8,0 m de largura, ladeado por consolas transversais pré-esforçadas com 8,0 m de balanço (ver figura 6.180). Estas consolas e os banzos superiores das células exteriores do caixão, são vazadas por tubos cilíndricos não contínuos, dispostos transversalmente, com 1,1 m de comprimento e diâmetro variável, formando uma grelha de pequenas nervuras longitudinais e transversais. O caixão tricelular apresenta uma grande variação de inércia, já que sobre o apoio nos encontros tem 4,0 m de altura e a meio vão, tem cerca de 1,6 m.

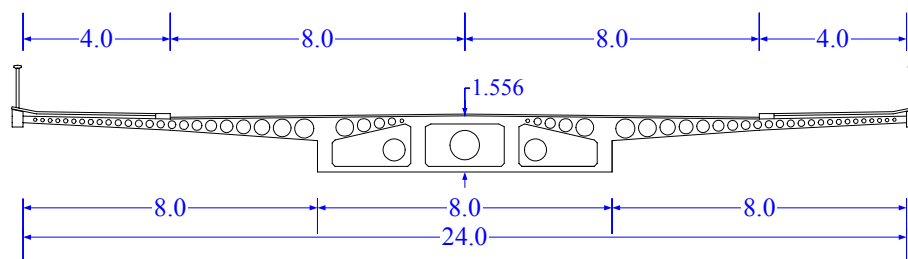


Figura 6.180 – Secção transversal a $\frac{1}{2}$ vão do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa.

As consolas longitudinais do tabuleiro estão monoliticamente ligadas aos encontros, que são constituídos por pilares de grande inércia com maciços de fundação directa, que distribuem as elevadas cargas aos terrenos de fundação de natureza basáltica.

As nervuras longitudinais que prolongam as longarinas do caixão tricelular, no tardo do pilar-encontro, são paredes que recebem ancoragens passivas do pré-esforço longitudinal do tabuleiro, a vários níveis de altura e em diferentes localizações.

Os apoios do tramo central sobre as consolas longitudinais materializam-se através de aparelhos de apoio em neoprene cintado, estando garantido o travamento transversal do tramo central através de ferrolhos horizontais dispostos nas consolas transversais, os quais no entanto permitem deslocamentos longitudinais.

O viaduto da rua Ramalho Ortigão, apresenta uma deformação vertical significativa da extremidade das consolas longitudinais do tabuleiro, que se nota ser mais acentuada do lado de Sete-Rios. Com o nivelamento topográfico efectuado no âmbito do trabalho realizado pela empresa Lisconcebe (Barata, 2000), foi possível verificar, entre outros aspectos, que a consola longitudinal do lado de Sete-Rios apresenta um deslocamento vertical na sua extremidade de cerca de 20 cm (para baixo), enquanto que na consola longitudinal do lado oposto há um deslocamento vertical de 10 cm (também para baixo).

Na figura 6.181 podem observar-se alguns aspectos do viaduto da rua Ramalho Ortigão.



Figura 6.181 – Alguns aspectos do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa.

Equipamento utilizado e ensaios efectuados:

Nos ensaios de caracterização dinâmica do viaduto da rua Ramalho Ortigão, foi utilizado exactamente o mesmo equipamento que nos ensaios, apresentados anteriormente, dos viadutos V1 e V2 da auto-estrada A-14, não se repetindo aqui a listagem do mesmo.

A técnica de ensaio utilizada foi semelhante à adoptada em estudos apresentados anteriormente. Na figura 6.182 indicam-se as secções instrumentadas nos ensaios e na figura 6.183 indicam-se os pontos em que, em cada secção, foram colocados os acelerómetros.

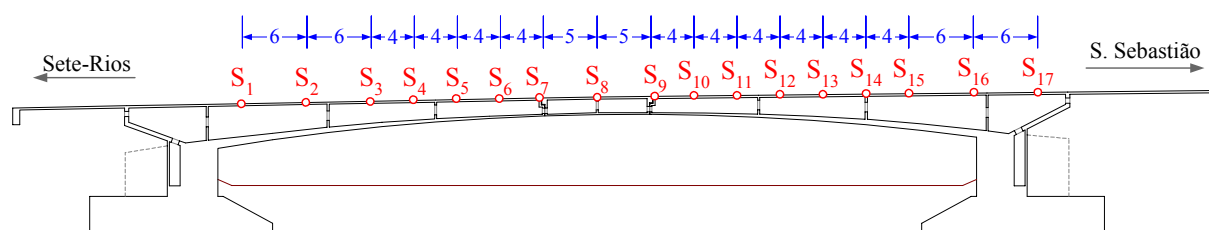


Figura 6.182 – Secções instrumentadas nos ensaios do viaduto da rua Ramalho Ortigão.

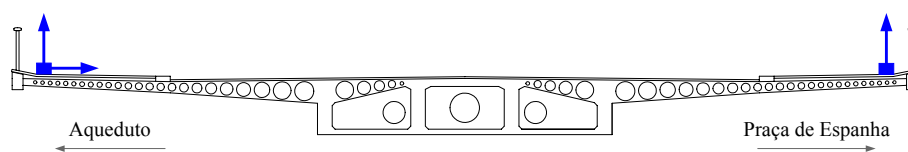


Figura 6.183 – Pontos de colocação dos acelerómetros em cada secção.

No viaduto da rua Ramalho Ortigão, foram efectuados um total de 4 ensaios seguindo a sequência que é indicada no quadro 6.32 e na figura 6.184. Como se pode verificar, foram considerados 5 transdutores de referência (nas secções S₈ e S₁₃) e 10 transdutores móveis.

Quadro 6.32 – Pontos instrumentados em cada ensaio do viaduto da rua Ramalho Ortigão.

ensaio	unidade 1			unidade 2			unidade 3			unidade 4			unidade 5		
	cn.1	cn.2	cn.3	cn.4	cn.5	cn.6	cn.7	cn.8	cn.9	cn.10	cn.11	cn.12	cn.13	cn.14	cn.15
1	1 v.	7 v.	15 v.	2 v.	8 v.	16 v.	17 v.	25 v.	27 v.	18 v.	26 v.	28 v.	5 t.	15 t.	17 t.
2	3 v.	9 v.		4 v.	10 v.		19 v.		29 v.	20 v.		30 v.	7 t.		21 t.
3	5 v.	11 v.		6 v.	12 v.		21 v.		31 v.	22 v.		32 v.	9 t.		23 t.
4		13 v.			14 v.		23 v.		33 v.	24 v.		34 v.	11 t.		27 t.

v. – direcção vertical; t. – direcção transversal.

Nos ensaios do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa, o equipamento de medição com os acelerómetros ES-U foi configurado de modo a permitir discretizar uma amplitude mínima de aceleração de 2,4 μg . A frequência de amostragem utilizada foi de 200 Hz e em cada ensaio obtiveram-se registos com cerca de 30 minutos de duração total (360448 valores a 200 Hz).

Os ensaios foram efectuados em condições usuais de serviço do viaduto, ou seja, sem qualquer interrupção do tráfego que normalmente sobre ele circula.

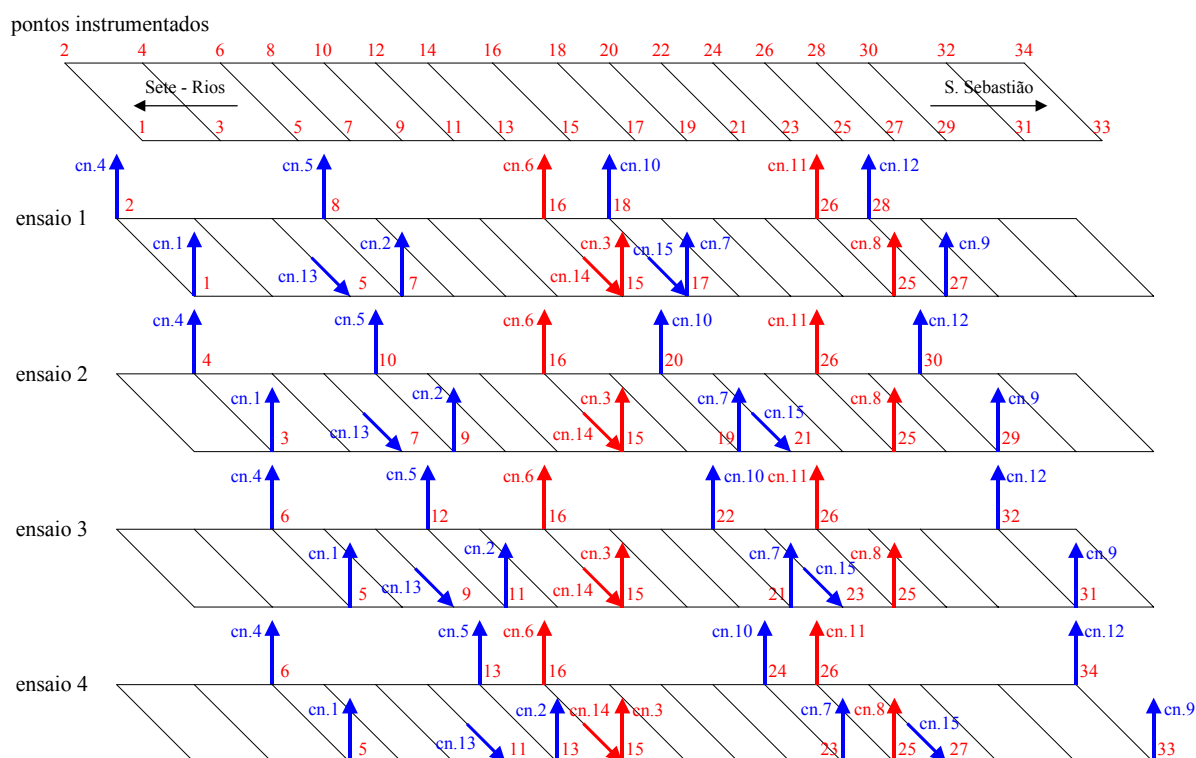


Figura 6.184 – Pontos instrumentados e sequência dos ensaios efectuados no viaduto da rua Ramalho Ortigão.

Identificação modal:

No estudo de caracterização dinâmica experimental do viaduto da rua Ramalho Ortigão, (LNEC – Rodrigues, 2001) utilizou-se o método BFD, tendo-se obtido os resultados que serão apresentados mais adiante. Para este trabalho, analisaram-se novamente os registos adquiridos nos ensaios realizados, utilizando outros métodos no domínio da frequência, nomeadamente os métodos FDD e EFDD, já descritos no capítulo 4.

Antes da aplicação dos métodos de identificação modal estocástica, os registos de resposta medidos nos ensaios, foram sujeitos a um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações:

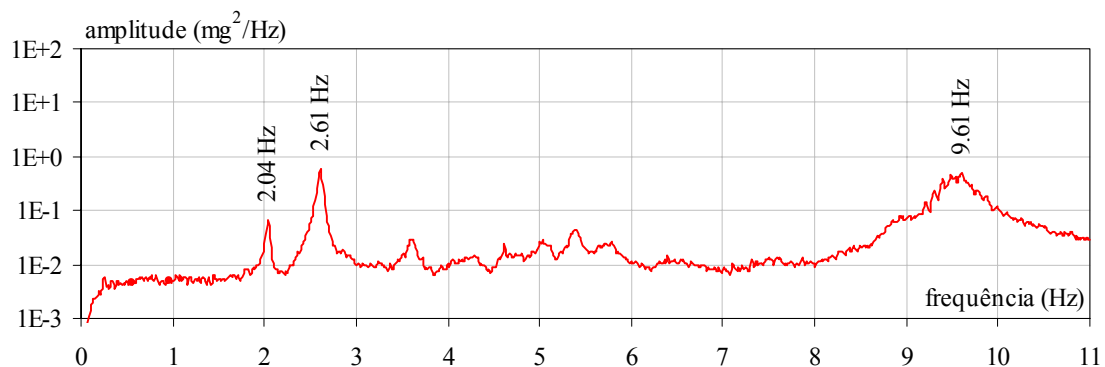
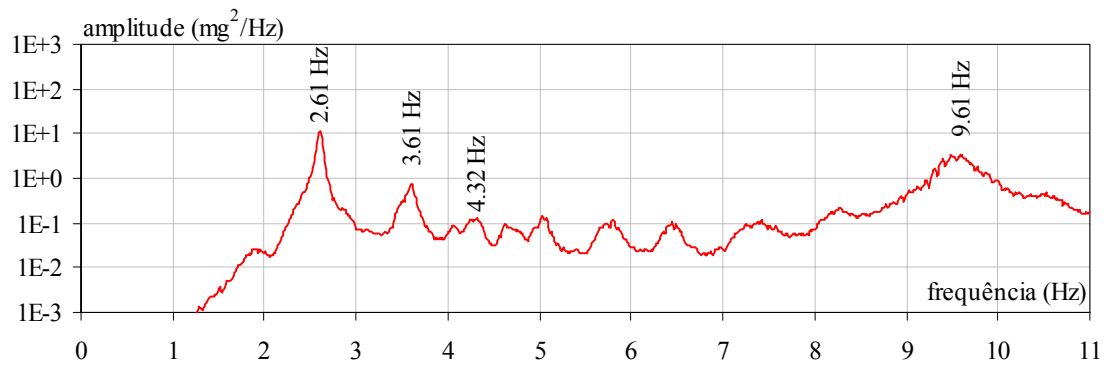
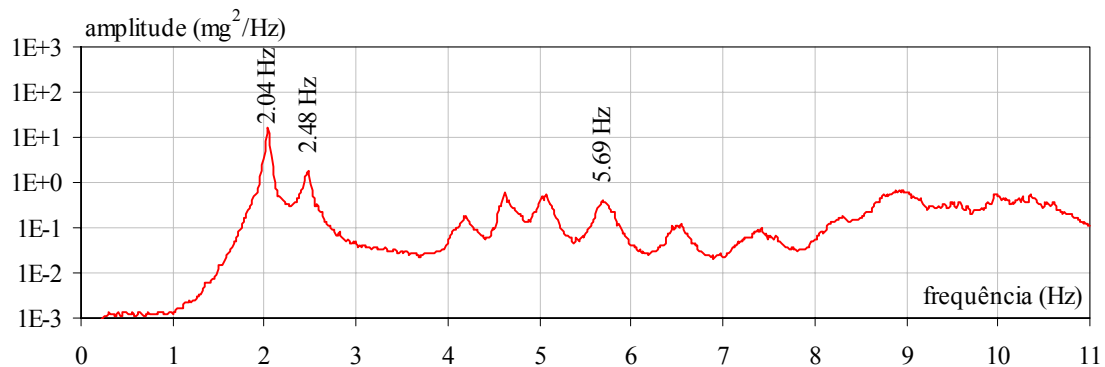
- remoção da componente contínua ou de tendências lineares;
- filtragem passa-alto a 0,1 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 1;
- filtragem passa-baixo a 20 Hz com um filtro *Butterworth* de ordem 4;
- decimação de 200 Hz para 50 Hz.

Ao nível do pré-processamento para o método BFD, foram também calculadas as séries correspondentes à semi-soma e à semi-diferença dos dois registos verticais obtidos em cada secção instrumentada. As séries assim determinadas foram apenas consideradas para a avaliação dos espectros normalizados médios, para distinguir melhor os picos de ressonância correspondentes a

modos verticais e a modos de torção. Para a identificação das componentes modais em cada ponto, consideraram-se, em qualquer dos métodos, as séries directamente registadas em cada ponto.

Para os diversos métodos de identificação modal utilizados, as funções de densidade espectral da resposta do viaduto foram estimadas utilizando a técnica descrita no capítulo 4, baseada no algoritmo da FFT. Para tal, foram consideradas amostras com 4096 valores, a que corresponde, para a frequência de amostragem de 50 Hz, uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,012$ Hz. Às amostras foi aplicada uma janela de *Hanning* para reduzir os efeitos de escorregamento (*leakage*).

Nas figuras 6.185 a 6.187 apresentam-se os espectros normalizados médios correspondentes à semi-soma dos registos verticais, semi-diferença dos registos verticais e aos registos transversais.



Nas figuras 6.185 a 6.187 indicam-se também os valores das frequências que foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração do viaduto. Como se pode verificar, há alguns picos de ressonância, para os quais não se indicam os respectivos valores das frequências; tal deve-se ao facto de, após a análise das funções de coerência e das relações de amplitude e fase entre os diferentes pontos instrumentados, se ter considerado que não é possível concluir que esses picos correspondem a modos naturais de vibração da estrutura.

Com o método BFD identificaram-se as frequências e configurações de 7 modos naturais de vibração do viaduto. Estimaram-se também os correspondentes coeficientes de amortecimento, utilizando o método, apresentado no capítulo 4, de ajuste de um espectro analítico aos pisos de ressonância dos auto-espectros das respostas medidas experimentalmente. Os valores das frequências e dos coeficientes de amortecimento obtidos com o método BFD são indicados no quadro 6.33 onde são comparados com os obtidos com os métodos FDD e EFDD.

Nas figuras 6.188 a 6.193 apresentam-se as configurações avaliadas com o método BFD para os seis primeiros modos identificados. Nessas figuras incluem-se também barras de erro que representam os intervalos de confiança a 95 % na estimativa das componentes modais. Como se pode verificar, para o 1º modo vertical, 1º modo de torção e mesmo para o 2º modo de torção, essas barras de erro são muito pequenas, o que traduz a boa relação sinal/ruído nas respectivas frequências e, consequentemente, a qualidade das estimativas dessas configurações modais.

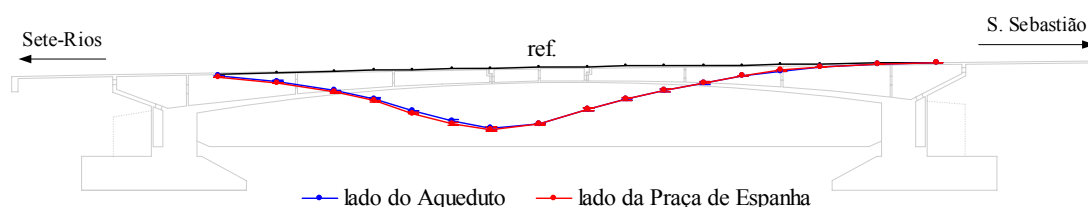


Figura 6.188 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 2,04$ Hz (1º modo vertical).

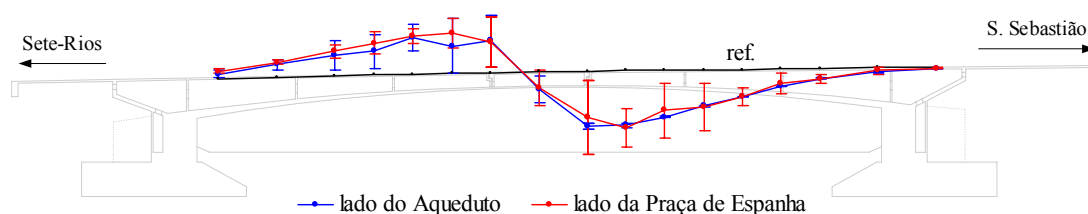


Figura 6.189 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 2,48$ Hz (2º modo vertical).

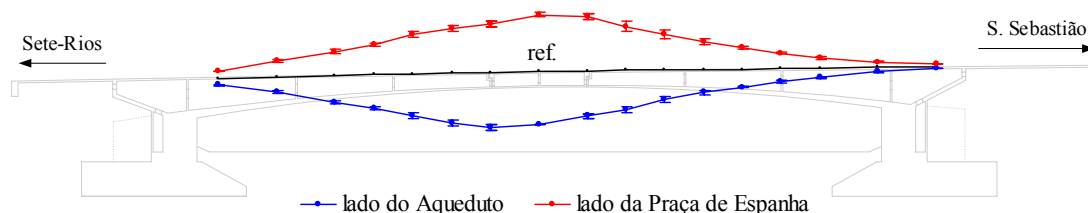
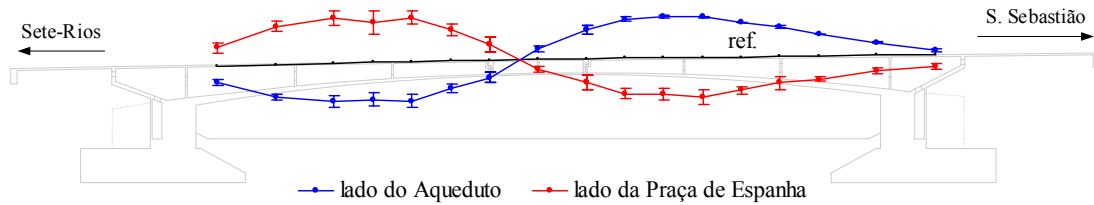
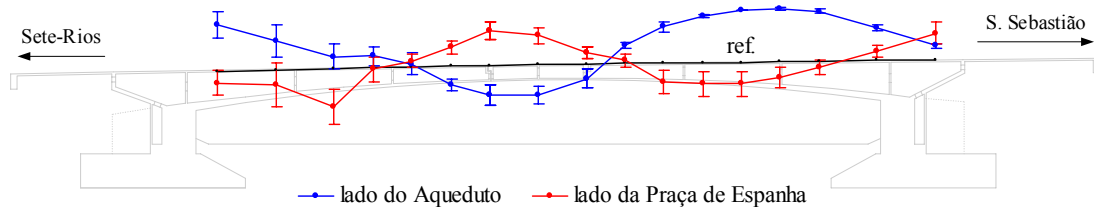
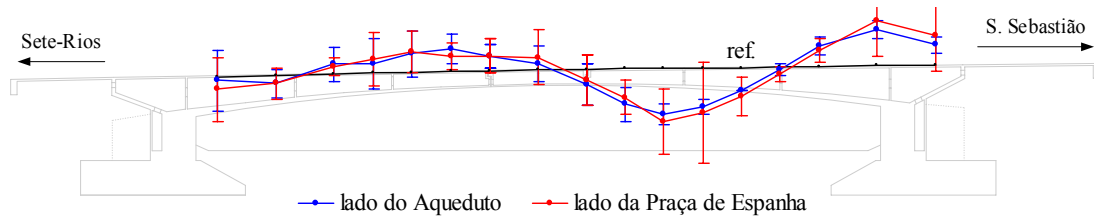


Figura 6.190 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 2,61$ Hz (1º modo de torção).


 Figura 6.191 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 3,61$ Hz (2º modo de torção).

 Figura 6.192 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 4,32$ Hz (3º modo de torção).

 Figura 6.193 – Configuração identificada com o método BFD para $f = 5,69$ Hz (3º modo vertical).

Na figura 6.194 apresentam-se os espectros dos quatro primeiros valores singulares da matriz de funções de densidade espectral da resposta do viaduto, medida experimentalmente. Conforme referido no capítulo 4, esses espectros de valores singulares servem de base para a identificação modal efectuada de acordo com os métodos FDD e EFDD. Na figura 6.194 estão também indicados os valores das frequências dos picos de ressonância que foram considerados como correspondentes a modos naturais de vibração do viaduto.

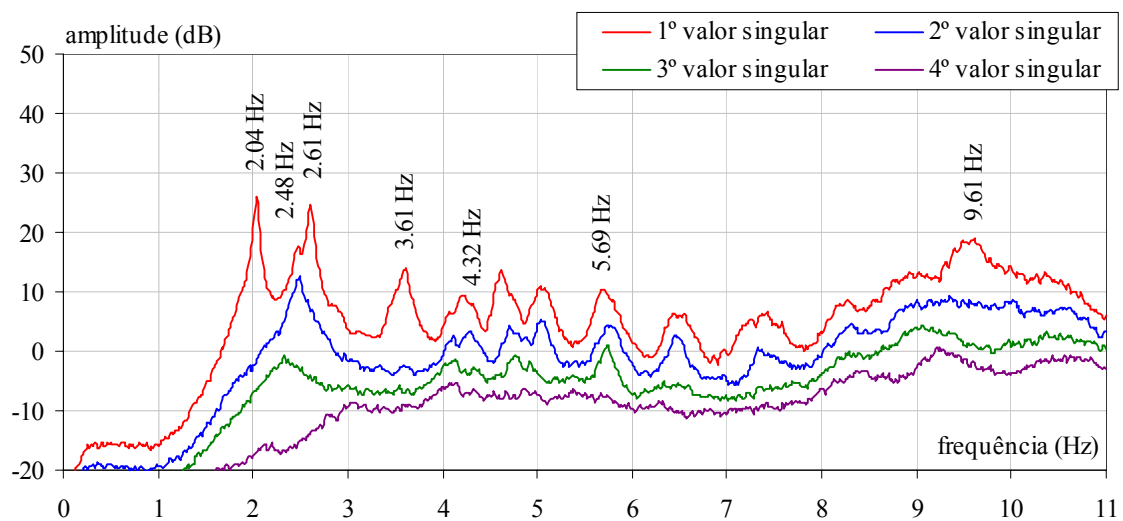


Figura 6.194 – Espectros dos quatro primeiros valores singulares.

Salienta-se que, para a identificação, com os métodos FDD e EFDD, dos dois modos com frequências de 2,48 Hz (2º vertical) e 2,61 Hz (1º de torção), é importante analisar os espectros do 1º e do 2º valor singular (ver figura 6.194).

No quadro 6.33 indicam-se os valores das frequências e coeficientes de amortecimento, avaliados para o viaduto da rua Ramalho Ortigão, com os três métodos de identificação modal estocástica utilizados (métodos BFD, FDD e EFDD). Pode-se verificar que os valores das frequências identificadas com o método FDD coincidem com os valores identificados com o método BFD; já com o método EFDD obtiveram-se valores das frequências que, para alguns modos, são ligeiramente diferentes dos avaliados com os outros métodos. Em relação aos coeficientes de amortecimento, obtiveram-se, com os métodos utilizados, valores que se podem considerar como relativamente próximos, à excepção do valor para o modo com 4,32 Hz, para o qual há uma maior diferença.

Quadro 6.33 – Características dinâmicas identificadas para o viaduto da rua Ramalho Ortigão.

tipo de modo	método BFD		método FDD	método EFDD	
	f (Hz)	ξ (%)		f (Hz)	ξ (%)
1º vertical	2,04	1,0	2,04	2,04	1,1
2º vertical	2,48	1,7	2,48	2,47	1,3
1º de torção	2,61	1,1	2,61	2,60	1,2
2º de torção	3,61	1,8	3,61	3,59	2,3
3º de torção	4,32	1,8	4,32	4,32	0,8
3º vertical	5,69	1,4	5,69	5,71	1,1
transversal c/ torção	9,61	2,1	9,61	9,55	1,7

Para comparar as configurações modais identificadas com os três métodos, determinaram-se os coeficientes MAC entre os vectores modais avaliados com cada um. Na figura 6.195 apresentam-se as matrizes de coeficientes MAC obtidos para os seis primeiros modos identificados.

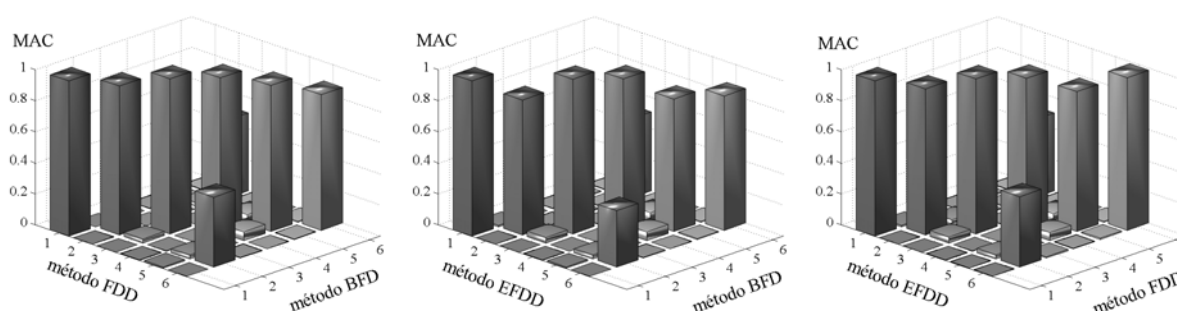


Figura 6.195 – Coeficientes MAC entre vectores modais identificados com os métodos BFD, FDD e EFDD.

Como se pode verificar na figura 6.195, os elementos da diagonal principal das matrizes de coeficientes MAC, são todos muito próximos de 1, o que reflecte a boa correlação entre os vectores modais identificados com os três métodos utilizados, e portanto, a concordância entre as configurações modais avaliadas com métodos diferentes. Note-se que esta é também uma forma de validar os

resultados obtidos com os métodos de identificação modal estocástica – obter, através de métodos diferentes, resultados que, à parte de ligeiras diferenças, são concordantes entre si.

Relativamente às configurações modais identificadas, há um aspecto importante que merece ser salientado. Na configuração identificada para o 1º modo vertical, pode constatar-se a existência de uma assimetria na deformabilidade do viaduto. De facto, verifica-se que a componente modal na extremidade da consola longitudinal do lado de Sete-Rios é 42 % superior à componente modal na extremidade da consola longitudinal do lado de S. Sebastião (ver figura 6.196). Esta assimetria do comportamento do viaduto, constatada na configuração do 1º modo vertical, está de acordo com a deformação vertical permanente que a obra apresenta e também com os resultados dos ensaios de carga estáticos realizados pelo LNEC.

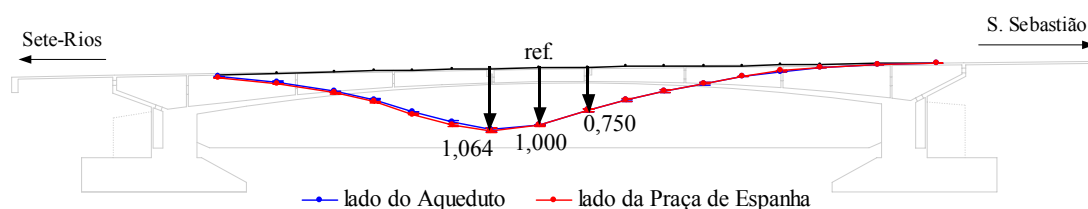


Figura 6.196 – Assimetria na configuração do 1º modo vertical ($f = 2,04$ Hz).

Considerações finais:

Com base nos registos de resposta obtidos em ensaios realizados *in situ*, foram identificadas as características de 7 modos de vibração do viaduto da rua Ramalho Ortigão em Lisboa, nomeadamente, as suas frequências, configurações e coeficientes de amortecimento. Aplicando três métodos de identificação modal estocástica, obtiveram-se resultados concordantes entre si.

As características modais identificadas no estudo efectuado foram um contributo importante para o diagnóstico do comportamento estrutural do viaduto e para a calibração de um modelo de elementos finitos desenvolvido na empresa Lisconcebe, no âmbito do estudo de soluções de reparação e reforço a efectuar na obra.

No estudo realizado (LNEC – Rodrigues, 2001), foi também efectuada uma análise dos níveis de vibração nos passeios laterais do viaduto, sob o ponto de vista da susceptibilidade humana às vibrações, considerando os critérios propostos em (Pretlove e Rainer, 1991). Constatou-se que de facto, os níveis de vibração nos passeios laterais, podem ser considerados como desconfortáveis para os peões que neles circulam.

6.2.13 Características dinâmicas de estruturas de pontes, avaliadas *in situ* pelo LNEC

Conforme referido anteriormente, a avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de pontes tem um longa tradição no LNEC, tendo-se obtido ao longo dos anos, informação importante, que se procurou organizar neste trabalho na forma que se apresenta em seguida.

O primeiro estudo realizado no LNEC, em que houve o objectivo de avaliar as características dinâmicas duma ponte, foram os ensaios dinâmicos efectuados na ponte em arco sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954). Nos ensaios então efectuados, foram utilizados extensómetros de resistência eléctrica montados num sistema especial de amplificação mecânica desenvolvido no LNEC. Estes transdutores foram colocados em 3 secções do arco da ponte, tendo sido efectuados ensaios em que se registaram as extensões devidas à passagem de camiões carregados, circulando a diversas velocidades, e ainda ensaios de ressalto em que os camiões passaram por cima de uma tábua com 2 cm de altura. Da análise dos registos obtidos, avaliaram-se os coeficientes de amplificação dinâmica e também o valor da frequência do 1º modo vertical da estrutura. Na figura 6.197, podem observar-se alguns aspectos dos ensaios dinâmicos realizados na ponte sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954) e na figura 6.198 apresentam-se dois dos registos de extensões então obtidos.



Figura 6.197 – Aspectos dos ensaios dinâmicos da ponte sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954).

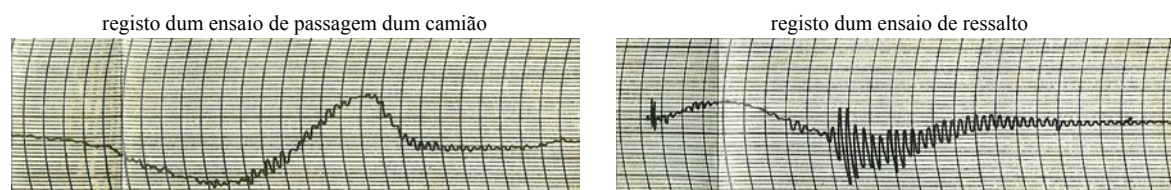


Figura 6.198 – Extensões registadas nos ensaios dinâmicos da ponte sobre o rio Sousa (LNEC - Marecos, 1954).

No domínio da avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de pontes, é também de referir o trabalho efectuado na ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa, quer no âmbito dos ensaios de recepção dessa estrutura (LNEC - Marecos *et al.*, 1967), quer com o sistema de monitorização dinâmica que na altura esteve instalado na ponte (LNEC - Marecos e Castanheta, 1970). Os estudos então efectuados na ponte suspensa sobre o rio Tejo foram objecto de um artigo publicado no *Journal of the Structural Division* da ASCE (Marecos *et al.*, 1969). Note-se ainda que, recentemente, numa revisão dos diversos métodos de ensaio dinâmico de estruturas de pontes, Farrar *et al.* (1999) referem os ensaios efectuados pelo LNEC na ponte suspensa sobre o rio Tejo como uma das primeiras aplicações do método de ensaio que consiste na imposição duma deformação inicial que é repentinamente libertada, deixando as estruturas a vibrar em regime livre. Na ponte suspensa sobre o rio Tejo, esse ensaio consistiu na aplicação na secção de meio vão, duma força excêntrica de cerca de 100 kN, tendo a sua libertação sido realizada pela rotura duma peça metálica calibrada, ligada a um cabo amarrado superiormente, do lado de jusante, ao cabo principal da ponte e inferiormente a um guincho instalado numa grua flutuante. Foram realizados três desses ensaios, tendo-se obtido uma concordância perfeita de resultados (LNEC - Marecos *et al.*, 1967).

A maior parte dos trabalhos de avaliação das características dinâmicas de estruturas de pontes desenvolvidos no LNEC foram efectuados no âmbito dos ensaios de recepção dessas obras, realizados após a sua construção e antes da sua entrada em serviço. Na maioria desses trabalhos foram utilizados extensómetros, de resistência eléctrica ou de tipo indutivo, colocados em duas ou três secções das estruturas a ensaiar, tendo por objectivo a avaliação de coeficientes de amplificação dinâmica resultantes do tráfego de camiões, da frequência do 1º modo de vibração vertical do tabuleiro das pontes e do respectivo coeficiente de amortecimento.

No estudo realizado na ponte atirantada sobre o rio Arade (Corrêa e Campos Costa, 1992), efectuou-se já um trabalho de identificação modal da estrutura, entendendo-se como tal, a avaliação de componentes modais em diversos pontos das estruturas, para além da avaliação das frequências e coeficientes de amortecimento (que pode ser feita a partir da resposta num único ponto). No estudo efectuado na ponte sobre o rio Arade, foi utilizada uma instrumentação fixa, composta por um total de 11 transdutores de diversos tipos (deslocamento, velocidade e aceleração). A análise de identificação modal aplicada à informação obtida nos ensaios foi efectuada utilizando um método de decomposição em valores e vectores próprios da matriz das funções de densidade espectral da resposta, ou seja, uma técnica, conforme referido no capítulo 4, semelhante ao método de decomposição no domínio da frequência (FDD).

Conforme se salientou na introdução e se pode verificar através dos exemplos apresentados neste capítulo, nos estudos efectuados no âmbito deste trabalho, conseguiu-se chegar, a partir da

informação obtida experimentalmente, a uma descrição bastante completa das propriedades dinâmicas das estruturas de diversas das pontes ensaiadas. Para tal, foi obviamente importante dispor de transdutores, sistemas de aquisição de dados e de meios de cálculo com uma capacidade que não havia disponível em estudos realizados anteriormente no LNEC. No entanto, adicionalmente, houve também um esforço para efectuar uma maior sistematização tanto dos procedimentos de ensaio como dos métodos de análise, resultante da percepção e compreensão que se teve, das vantagens da identificação modal estocástica como forma de avaliar as características dinâmicas das estruturas de engenharia civil, com base na análise da sua resposta às acções a que normalmente estão sujeitas.

Considerando os resultados obtidos ao longo dos 50 anos de actividade do LNEC, no domínio da avaliação *in situ* das características dinâmicas de estruturas de pontes, foi possível constituir uma base de dados que envolve a informação obtida em 112 pontes (85 rodoviárias e 27 ferroviárias), que é interessante analisar e comparar com resultados obtidos em estudos experimentais realizados por outras entidades.

Em anexo apresenta-se uma listagem exhaustiva dos estudos efectuados neste domínio pelo LNEC, indicando-se o ano em que foram efectuados, os seus autores, as pontes a que se referem e o seu maior vão, e ainda o valor identificado para a frequência do 1º modo de vibração vertical. Considerando esses valores, separadamente para pontes rodoviárias e para pontes ferroviárias, determinaram-se, por ajuste de mínimos quadrados aos valores experimentais, expressões para a frequência do 1º modo de vibração vertical (f_{1V}) em função do maior vão da ponte (L), tendo-se obtido as seguintes relações:

- Para pontes rodoviárias (com um coeficiente de correlação de $R^2 = 0,91$):

$$f_{1V} = 86,9 L^{-0,92} \quad (6.1)$$

- Para pontes ferroviárias (com um coeficiente de correlação de $R^2 = 0,85$):

$$f_{1V} = 43,3 L^{-0,60} \quad (6.2)$$

No que diz respeito às pontes rodoviárias, diversos autores têm proposto expressões semelhantes a (6.1). Refere-se em seguida a apresentada por Paultre *et al.* (1992), que envolve o ajuste aos valores obtidos experimentalmente por diversas entidades num total de 883 pontes (16 pelo *Centre de Recherches Routières* de Bruxelas; 630 pelo *Ministry of Public Works* de Liège; 250 pelo Laboratório Federal EMPA da Suíça; e 12 pelo MTCO e MTQ do Canadá). A expressão indicada por Paultre *et al.* (1992) é:

$$f_{1V} = 82 L^{-0,9} \quad (6.3)$$

No que se refere às pontes ferroviárias, Fryba (1996) apresenta a expressão geral indicada em seguida, que resultou do ajuste a valores obtidos experimentalmente em pontes de diversos tipos e materiais:

$$f_{1v} = 133 L^{-0,9} \quad (6.4)$$

Nas figuras 6.199 e 6.200 apresentam-se graficamente os valores obtidos experimentalmente pelo LNEC e comparam-se as curvas obtidas por ajuste a esses valores, com as curvas, acima indicadas, resultantes do ajuste a resultados experimentais obtidos por outras entidades.

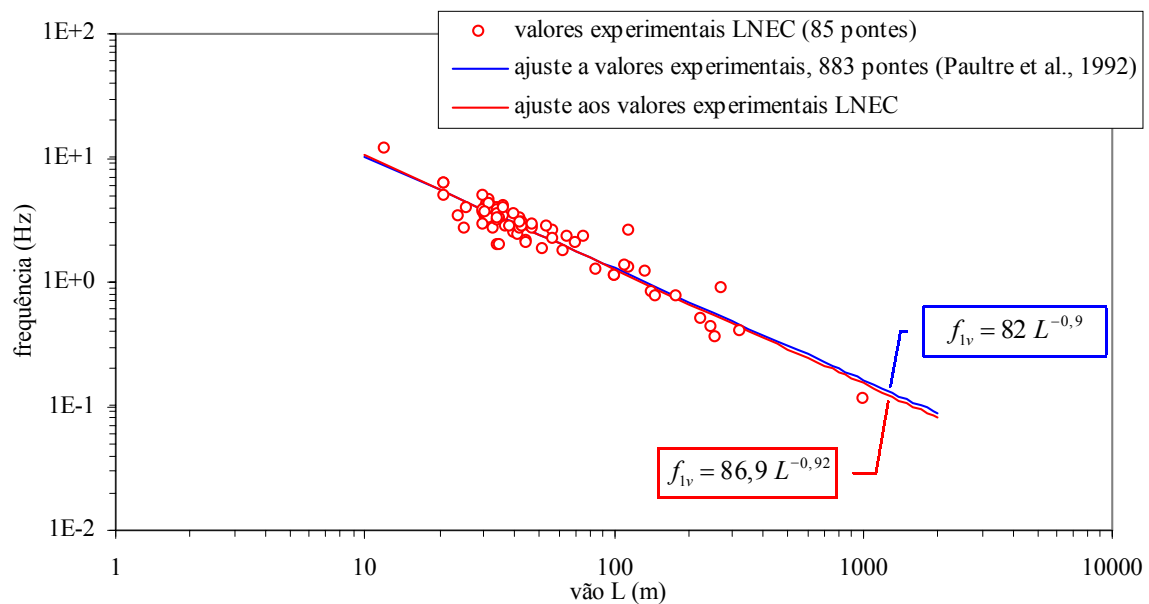


Figura 6.199 – Frequência do 1º modo vertical de pontes rodoviárias em função do seu maior vão.

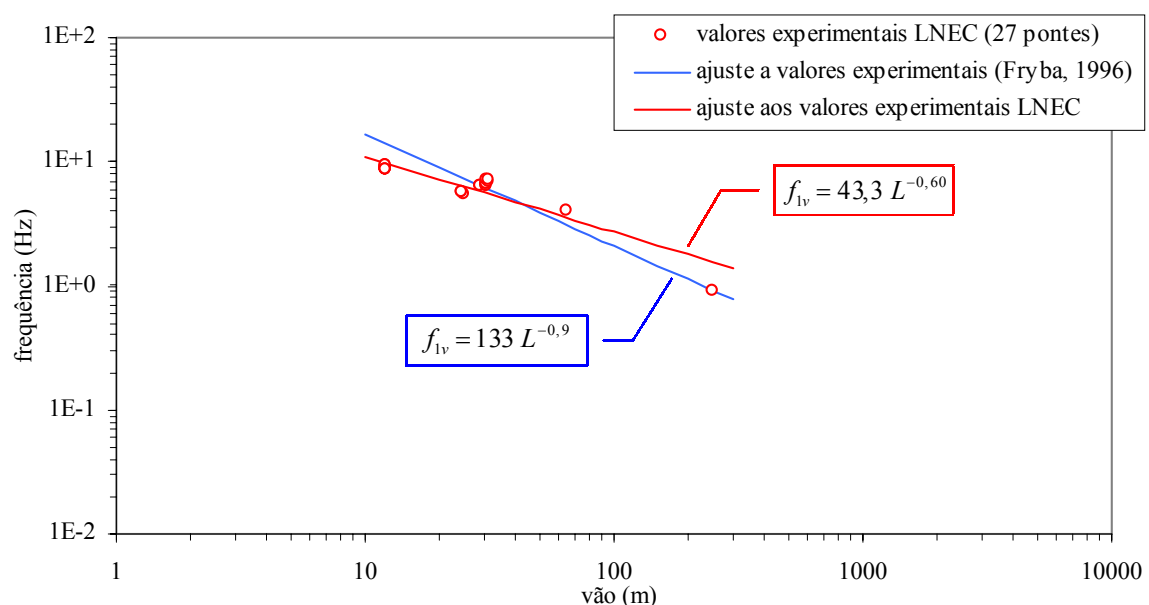


Figura 6.200 – Frequência do 1º modo vertical de pontes ferroviárias em função do seu maior vão.

Relativamente às pontes rodoviárias, como se pode verificar na figura 6.199, há uma concordância muito boa entre a curva ajustada aos valores obtidos pelo LNEC e a curva indicada por Paultre *et al.* (1992).

Quanto às pontes ferroviárias (ver a figura 6.200), já não se obteve uma concordância tão boa entre a curva ajustada aos valores obtidos pelo LNEC e a curva indicada por Fryba (1996). No entanto, note-se que o número de valores obtidos pelo LNEC, relativos a pontes ferroviárias não é muito grande e não abarca uma gama tão grande de vãos como no caso das pontes rodoviárias, não sendo por isso de estranhar que essa concordância não seja tão boa.

6.3 Estruturas de edifícios

Conforme referido anteriormente, a maioria das aplicações incluídas neste capítulo e apresentadas até agora dizem respeito a estruturas de pontes. Ilustra-se agora a aplicação dos métodos de identificação modal estocástica em estruturas de edifícios, utilizando para tal dois exemplos, um edifício real de 15 pisos, o *Heritage Court Tower* (HCT), em *Vancouver* no Canadá, e um modelo à escala $\frac{1}{4}$ de um edifício de 4 pisos.

6.3.1 Edifício HCT

Considerações gerais:

O trabalho de identificação modal do edifício HCT foi desenvolvido no âmbito dum projecto proposto pelo Prof. Carlos Ventura da *University of British Columbia* (UBC) no Canadá, ao Grupo de Engenharia Civil da *Society for Experimental Mechanics* (SEM), com o objectivo de comparar os resultados de diferentes técnicas de identificação modal estocástica, aplicadas, por diferentes grupos de investigação com interesse nessa área. Para tal, foram disponibilizados a todos os interessados em participar, os registos de acelerações obtidos em ensaios de medição de vibrações ambiente, realizados por uma equipa da UBC (Dyck e Ventura, 1998) num edifício de 15 pisos, o *Heritage Court Tower* (HCT) localizado em *Vancouver* no Canadá. Foram também disponibilizados os desenhos de projecto do edifício, pois para além do trabalho de análise modal experimental, colocou-se também o desafio aos participantes de desenvolverem modelos de elementos finitos do edifício e de fazerem uma comparação entre as características dinâmicas experimentais e as calculadas com esse modelo.

Os trabalhos desenvolvidos pelos diferentes grupos participantes foram apresentados na conferência internacional IMAC XVIII realizada em Fevereiro de 2000 em *San Antonio* nos EUA (Ventura e Horyna, 2000; Cunha *et al.*, 2000; Brincker e Andersen, 2000; Kullaa, 2000; Piombo *et al.*,

2000; De Roeck *et al.*, 2000). Os resultados que se apresentam em seguida foram também objecto de uma apresentação oral (Rodrigues e Campos Costa, 2000) nessa mesma conferência, embora não estejam incluídos nos respectivos *proceedings*.

Breve descrição do edifício HCT e dos ensaios efectuados pela equipa da UBC:

O *Heritage Court Tower* é um edifício de 15 pisos com estrutura de betão armado, constituída por pilares e um núcleo de paredes resistentes, sendo estas os elementos estruturais mais importantes em termos de resistência a acções laterais. Os pavimentos em cada piso são constituídos por lajes de betão armado pré-esforçado. Para além dos 15 pisos acima do nível térreo, o edifício HCT tem ainda 4 níveis de caves utilizadas para estacionamento de automóveis.

O edifício HCT tem uma forma aproximadamente rectangular em planta, com algumas variações em altura, que se verificam nos 3º, 12º e 14º pisos. Na figura 6.201 podem-se observar três fachadas do edifício HCT (Dyck e Ventura, 1998).



Figura 6.201 – Algumas vistas do edifício HCT (Dyck e Ventura, 1998).

Os ensaios de medição de vibrações ambiente efectuados no edifício HCT foram realizados por uma equipa da UBC liderada pelo Prof. Carlos Ventura. Nesses ensaios foram utilizados 8 acelerómetros uniaxiais, modelo FBA-11 da *Kinematics*, tendo sido medidas acelerações de 2 em 2 pisos num total de 8 pisos. Foram assim efectuados 5 ensaios, com 2 acelerómetros de referência que ficaram colocados no 14º piso e com 6 acelerómetros móveis que foram sendo sucessivamente colocados nos pisos 12º e 10º, 8º e 6º, 4º e 2º e, finalmente, também no R/C. Na figura 6.202 apresenta-se a sequência dos ensaios efectuados no edifício HCT, indicado-se a colocação dos acelerómetros em cada um deles, utilizando para tal um modelo da geometria do edifício, que posteriormente foi também utilizado para representação das configurações modais identificadas.

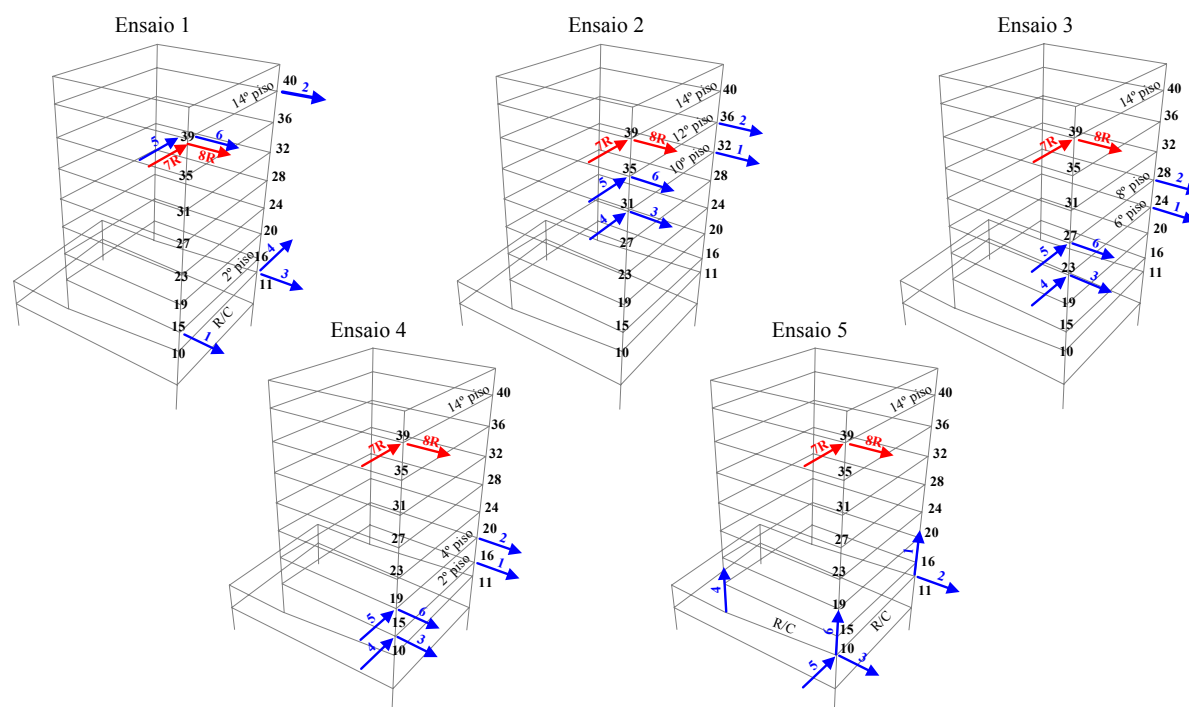


Figura 6.202 – Ensaios efectuados no edifício HCT.

Nos ensaios do edifício HCT, os registos de acelerações foram adquiridos com uma frequência de amostragem de 200 Hz, tendo-se, em cada ensaio, obtido registos com uma duração total de cerca de 5,5 minutos (327,68 segundos, correspondentes a 65536 valores amostrados a 200 Hz). Foram estes os dados considerados para a análise de identificação modal que se apresenta em seguida.

Identificação modal:

A análise de identificação modal do edifício HCT foi efectuada utilizando o método BFD já descrito no capítulo 4. Antes da aplicação desse método, os registos de acelerações foram objecto de um pré-processamento que consistiu nas seguintes operações: conversão de unidades dos registos, de Volt para unidades de aceleração (note-se que em termos de identificação modal, esta não é uma operação essencial, no entanto, optou-se por efectuar-la para se ter uma percepção física das amplitudes das acelerações que foram medidas e que tinham que ser analisadas); remoção de média; filtragem passa-baixo com um filtro de tipo *Butterworth* de 8 pólos com frequência de corte de 15 Hz. A análise espectral subsequente foi também efectuada só até essa frequência de corte, analisando-se assim uma banda de frequências onde, de acordo com o estudo desenvolvido na UBC (Dyck e Ventura, 1998), estariam incluídos os principais modos de vibração do edifício.

As estimativas das funções de densidade espectral dos registos de acelerações foram avaliadas utilizando a técnica já descrita no capítulo 4, considerando amostras com 2048 valores cada uma, sobrepostas a 50 %, e utilizando uma janela de *Hanning* para redução dos efeitos de *leakage*. A

resolução em frequência dos auto-espectros e espectros cruzados assim estimados, é portando de $\Delta f = 0,098$ Hz, correspondente aos 2048 valores amostrados a 200 Hz.

Nas figuras 6.203 e 6.204 apresentam-se os espectros normalizados médios (ANPSD) das acelerações horizontais registadas nas direcções, respectivamente, Norte-Sul e Este-Oeste.

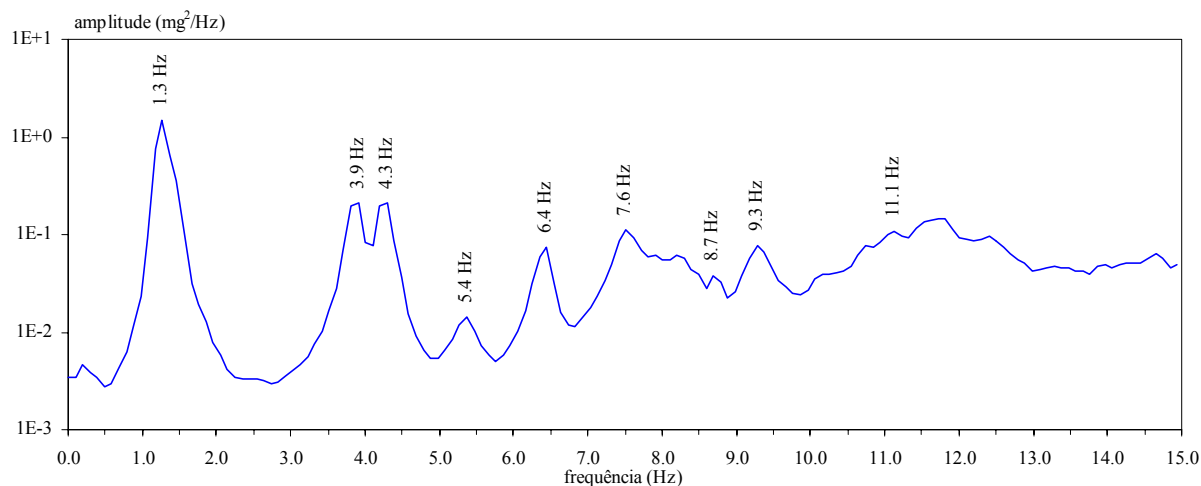


Figura 6.203 – Espectro normalizado médio dos registos na direcção Norte-Sul.

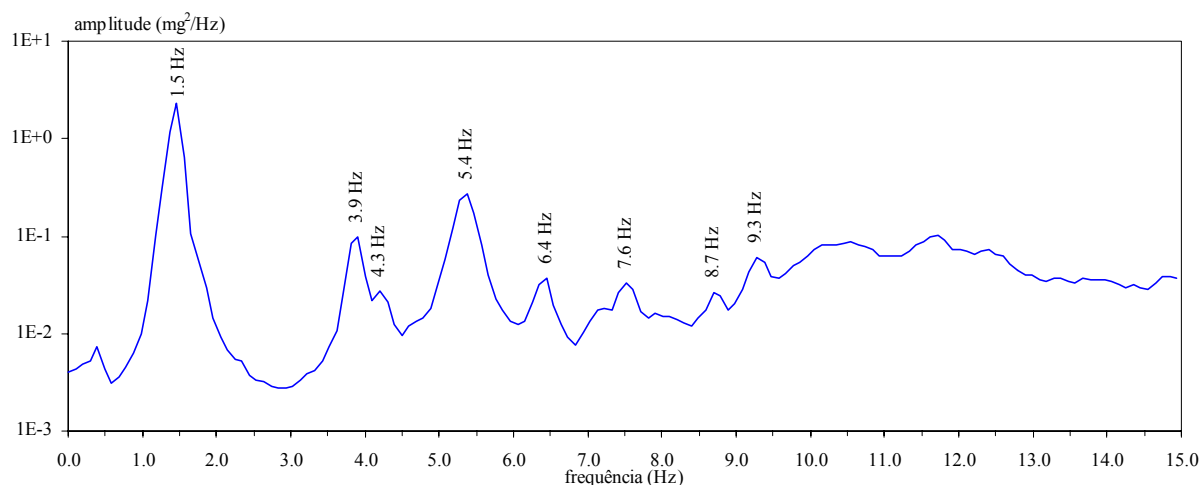


Figura 6.204 – Espectro normalizado médio dos registos na direcção Este-Oeste.

Nos espectros representados nas figuras 6.203 e 6.204 estão indicados os valores das frequências que, após análise dos seus picos de ressonância, da coerência e das relações de amplitude e fase entre os registos obtidos em diferentes pontos do edifício, seguindo a metodologia do método BFD apresentada no capítulo 4, foram consideradas como correspondentes a modos naturais de vibração do edifício HCT. Utilizando o método BFD foram assim identificados um total de 10 modos naturais de vibração do edifício HCT.

Foram efectuados dois tipos de representação gráfica das componentes modais identificadas. O primeiro consiste em três gráficos planos que mostram as componentes modais identificadas, bem como os correspondentes intervalos de confiança a 95 % (avaliados de acordo com a técnica descrita no capítulo 4). O segundo foi obtido através das deformadas dum modelo espacial da geometria do edifício (com os pisos considerados como diafragmas rígidos) obtidas por imposição das componentes modais identificadas, nos nós desse modelo correspondentes aos pontos onde foram colocados os acelerómetros. Nas figuras 6.205 a 6.209 apresentam-se essas duas formas de representação gráfica das componentes modais identificadas, para os 5 primeiros modos identificados com o método BFD.

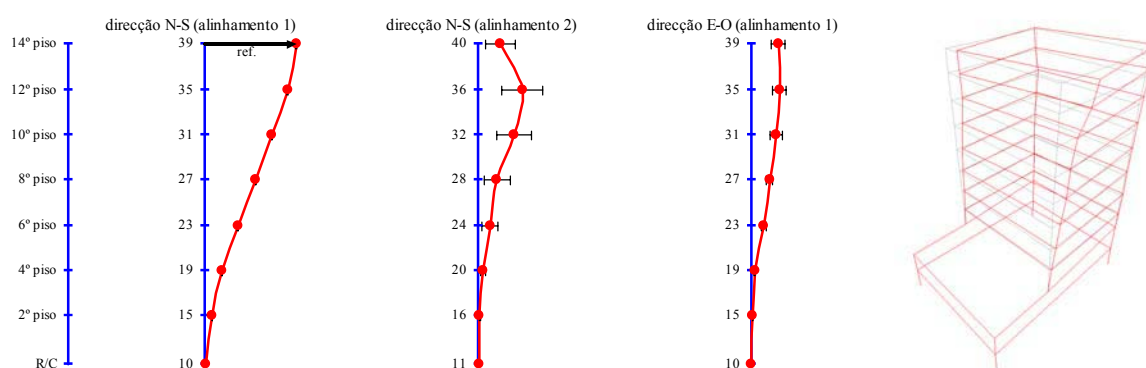


Figura 6.205 – Representação das componentes identificadas para o 1º modo – $f = 1,3$ Hz.

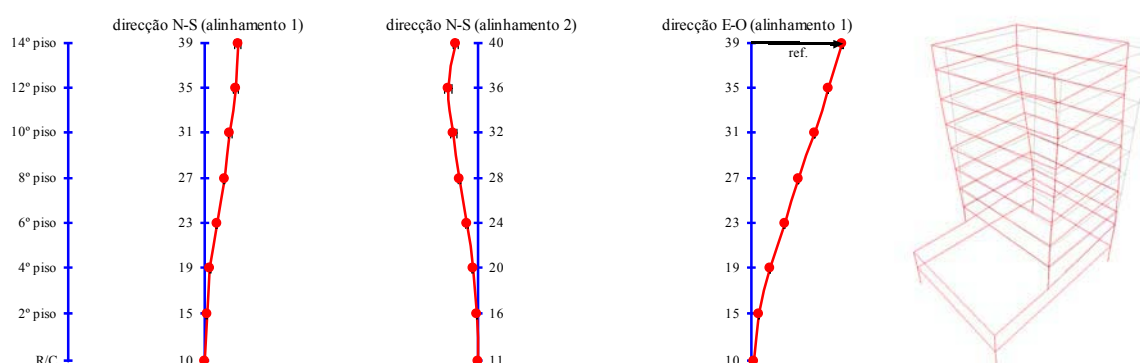


Figura 6.206 – Representação das componentes identificadas para o 2º modo – $f = 1,5$ Hz.

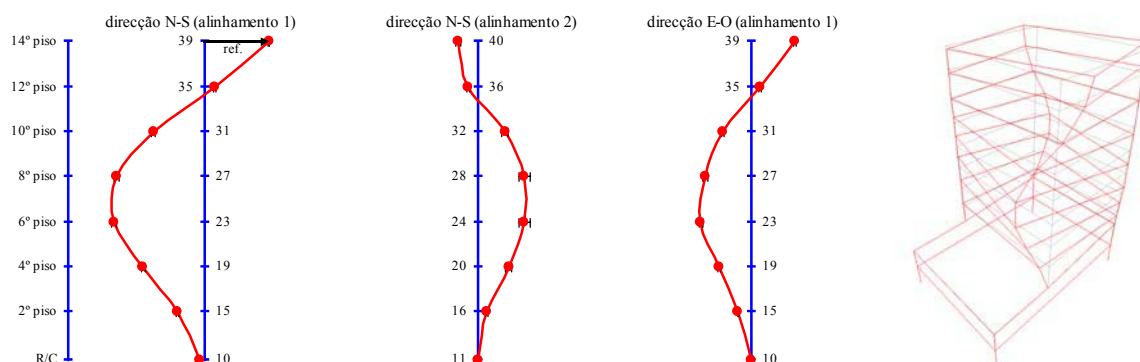


Figura 6.207 – Representação das componentes identificadas para o 3º modo – $f = 3,9$ Hz.

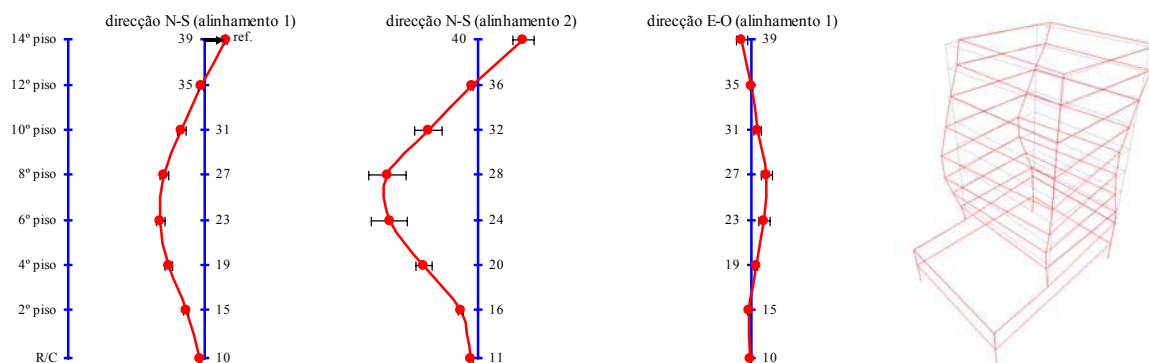


Figura 6.208 – Representação das componentes identificadas para o 4º modo – $f = 4,3$ Hz.

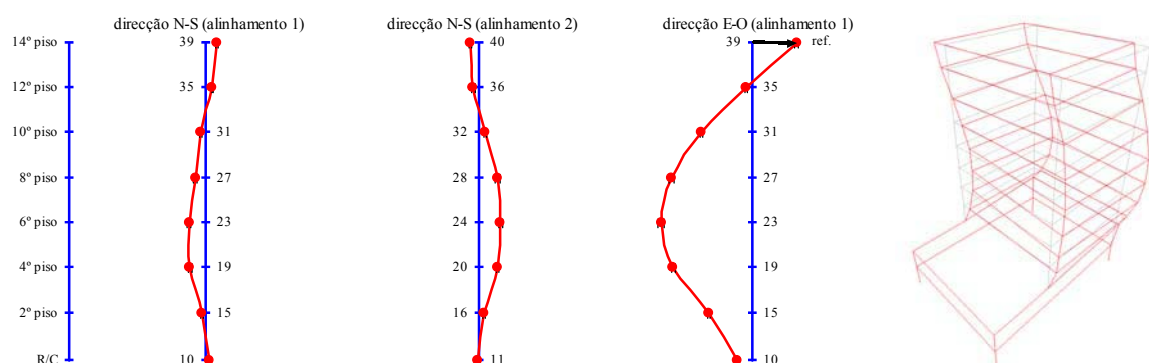


Figura 6.209 – Representação das componentes identificadas para o 5º modo – $f = 5,4$ Hz.

No quadro 6.34, indicam-se as frequências e as principais características dos 10 modos de vibração identificados com o método BFD para o edifício HCT.

Quadro 6.34 – Características dinâmicas identificadas para o edifício HCT.

f (Hz)	tipo de modo
1,3	1º modo na direcção N-S acoplado com torção
1,5	1º modo na direcção E-O acoplado com torção
3,9	2º modo de torção
4,3	2º modo na direcção N-S acoplado com alguma torção
5,4	2º modo na direcção E-O acoplado com alguma torção
6,4	3º de torção
7,6	3º modo na direcção N-S acoplado com alguma torção
8,7	4º modo de torção acoplado com translação em ambas as direcções N-S e E-O
9,3	4º modo de torção
11,1	4º modo na direcção N-S acoplado com alguma torção

Comparação com modelos de elementos finitos:

Para além do trabalho de identificação modal a partir dos registos de aceleração, obtidos nos ensaios efectuados pela equipa da UBC, desenvolveu-se também a segunda parte do projecto proposto pelo Prof. Carlos Ventura, que consistiu na comparação das características dinâmicas identificadas com as calculadas com modelos de elementos finitos. Estes modelos foram desenvolvidos tendo em

conta os desenhos de projecto do edifício e outros elementos que foi possível obter sobre a geometria e disposição dos elementos estruturais.

Optou-se por modelar toda a estrutura do edifício, incluindo as caves com as suas paredes de suporte de terras, as lajes dos pisos e, evidentemente, os pilares e paredes resistentes. Os pisos foram simulados como diafragmas rígidos no seu plano. Todos os elementos estruturais foram considerados como tendo um módulo de elasticidade de 32 GPa, o que corresponde a um betão da classe C30/37.

Nos nós das paredes de suporte de terras, foram colocados elementos de mola orientados perpendicularmente a essas paredes, para modelar o efeito do solo adjacente. Estes elementos de mola foram considerados como sendo praticamente rígidos ($k=10^8$ kN/m) o que é uma hipótese plausível para a situação de movimentos com amplitudes muito pequenas, tais como os que se verificaram nos ensaios de medição de vibrações ambiente, situação com a qual se pretendia comparar o modelo de elementos finitos.

Para além da massa dos elementos estruturais, foi ainda considerada a massa correspondente a uma carga uniformemente distribuída de 2 kN/m^2 aplicada nas lajes de todos os pisos, de modo a ter em conta a massa de revestimentos dos pavimentos e de paredes interiores. Foi também considerada a massa correspondente a uma carga de $5,8 \text{ kN/m}$, aplicada em todo o perímetro exterior dos pisos, para ter em conta a massa das paredes exteriores.

Foi assim desenvolvido um primeiro modelo de elementos finitos, com um total de 6031 nós, 655 elementos de barra, 6266 elementos de casca e 332 elementos de mola. Com este modelo, tal como descrito até agora, foi efectuado um primeiro cálculo das frequências e configurações dos modos de vibração. Verificou-se então que as frequências calculadas eram inferiores às identificadas com o método BFD, mostrando que o modelo era mais flexível do que o edifício real (admitindo como correctos, os valores considerados para a massa). Para ter um melhor ajuste das frequências calculadas aos valores experimentais, a rigidez dos elementos estruturais do modelo teria que ser aumentada em cerca de 225 %, o que seria um incremento um pouco excessivo. Foi-se assim levado a concluir que a maior rigidez verificada no edifício real, era devida à contribuição de elementos, tais como as paredes de enchimento, exteriores e interiores, que apesar de normalmente não serem consideradas como estruturais, contribuem significativamente para a rigidez lateral global do edifício.

Desenvolveu-se então um segundo modelo de elementos finitos, adicionando ao primeiro um total de 946 elementos de casca, disposto ao longo de todo o perímetro exterior de cada piso, procurando, dessa forma, modelar o efeito das paredes de enchimento exteriores. Para esses elementos, considerou-se uma espessura de 150 mm e um módulo de elasticidade de 2 GPa.

No quadro 6.35 apresentam-se os valores das frequências calculadas com os dois modelos de elementos finitos, desenvolvidos para o edifício HCT. As configurações calculadas com esses modelos, para os 5 primeiros modos de vibração, são apresentadas nas figuras 6.210 e 6.211.

Como se pode verificar, comparando os valores indicados no quadro 6.35 com os constantes no quadro 6.34, as frequências calculadas com o modelo com paredes de enchimento exteriores estão já mais próximas das identificadas com o método BFD (relativamente às calculadas com o primeiro modelo). Há talvez ainda algumas diferenças importantes no que se refere às frequências dos modos de torção, mostrando que nesse aspecto, o segundo modelo poderia ser objecto de algumas correcções.

Quadro 6.35 – Frequências calculadas com os modelos de elementos finitos.

modelo sem paredes de enchimento exteriores		modelo com paredes de enchimento exteriores	
f (Hz)	tipo de modo	f (Hz)	tipo de modo
0,8	1º modo na direcção N-S	1,2	1º modo na direcção N-S
1,0	1º modo de torção	1,6	1º modo na direcção E-O
1,2	1º modo na direcção E-O	2,3	1º modo de torção
3,3	2º modo de torção	4,6	2º modo na direcção N-S
3,6	2º modo na direcção N-S	6,5	2º modo na direcção E-O com torção
5,8	2º modo na direcção E-O com torção	6,9	2º modo de torção com translação E-O
6,2	3º modo de torção com translação E-O	9,2	3º modo na direcção N-S
8,0	3º modo na direcção N-S	10,7	3º modo de torção
9,1	4º modo de torção	13,9	3º modo na direcção E-O com alguma torção
12,4	5º modo de torção	14,4	4º modo na direcção N-S com alguma torção

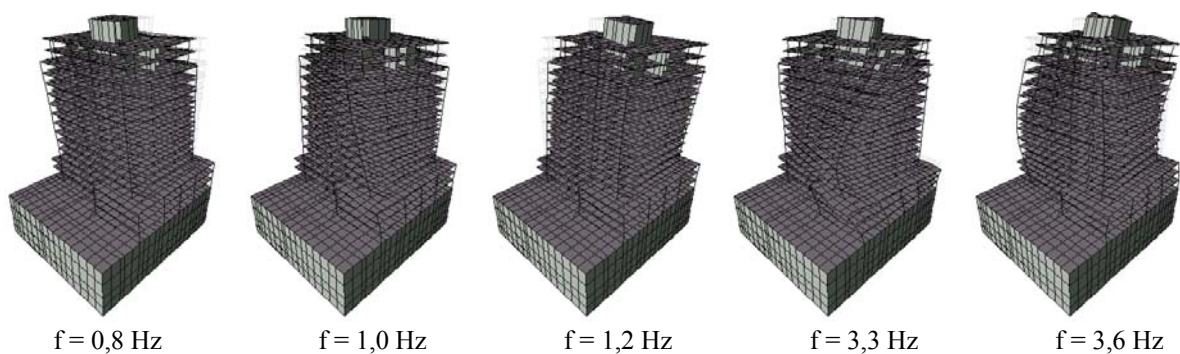


Figura 6.210 – Configurações modais calculadas com o modelo sem paredes de enchimento exteriores.

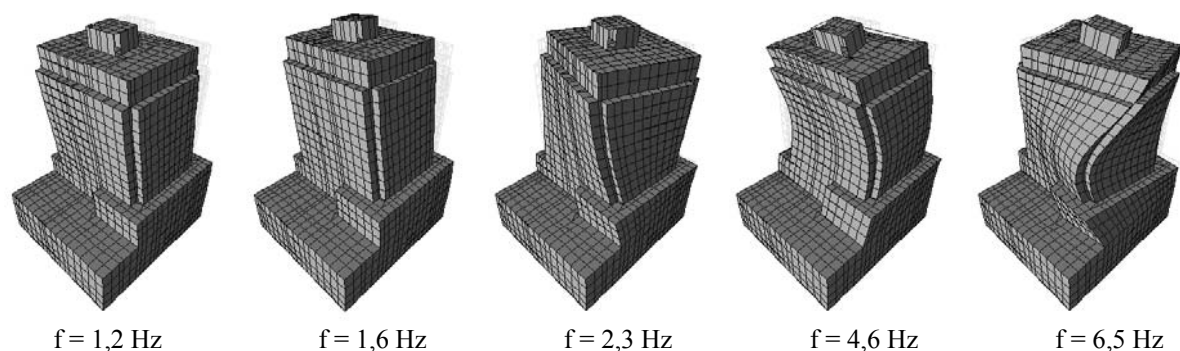


Figura 6.211 – Configurações modais calculadas com o modelo com paredes de enchimento exteriores.

Considerações finais:

Tendo em conta o âmbito do projecto em que este trabalho foi desenvolvido, importa analisar aqui também, os resultados obtidos, em termos da forma como se comparam com os dos trabalhos desenvolvidos pelos outros autores, já referidos, que também participaram nesse projecto.

Em termos da identificação modal pode dizer-se que os resultados obtidos estão em geral em boa concordância com os determinados por outros autores. Há apenas uma diferença relativamente a alguns deles que, em virtude dos métodos de identificação modal estocástica que aplicaram ou da forma como os utilizaram, conseguiram distinguir entre um modo com uma frequência de aproximadamente 1,2 Hz (entre 1,22 Hz e 1,24 Hz) e o modo com uma frequência de cerca de 1,3 Hz (entre 1,27 Hz e 1,29 Hz). No caso da análise anteriormente apresentada, efectuada com o método BFD, não foi possível distinguir entre esses dois modos, em virtude da resolução em frequência ($\Delta f = 0,098$ Hz) com que foram estimadas as funções de densidade espectral, tendo-se apenas identificado o modo com a frequência de 1,3 Hz. Em alguns trabalhos desenvolvidos por outros autores também não foi possível distinguir entre esses dois modos, nomeadamente, Ventura e Horyna (2000) com o método BFD com uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,195$ Hz, De Roeck *et al.* (2000) com o método BFD, e Piombo *et al.* (2000) com os métodos SSI-COV(CVA) e ARMAV (este último caso não seria de esperar pois com esses dois métodos paramétricos não deveria haver dificuldade em distinguir modos com frequências próximas). Noutros trabalhos foi de facto feita a distinção entre esses dois modos, nomeadamente, Brincker e Andersen (2000) utilizando os métodos FDD e SSI-DATA(UPC), Cunha *et al.* (2000) que, apesar de utilizarem o método BFD conseguiram fazer a identificação dos dois modos com frequências próximas em virtude de terem adoptado uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,024$ Hz, Kullaa (2000) utilizando o método SSI-COV(PC), e De Roeck *et al.* (2000), utilizando o método SSI-DATA(UPC).

No que se refere à elaboração de modelos de elementos finitos e à sua comparação com os resultados da identificação modal, apenas Ventura e Horyna (2000) e o autor deste trabalho, com os resultados acima apresentados, desenvolveram essa componente do projecto que tinha sido proposto. A importância da consideração de elementos não estruturais, tais como as paredes de enchimento, no modelo do edifício, é talvez o aspecto a salientar como resultado dessa comparação entre resultados experimentais e analíticos.

6.3.2 Modelo de um edifício com 4 pisos

Considerações gerais:

Para exemplificar a aplicação da identificação modal estocástica em estruturas de edifícios, apresenta-se em seguida, a análise, através de diversos métodos, dos registos obtidos num ensaio de medição de vibrações ambiente, efectuado num modelo à escala $\frac{1}{4}$ de um edifício de 4 pisos, que foi utilizado num estudo experimental desenvolvido na mesa sísmica triaxial do LNEC (Coelho *et al.*, 2000). As características gerais desse modelo foram já apresentadas no capítulo 2 deste trabalho, onde foram consideradas para concretizar alguns aspectos relacionados com os fundamentos analíticos dos métodos de identificação modal estocástica. Os registos obtidos na direcção longitudinal do modelo (direcção x) também já foram considerados no capítulo 4 para ilustrar (com um exemplo simples) os diversos métodos de identificação modal estocástica que aí foram descritos pormenorizadamente. Conforme indicado nesse capítulo, apresenta-se em seguida a análise completa dos registos obtidos no ensaio de medição de vibrações ambiente efectuado no referido modelo.

O ensaio realizado no modelo de um edifício de 4 pisos foi efectuado com 3 acelerómetros colocados em cada piso, de maneira a medir os seus movimentos longitudinal e transversal (x e y) e também de torção em torno do eixo vertical. Utilizaram-se portanto um total de 12 acelerómetros, de marca *Kinematics* e modelo ES-U, tendo-se configurado todo o equipamento de modo a conseguir discretizar uma amplitude mínima de aceleração de $0,076 \mu g$.

O ensaio foi realizado com o modelo colocado no interior da sala de ensaios do edifício Ferry Borges no LNEC (ver figura 6.212). As acelerações registadas foram assim de amplitude bastante pequena conforme já se referiu no capítulo 4.



Figura 6.212 – Algumas vistas do modelo ensaiado com os acelerómetros colocados.

Na figura 6.213 podem observar-se alguns pormenores dos acelerómetros ES-U colocados no modelo, bem como do equipamento de aquisição de dados, durante a realização do ensaio.



Figura 6.213 – Pormenores dos acelerómetros colocados no modelo e do equipamento de aquisição de dados.

No ensaio do modelo, os registos foram obtidos com uma frequência de amostragem de 1000 Hz e foram pré-processados digitalmente com remoção de média, filtragem passa-baixo com frequência de corte a 25 Hz com um filtro de tipo *Butterworth* de ordem 8 e decimação para uma frequência de 62,5 Hz. A duração total dos registos obtidos no ensaio foi de cerca de 30 minutos (114688 valores a 62,5 Hz).

Identificação modal:

A análise de identificação modal dos registos obtidos no ensaio do modelo de um edifício de 4 pisos, foi efectuada utilizando os métodos FDD, EFDD e as três variantes do método SSI-DATA (UPC, PC e CVA), implementados no programa ARTeMIS (SVS, 2002).

Para a aplicação dos métodos FDD e EFDD, as estimativas das funções de densidade espectral da resposta em aceleração do modelo do edifício foram avaliadas considerando amostras com 2048 valores, com uma sobreposição de 66,7 % e utilizando uma janela de *Hanning* para reduzir os efeitos de *leakage*. Para a frequência de amostragem de 62,5 Hz, obtiveram-se assim estimativas das funções de densidade espectral com uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,031$ Hz.

Na figura 6.214 apresentam-se os espectros dos três primeiros valores singulares da matriz de funções de densidade espectral. Nessa figura, estão também indicados os valores das frequências que foram identificadas através do método FDD, como correspondentes a modos naturais de vibração do modelo do edifício.

Os espectros da figura 6.214 ilustram bem os aspectos específicos do método FDD na identificação de modos com frequências próximas, nomeadamente, a importância de analisar os espectros dos diversos valores singulares para mais facilmente efectuar essa identificação.

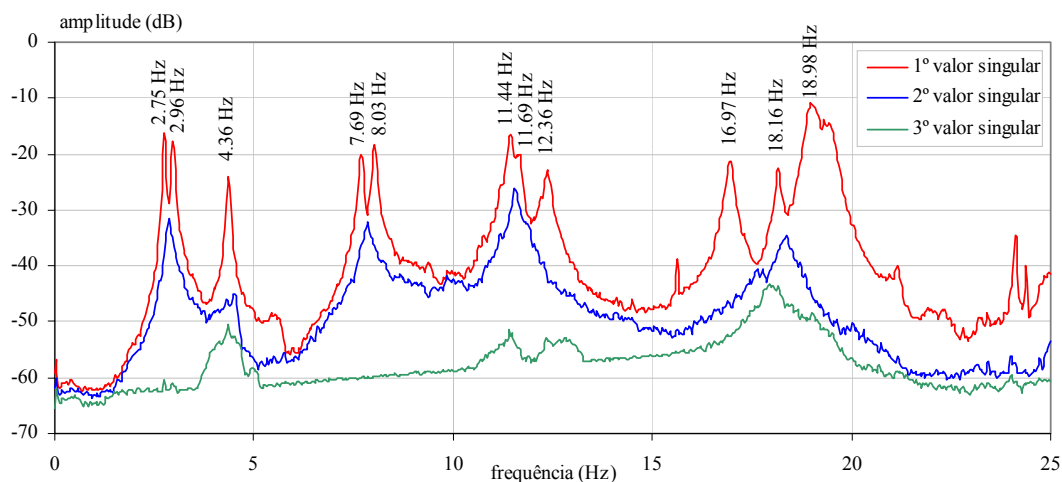


Figura 6.214 – Espectros dos três primeiros valores singulares.

Para a aplicação do método SSI-DATA, a matriz de Hankel dos registos de resposta foi formada de modo a possibilitar a identificação de modelos com uma ordem máxima de 60. Foram utilizadas as três variantes desse método, UPC, PC e CVA, tendo-se seleccionado em todas elas, modelos de ordem 38 para efectuar a identificação modal do modelo do edifício.

Na figura 6.215, apresenta-se o diagrama de estabilização correspondente à aplicação do método SSI-DATA(UPC), estando nele assinalado o modelo de ordem 38. Não se apresentam os diagramas de estabilização relativos às outras variantes do método SSI-DATA, porque não têm diferenças significativas relativamente ao da figura 6.215.

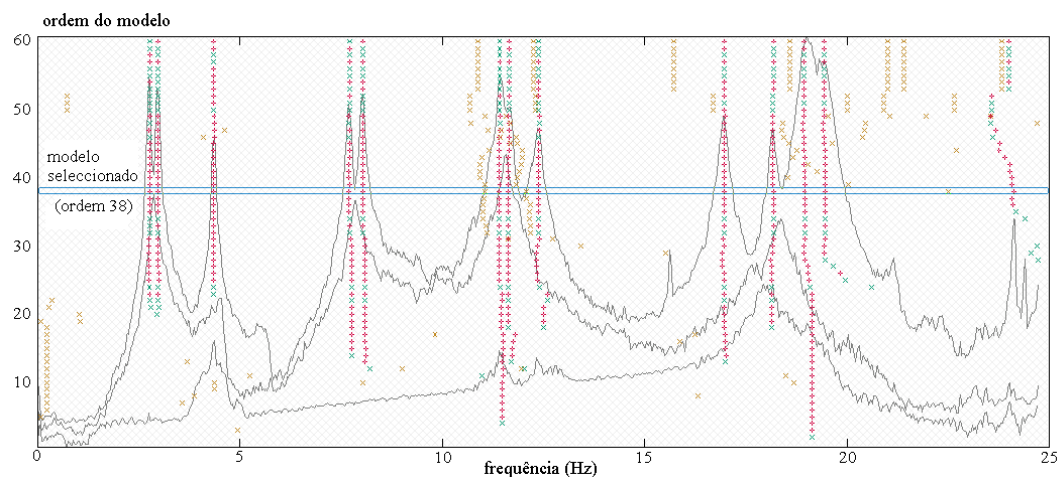


Figura 6.215 – Diagrama de estabilização correspondente à aplicação do método SSI-DATA(UPC).

No quadro 6.36, indicam-se as características dinâmicas identificadas para o modelo do edifício de 4 pisos, com os 5 métodos utilizados, incluindo, o tipo de modo, a sua frequência e o respectivo coeficiente de amortecimento. Em termos dos valores das frequências dos modos naturais de vibração, os resultados obtidos com os diferentes métodos são bastante concordantes entre si, havendo apenas diferenças pouco significativas. No que se refere aos coeficientes de amortecimento,

já surgem algumas diferenças mais expressivas entre os valores identificados com os diferentes métodos utilizados.

Quadro 6.36 – Características dinâmicas identificadas para o modelo de um edifício com 4 pisos.

tipo de modo	FDD	EFDD		SSI-DATA(UPC)		SSI-DATA(PC)		SSI-DATA(CVA)	
	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)
1º na direcção y	2,75	2,75	0,9	2,77	0,4	2,77	0,4	2,77	0,4
1º na direcção x	2,96	2,96	1,0	2,98	0,4	2,98	0,4	2,98	0,4
1º de torção	4,36	4,36	0,8	4,36	0,3	4,36	0,3	4,36	0,3
2º na direcção y	7,69	7,70	0,5	7,70	1,2	7,70	1,2	7,73	1,4
2º na direcção x	8,03	8,02	0,5	8,05	0,8	8,05	0,8	8,06	0,9
2º de torção	11,44	11,44	0,4	11,41	0,6	11,41	0,6	11,40	0,5
3º na direcção y acoplado com o 3º na direcção x	11,69	11,68	0,3	11,64	0,7	11,64	0,7	11,62	0,5
3º de torção	12,36	12,36	0,5	12,38	0,9	12,37	0,9	12,36	0,9
4º na direcção y	16,97	16,95	0,5	16,97	0,4	16,97	0,4	16,99	0,5
4º na direcção x	18,16	18,17	0,3	18,17	0,4	18,17	0,4	18,19	0,4
4º de torção	18,98	19,06	0,8	18,95	0,3	18,94	0,4	18,95	0,4

Nas figuras 6.216 e 6.217 apresentam-se as configurações identificadas para os 6 primeiros modos do modelo do edifício, com os métodos, respectivamente, FDD e SSI-DATA(UPC).

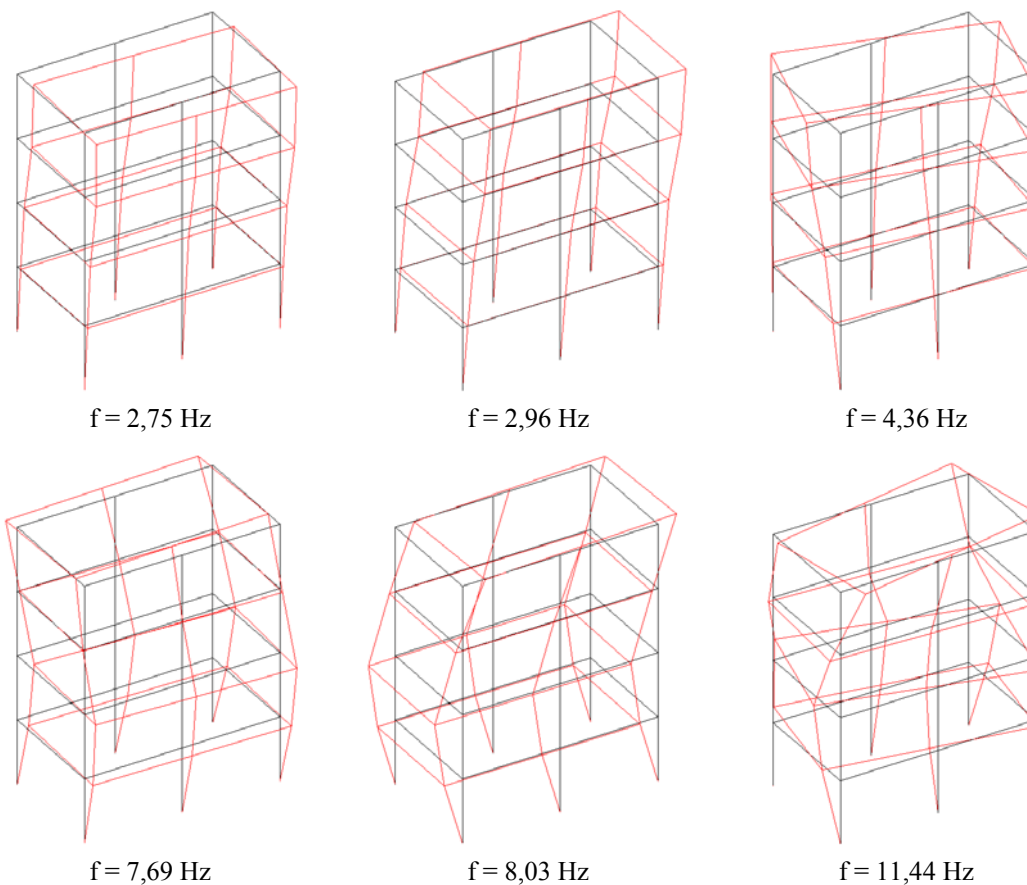


Figura 6.216 – Configurações dos 6 primeiros modos identificados com o método FDD.

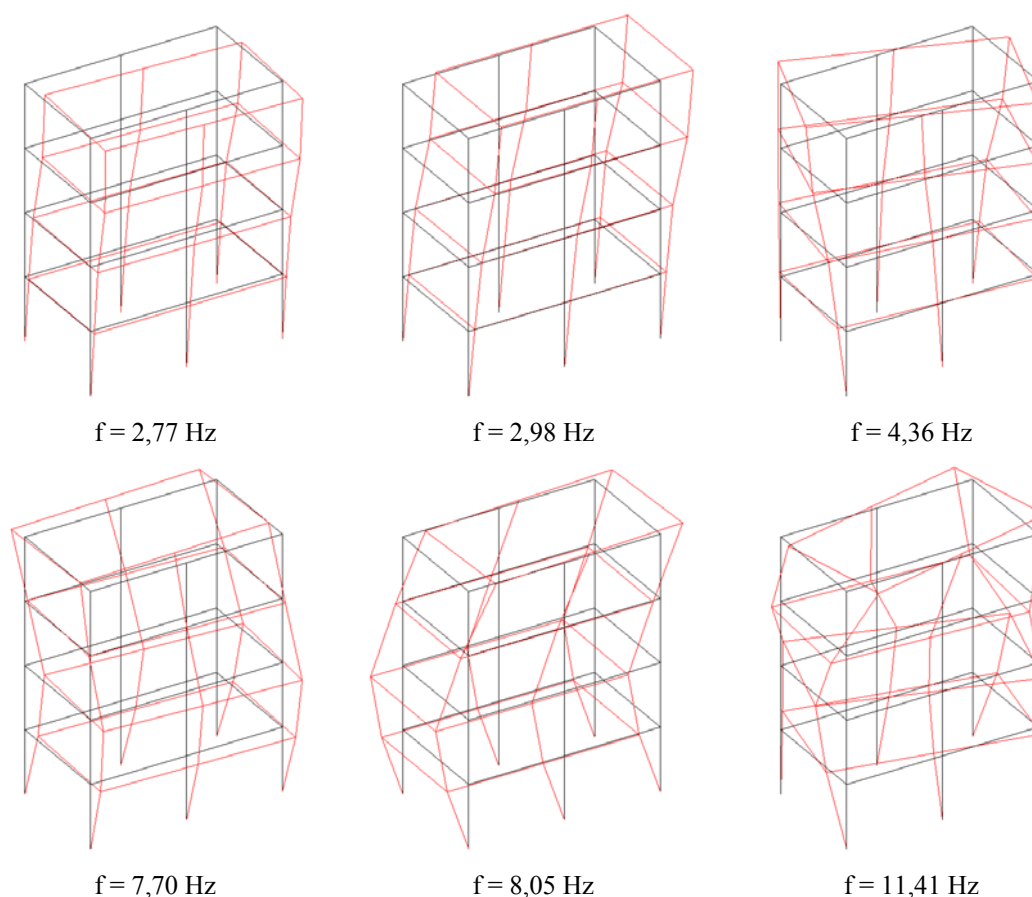


Figura 6.217 – Configurações dos 6 primeiros modos identificados com o método SSI-DATA(UPC).

Como se pode verificar, através das configurações apresentadas nas figuras 6.216 e 6.217, os resultados obtidos com os diversos métodos de identificação aplicados, são também bastante concordantes entre si, em termos das componentes modais identificadas.

Considerações finais:

De todas as aplicações apresentadas neste capítulo esta é a única que não se refere a uma estrutura real, mas sim a um modelo à escala $\frac{1}{4}$. Trata-se portanto duma situação em que não haveria muita dificuldade em aplicar ensaios de vibração forçada e efectuar a identificação modal utilizando métodos de identificação modal *clássica*. É no entanto interessante notar que, utilizando ensaios de medição da resposta do modelo às acções ambiente, e analisando essa resposta com métodos de identificação modal estocástica, foi possível obter resultados bastante bons em termos de avaliação das características dinâmicas do modelo. Isto demonstra que a gama de aplicações da identificação modal estocástica é bastante grande, não sendo só adequada no caso das estruturas de grandes dimensões, onde as suas vantagens são evidentes em virtude do menor custo associado à realização do trabalho experimental, mas também em sistemas estruturais de menores dimensões.

6.4 Estruturas de barragens – Barragem do Cabril

Considerações gerais:

Após se terem apresentado aplicações dos métodos de identificação modal estocástica em estruturas de pontes e de edifícios, apresenta-se em seguida uma aplicação num terceiro tipo de estruturas de engenharia civil, que é o caso das estruturas de barragens. O exemplo que se apresenta refere-se à barragem do Cabril, uma barragem abóbada com dupla curvatura, localizada no rio Zêzere e que é a barragem mais alta existente em Portugal (com uma altura de 136 m). Nas figuras 6.218 e 6.219 podem observar-se algumas vistas da barragem do Cabril.

Em Fevereiro de 2002 houve a oportunidade de efectuar um ensaio de medição de vibrações ambiente na barragem do Cabril, para verificar a aplicabilidade da identificação modal com excitação natural neste tipo de estruturas e tendo em vista a preparação duma candidatura a um projecto de investigação, onde se propôs o desenvolvimento de um sistema de monitorização das características dinâmicas de barragens com base na análise da sua resposta às acções ambiente. A apresentação seguinte refere-se precisamente a esse ensaio e aos resultados que dele foram obtidos.

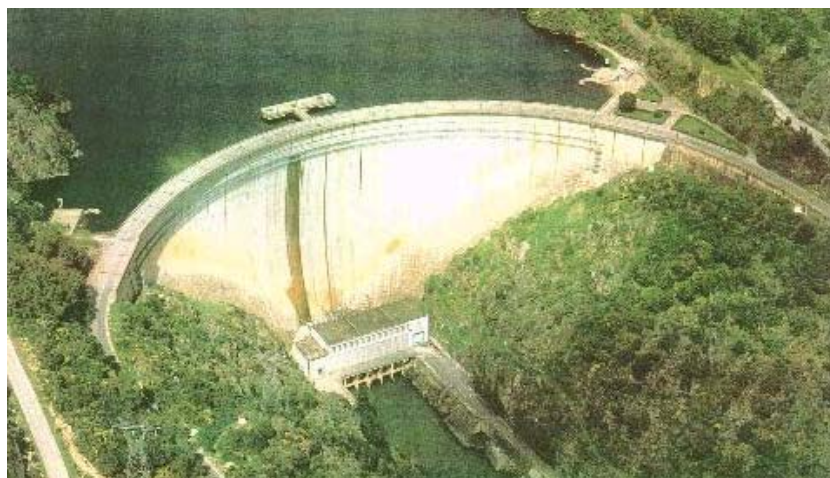


Figura 6.218 – Vista geral da barragem do Cabril (<http://www-ext.lnec.pt/IGb>).



Figura 6.219 – Vistas do lado de montante da barragem do Cabril na data de realização do ensaio.

Os primeiros ensaios de caracterização dinâmica de estruturas de barragens efectuados no LNEC foram realizados na década de 60 (LNEC – Pereira, 1962), envolvendo a imposição de forças de excitação sinusoidais, aplicadas por intermédio de um vibrador de massas excêntricas. No final da década de 80 foram já efectuadas medições de vibrações ambiente em estruturas de barragens (LNEC – Pinto *et al.*, 1989; Portugal, 1990) embora apenas como uma fase preliminar dos ensaios de vibração forçada, tendo-se então sentido algumas dificuldades em efectuar a identificação modal exclusivamente com base nos ensaios de medição de vibrações ambiente. Ao efectuar-se, na barragem do Cabril, o ensaio que se apresenta em seguida, houve portanto um objectivo de verificar se com os equipamentos que agora se dispõe e com os actuais métodos de identificação modal estocástica, seria possível obter também bons resultados em estruturas de barragens.

Em estruturas de barragens a possibilidade de efectuar a identificação modal apenas com base na análise da sua resposta às acções ambiente abre a possibilidade de efectuar um acompanhamento mais contínuo da evolução das características dinâmicas dessas estruturas ao longo do tempo (o que com ensaios de vibração forçada seria muito dispendioso). Haverá assim uma maior possibilidade de a partir das características dinâmicas identificadas, desenvolver uma série de aplicações, nomeadamente (Oliveira *et al.*, 2003): verificar a adequabilidade das hipóteses adoptadas ao nível dos modelos numéricos para simulação do comportamento dinâmico de estruturas de barragens; calibrar os parâmetros desses modelos (módulo de elasticidade, parâmetros relativos às condições de fronteira, ao comportamento das juntas de contracção, à interacção com a albufeira, etc.); e detectar eventuais alterações das características dinâmicas que possam indiciar a existência de fenómenos de degradação estrutural, em complemento a outros métodos de inspecção mais tradicionais.

Ensaio efectuado e equipamento utilizado:

Considerando que o objectivo do estudo efectuado na barragem do Cabril era apenas o de verificar a adequabilidade da aplicação dos ensaios de medição da resposta das estruturas às acções ambiente para a identificação das características dinâmicas de estruturas de barragens, só se efectuou um ensaio, tendo-se medido acelerações em apenas 12 pontos da estrutura. Obviamente, se houvesse o objectivo de identificar as configurações modais com um maior grau de refinamento espacial, teria sido necessário medir a resposta da estrutura num maior número de pontos e efectuar vários ensaios, seguindo uma metodologia semelhante à adoptada em outras aplicações anteriormente apresentadas.

O ensaio realizado na barragem do Cabril foi efectuado com o equipamento que se indica em seguida, cujas características foram já descritas no capítulo 3:

- 12 acelerómetros uniaxiais de tipo *force balance*, modelo ES-U da *Kinematics*;
- 4 unidades para alimentação e condicionamento de acelerómetros de tipo *force balance*;

- 1 computador portátil;
- placa de aquisição de dados *DAQ Card AI-16XE-50* da *National Instruments* com conversão analógica/digital a 16 bits, instalada no computador portátil;
- chassis *SCXI-1000DC* de 32 canais, também da *National Instruments*, ligado a uma bateria;
- cabos para alimentação dos acelerómetros e transmissão do respectivo sinal às unidades de condicionamento e alimentação e destas ao sistema de aquisição.

Os 12 acelerómetros ES-U foram colocados em 9 pontos localizados na 1ª galeria e em 3 pontos localizados na 2ª galeria (ver figura 6.220), tendo ficado orientados na horizontal segundo a direcção perpendicular à superfície da barragem.

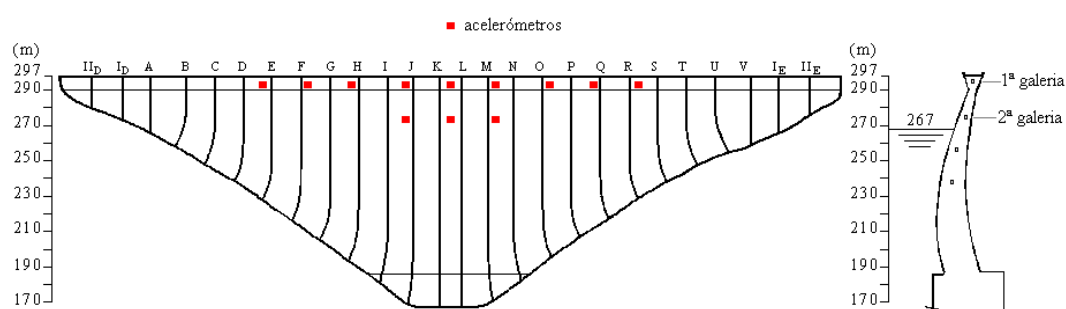


Figura 6.220 – Alçado e corte pela coluna central da barragem do Cabril.

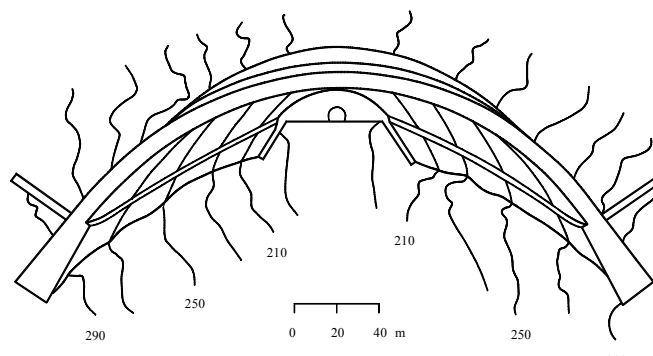


Figura 6.221 – Planta da barragem do Cabril.

O ensaio foi efectuado com a albufeira com a água à cota 267 m, tal como está indicado na figura 6.220. Foram obtidos registos de acelerações na estrutura em duas situações distintas: com os grupos geradores de energia eléctrica ligados (primeiro à potência máxima e em seguida à potência de 38 MWatt); e com esses grupos geradores completamente desligados. Em cada uma dessas situações, registaram-se acelerações na barragem durante períodos de tempo de, respectivamente, 45 minutos e cerca de 35 minutos.

No ensaio efectuado, os acelerómetros ES-U foram configurados para uma sensibilidade de 2,5 Volt/g. Quanto ao ganho nos condicionadores de sinal, adoptaram-se valores diferentes para as

duas situações distintas referidas no parágrafo anterior, 200 com os grupos geradores a funcionar e 1000 sem esses grupos geradores a funcionar. Considerado as características da placa de aquisição de dados (resolução de 16 bits e entrada de ± 10 Volt) as configurações adoptadas para o equipamento, correspondem a capacidades de discretização de valores mínimos de aceleração de, respectivamente, $0,610 \mu\text{g}$ e $0,122 \mu\text{g}$. Em ambos os casos os registos de aceleração foram adquiridos com uma frequência de amostragem de 200 Hz.

Na primeira situação (grupos em funcionamento), mediram-se acelerações máximas da ordem de 2 mg e com os grupos desligados (apenas excitação ambiente, essencialmente devida à acção do vento) mediram-se acelerações máximas da ordem de 0,05 mg.

Antes da análise de identificação modal, os registos de acelerações foram pré-processados através das seguintes operações: remoção de média; filtragem passa-baixo com um filtro de tipo Butterworth de ordem 8 e frequência de corte a 5 Hz; decimação de 200 Hz para 12,5 Hz.

Identificação modal:

A análise de identificação modal a partir dos registos de acelerações obtidos no ensaio realizado na barragem do Cabril foi efectuada utilizando o método FDD implementado no programa ARTeMIS (SVS, 2002). Para tal, as estimativas das funções de densidade espectral da resposta em aceleração da barragem foram avaliadas considerando amostras com 1024 valores, sobrepostas a 66,7 % e utilizando uma janela de *Hanning* para reduzir os efeitos de *leakage*. Para a frequência de amostragem de 12,5 Hz, obtiveram-se assim estimativas das funções de densidade espectral com uma resolução em frequência de $\Delta f = 0,012$ Hz.

Nas figuras 6.222 e 6.223 apresentam-se os espectros dos dois primeiros valores singulares da matriz de funções de densidade espectral, para as duas situações anteriormente referidas (com os grupos em funcionamento e com os grupos desligados).

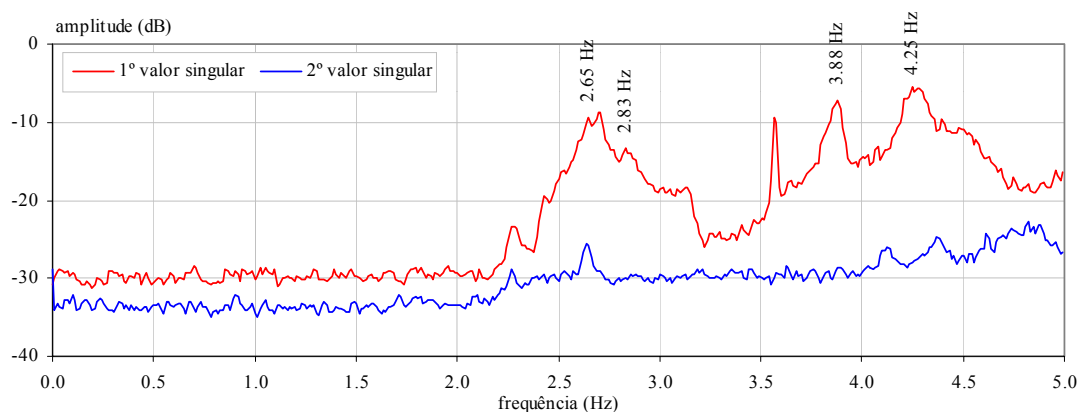


Figura 6.222 – Espectros dos dois primeiros valores singulares (com os grupos em funcionamento).

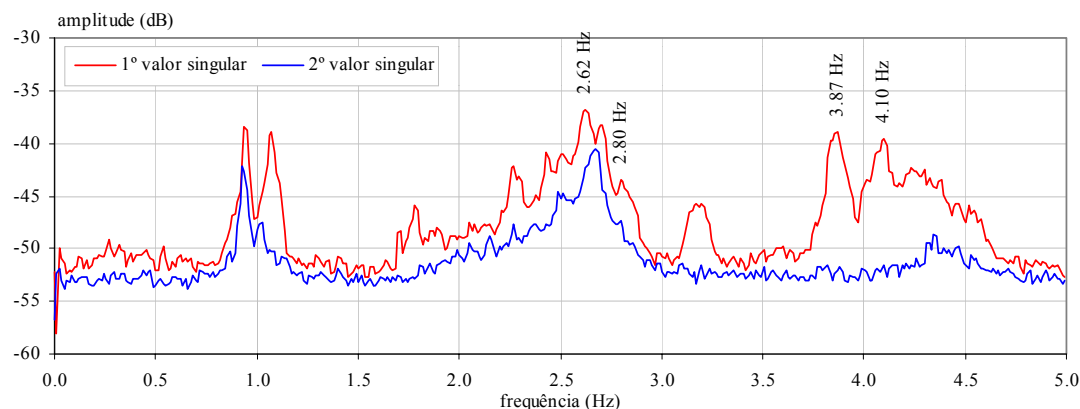


Figura 6.223 – Espectros dos dois primeiros valores singulares (com os grupos desligados).

Nas figuras 6.222 e 6.223 estão também indicados os valores das frequências identificadas com o método FDD, como correspondentes a modos naturais de vibração da barragem. Esses valores das frequências para as duas situações de excitação distinta (com os grupos em funcionamento e com os grupos desligados) são concordantes entre si, havendo apenas algumas diferenças ligeiras, a maior das quais refere-se ao 4º modo que foi identificado. Em termos de configurações modais, os resultados obtidos nas duas situações, são também concordantes entre si, conforme se pode verificar nas figuras 6.224 e 6.225.

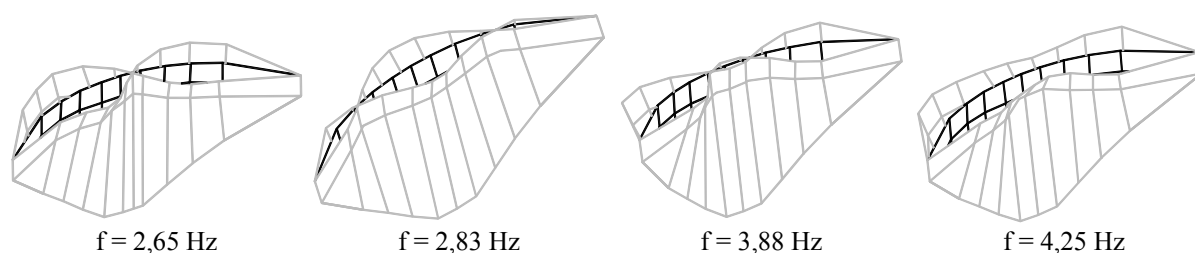


Figura 6.224 – Configurações identificadas para a situação com os grupos geradores em funcionamento.

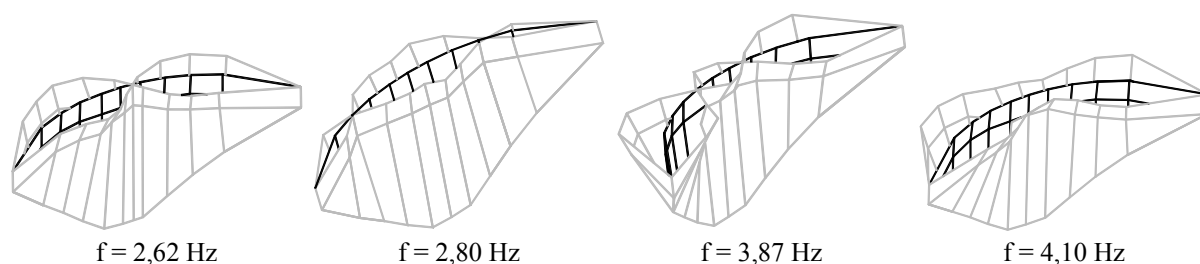
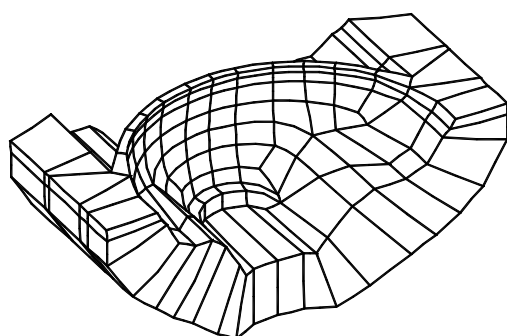


Figura 6.225 – Configurações identificadas para a situação com os grupos geradores desligados.

Comparação com um modelo de elementos finitos:

As características dinâmicas identificadas com o método FDD foram também comparadas com as calculadas com um modelo de elementos finitos desenvolvido no Departamento de Barragens de Betão do LNEC (Oliveira *et al.*, 2003). Trata-se de um modelo de elementos finitos tridimensionais

(cubos isoparamétricos de 20 nós) do conjunto barragem-fundação-albufeira (ver figura 6.226) no qual o efeito hidrodinâmico da água é considerado através de massas de água associadas de *Westergaard*.



Hipótese de material homogéneo, isotrópico e com comportamento elástico-linear
 $E = 33 \text{ GPa}$
 $\nu = 0,2$
 174 elementos
 1296 nós

Figura 6.226 – Modelo de elementos finitos do conjunto barragem-fundação-albufeira (Oliveira *et al.*, 2003).

As frequências e configurações modais calculadas com o modelo de elementos finitos para os quatro primeiros modos de vibração, são apresentadas na figura 6.227.

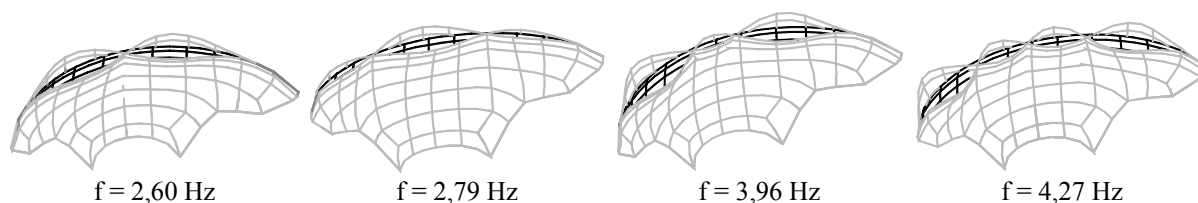


Figura 6.227 – Frequências e configurações modais calculadas com o modelo de elementos finitos.

Relativamente aos três primeiros modos de vibração, verifica-se que há uma boa concordância entre as configurações calculadas e as resultantes da identificação modal efectuada com o método FDD. Quanto ao 4º modo, verifica-se que a configuração calculada é bastante diferente da configuração identificada. Assim, havendo o conhecimento da existência na barragem do Cabril, de fissuração horizontal numa faixa situada entre os 7 m e os 20 m do coroamento, colocou-se a hipótese dela ser o motivo da diferença constatada na configuração do 4º modo de vibração. Para o tentar verificar, procurou-se simular simplificadaamente essa fissuração no modelo de elementos finitos, considerando que o módulo de elasticidade vertical dos elementos finitos na zona da referida faixa, tem um valor reduzido de $E = 3,3 \text{ GPa}$. Com esta alteração no modelo de elementos finitos, os três primeiros modos de vibração mantêm-se praticamente inalterados e o 4º modo, com uma frequência de 4,60 Hz, tem uma configuração que já se aproxima mais da configuração identificada a partir dos ensaios com excitação natural (ver a figura 6.228). Este facto permite admitir a hipótese de que a fissuração existente na barragem do Cabril (cuja existência é conhecida em face dos resultados de trabalhos de inspecção através de outros métodos e até de obras de reparação que já foram efectuadas na barragem) traduz-se em alterações das configurações dos modos de vibração. Esta hipótese poderá ser comprovada no futuro, nomeadamente efectuando ensaios em que se utilize uma malha mais refinada de pontos de medição da resposta da estrutura.

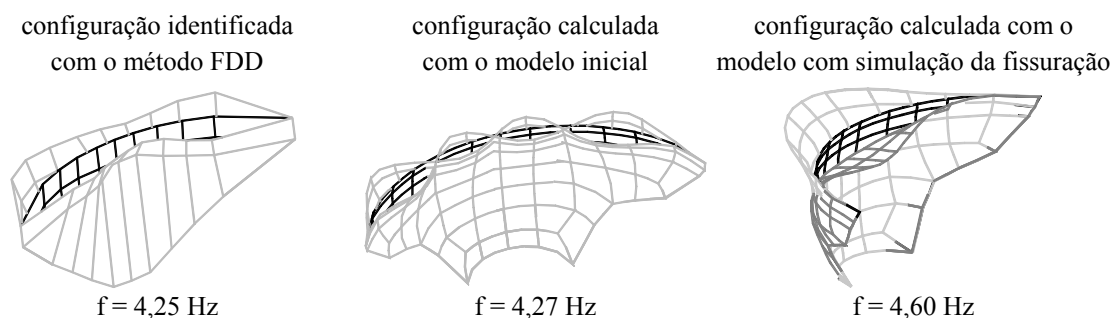


Figura 6.228 – Configurações do 4º modo de vibração.

Considerações finais:

Considera-se que os resultados obtidos a partir do ensaio com excitação natural efectuado na barragem do Cabril permitem encarar com optimismo a aplicação desse tipo de ensaios em estruturas de barragens. Note-se que, por exemplo no laboratório federal suíço *EMPA*, têm-se também efectuado nesse tipo de estruturas, estudos de identificação modal a partir de ensaios de medição de vibrações ambiente, como por exemplo na barragem de *Mauvoisin* na Suíça (Felber e Cantieni, 1995).

O ensaio efectuado na barragem do Cabril teve apenas o objectivo de verificar a aplicabilidade, nas estruturas de barragens, das técnicas de identificação modal analisadas neste trabalho. É uma aplicação que, desde que esse ensaio foi efectuado (em Fevereiro de 2002), tem vindo a ser explorada no Departamento de Barragens de Betão do LNEC, havendo actualmente em desenvolvimento um trabalho de mestrado (Mendes, 2004) que lhe é dedicado. Um dos aspectos interessantes que tem vindo a ser analisado é o da influência do nível da água na albufeira, nas frequências dos modos de vibração da barragem, o qual é ilustrado na figura 6.229. Nessa figura apresentam-se as *linhas de influência*, calculadas com o modelo de elementos finitos, que traduzem a variação das frequências dos 3 primeiros modos de vibração em função do nível da água na albufeira; apresentam-se igualmente os resultados observados em dois ensaios de vibração forçada e ainda os resultados do ensaio de vibração ambiente que se descreveu anteriormente.

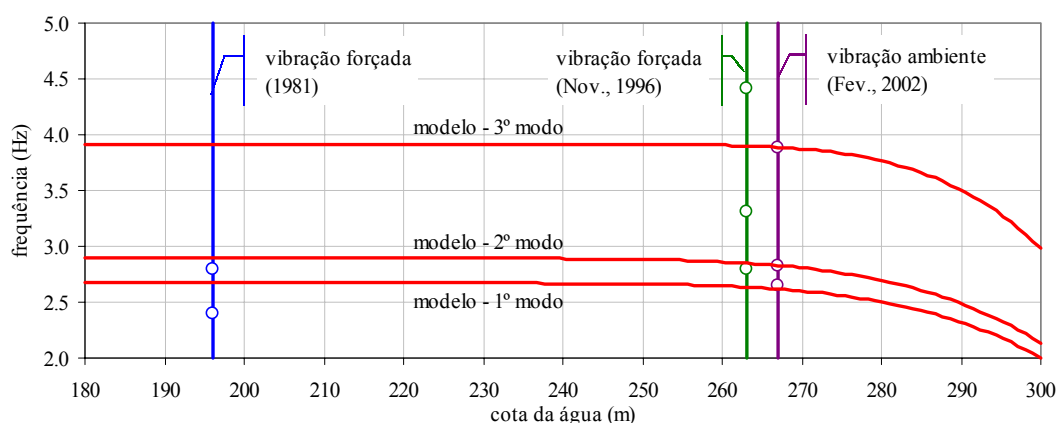


Figura 6.229 – Efeito do nível da água nas frequências dos modos de vibração da barragem do Cabril.

Na figura 6.229 é notório o decréscimo das frequências para cotas da água superiores a 265 m, em virtude do aumento de massa no sistema barragem-albufeira. É ainda de salientar que os resultados do ensaio de vibração forçada de 1996 são razoavelmente coerentes com os do ensaio de vibração ambiente anteriormente apresentado (cotas da água relativamente próximas). Os resultados obtidos em 1981 com a albufeira vazia indicam valores inferiores aos do modelo de elementos finitos, o que poderá ser explicado pelo facto de nesse modelo não se simular o efeito de decréscimo de rigidez global que deverá estar associado à abertura das juntas de contracção que na realidade se verifica para a situação de albufeira vazia.

6.5 Avaliação das forças instaladas em tirantes de pontes atirantadas

A última aplicação que se apresenta neste trabalho é, sob o ponto de vista de identificação modal, uma aplicação relativamente simples, mas que tem revelado ser de grande utilidade prática pelo que decidiu-se fazer-lhe uma breve referência. Trata-se da avaliação das forças instaladas em tirantes de pontes atirantadas, a qual pode ser feita numa forma indirecta a partir das frequências dos modos naturais de vibração dos tirantes. Essas frequências podem ser avaliadas por análise da resposta dos tirantes medida experimentalmente, sendo, em geral, suficiente analisar a resposta induzida pelas acções ambiente (vento e tráfego de veículos) para que seja possível identificar claramente as frequências de vários modos de vibração dos tirantes. Por vezes, pode-se também optar por efectuar ensaios em que se coloca os tirantes a vibrar em regime livre, por exemplo, aplicando manualmente uma força impulsiva através duma corda que é amarrada aos tirantes.

Sob o ponto de vista das técnicas experimentais de avaliação das forças instaladas em tirantes, a que envolve a identificação das frequências naturais de vibração é talvez a mais económica (Fib, 2003; Peeters *et al.*, 2003), especialmente no caso de estruturas em situação de serviço. Neste último caso as técnicas que envolvam a utilização dos macacos hidráulicos de tensionamento dos tirantes (*lift off tests*) exigem uma maior logística, são mais morosas e podem mesmo danificar a zona das ancoragens, influenciando desfavoravelmente a sua durabilidade (Fib, 2003).

Para a avaliação das frequências dos modos de vibração dos tirantes, é usual medir a resposta em aceleração dos tirantes utilizando acelerómetros, sendo essa uma maneira relativamente prática de o fazer. Uma outra possibilidade é a utilização de transdutores laser de velocidade, ou vibrómetros laser (Cunha e Caetano, 1999), que tem a vantagem de não exigir um contacto directo do transdutor com o tirante, tornando mais fácil a operação inicial de montagem do equipamento.

Durante o período de elaboração deste trabalho houve a oportunidade de efectuar diversos estudos de avaliação das forças instaladas em tirantes, a partir da identificação das suas frequências

naturais de vibração. Trata-se de estudos de apoio à actividade do LNEC na observação de estruturas durante a sua construção ou já em situação de serviço. Na figura 6.230 apresenta-se uma panorâmica geral desses estudos efectuados no viaduto do comboio no Funchal, na ponte Salgueiro Maia em Santarém e na ponte Europa em Coimbra.

durante a construção do viaduto do comboio no Funchal



no final da construção da ponte Salgueiro Maia em Santarém



durante a construção da ponte Europa em Coimbra



na ponte Salgueiro Maia em Santarém, 2 anos após a abertura ao tráfego

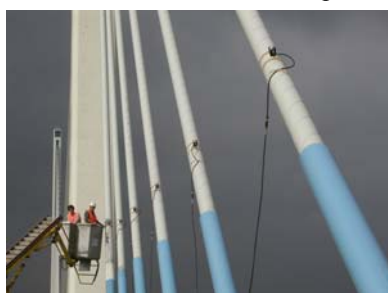


Figura 6.230 – Avaliação das forças instaladas em tirantes de pontes atirantadas.

No que diz respeito à aplicação prática da técnica de avaliação das forças instaladas em tirantes, por identificação das frequências dos seus modos naturais de vibração, referem-se também os trabalhos desenvolvidos por uma equipa da FEUP nos ensaios de recepção da ponte Vasco da Gama em Lisboa (Cunha e Caetano, 1999) e também durante a construção da ponte do Infante no Porto. Note-se que a nível internacional esta técnica tem também sido objecto de vários desenvolvimentos, nomeadamente no âmbito do projecto de investigação Europeu IMAC (*Integrated Monitoring and Assessment of Cables*) liderado pela empresa Austríaca VCE (<http://www.vce.at/imac.htm>).

Nos estudos realizados nas três obras acima referidas, a avaliação das frequências dos modos naturais de vibração dos tirantes foi efectuada através da selecção dos picos de ressonância dos auto-espectros dos registos de acelerações num ponto dos tirantes. Esses auto-espectros foram estimados utilizando a técnica já descrita no capítulo 4 e que pode ser atribuída a Welch (1967), a qual envolve a utilização do algoritmo da FFT e o cálculo do espectro médio dos espectros avaliados com diversas amostras dum registo. Antes da utilização do algoritmo da FFT, foi aplicada uma janela de *Hanning* às amostras dos registos, de maneira a reduzir os efeitos de *leakage*.

No caso de se assumir um modelo de corda vibrante para os tirantes, ou seja, de os considerar como elementos traccionados com rigidez axial mas com rigidez de flexão desprezável, as frequências f_n (Hz) dos seus modos naturais de vibração podem ser determinadas através de:

$$f_n = n \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \Leftrightarrow f_n = n f_1 \quad \text{com} \quad f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (6.5)$$

em que: n é o número de ordem do modo de vibração do tirante;

L (m) é o comprimento livre do tirante;

T (N) é a força de tracção no tirante;

m (kg/m) é a massa por unidade de comprimento do tirante.

Uma vez avaliadas as frequências f_n dos modos de vibração dos tirantes, a partir de ensaios dinâmicos *in situ* (conforme se referiu, os ensaios de medição da resposta dos tirantes às acções ambiente são em geral adequados para fazer essa avaliação), a força T (N) neles instalada, pode ser determinada, tendo em conta a expressão (6.5), através de:

$$T = \frac{4 m L^2 f_n^2}{n^2} \quad (6.6)$$

Conforme se pode verificar na expressão (6.5), no modelo de corda vibrante, as frequências dos diversos modos de vibração são múltiplos da frequência do 1º modo. De facto, usualmente, os auto-espectros da resposta dos tirantes, medida experimentalmente, têm um aspecto característico (ver

a figura 6.231) com vários picos de ressonância bem evidentes, em frequências que são um múltiplo da frequência do primeiro desses picos. Este é um facto importante, que verificando-se nos resultados experimentais, traduz a aplicabilidade do modelo de corda vibrante ao tirante em causa (Robert *et al.*, 1991). Assim, uma maneira de efectuar uma verificação da aplicabilidade desse modelo, é através dum gráfico, em que se traçam as frequências identificadas em função do n.º de ordem do correspondente modo de vibração; os pontos assim obtidos deverão estar localizados ao longo de uma recta, conforme se ilustra na figura 6.232.

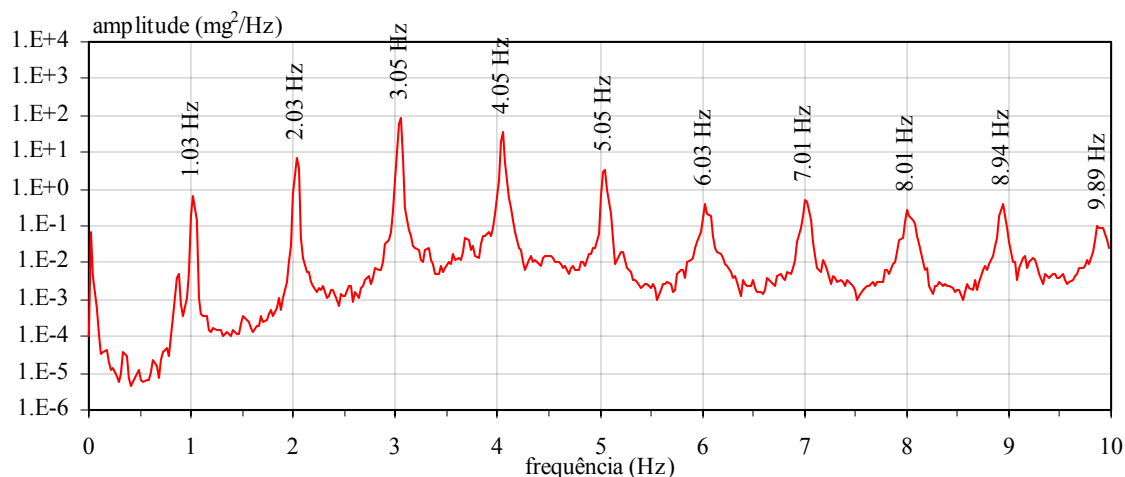


Figura 6.231 – Exemplo de um auto-espectro das acelerações registadas num tirante.

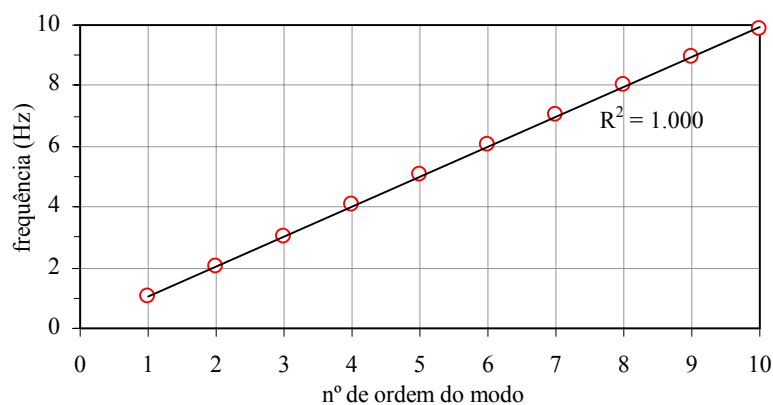


Figura 6.232 – Relação entre a frequência e a ordem do correspondente modo.

O facto de que as frequências dos diversos modos de vibração dos tirantes são um múltiplo da frequência do 1º modo é também importante para a análise dos auto-espectros dos registos obtidos experimentalmente, nomeadamente, para seleccionar correctamente os picos de ressonância que de facto correspondem a esses modos de vibração dos tirantes, e não, por exemplo, a modos globais de vibração duma ponte.

Para o desenvolvimento das aplicações acima referidas, elaborou-se um programa em *LabView*, o qual efectua diversas operações, nomeadamente: aquisição de sinais (de acordo com os

parâmetros definidos pelo utilizador); pré-processamento desses sinais, com remoção de média, filtragem passa-baixo e decimação; cálculo dum auto-espectro médio com a sua actualização à medida que as diversas amostras vão sendo adquiridas; possibilidade de selecção dos picos de ressonância dos auto-espectros e cálculo imediato das forças nos tirantes considerando as suas características; e envio dos resultados para uma folha de *Excel* para impressão de um boletim de ensaio. Nas figuras 6.233 e 6.234 apresenta-se o painel frontal (interface com o utilizador) e o código em *LabView* do programa desenvolvido para avaliação das forças instaladas em tirantes.

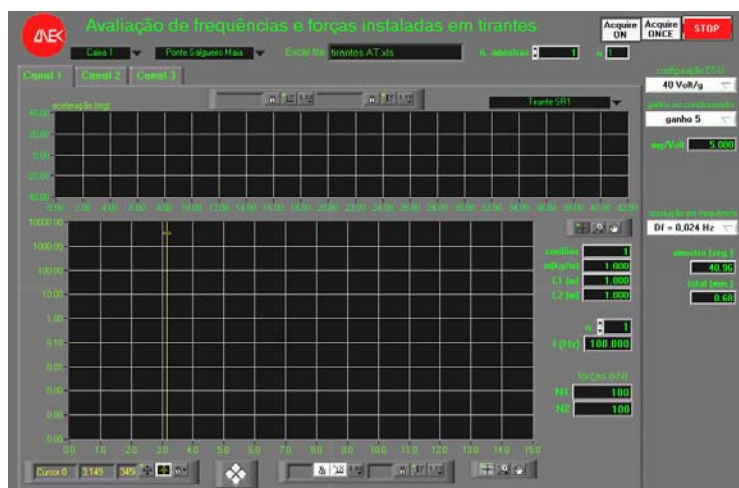


Figura 6.233 – Painel frontal do programa em *LabView* para avaliação das forças instaladas em tirantes.

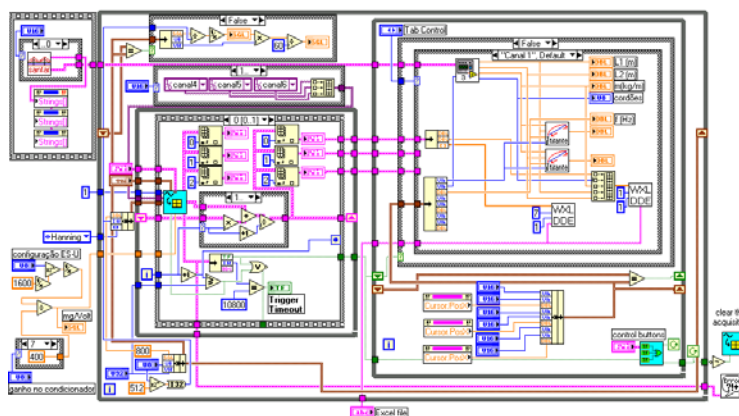


Figura 6.234 – Código em *LabView* do programa para avaliação das forças instaladas em tirantes.

O método de identificação das frequências que foi utilizado nas aplicações desenvolvidas foi sempre o baseado na análise dos auto-espectros avaliados com utilização do algoritmo da FFT, ou seja, um método não paramétrico. No entanto, encara-se também com bastante interesse a possibilidade de, no futuro, para este tipo de aplicações, utilizar também métodos paramétricos, como por exemplo o método SSI-COV aplicado às funções RD.

Em termos de identificação modal, a avaliação das forças instaladas em tirantes pode ser considerada como relativamente simples, uma vez que apenas envolve a identificação das frequências

de alguns modos de vibração, ou mesmo apenas a do 1º modo já é suficiente. Pode no entanto haver situações em que haja interesse em quantificar a intensidade das vibrações nos tirantes ou em avaliar os coeficientes de amortecimento, o que pode ser importante no caso de se pretender fazer uma avaliação da possibilidade de ocorrência de problemas relacionados com o comportamento dinâmico dos tirantes, resultantes do fenómeno de *galloping* ou associados a vibrações induzidas pela acção conjunta do vento e da chuva (Fib, 2003).

Nas aplicações referidas, a avaliação das forças instaladas em tirantes a partir das suas frequências naturais de vibração, foi sempre efectuada considerando o modelo de corda vibrante. No entanto, nalguns casos, nomeadamente em tirantes de menor comprimento, esse modelo pode não ser completamente válido. No âmbito do projecto IMAC já referido, têm sido estudadas formulações alternativas à do modelo de corda vibrante, as quais permitem ter em conta a rigidez de flexão dos tirantes (Van Gysel e De Roeck, 2002; Peeters *et al.*, 2003). Encara-se também com interesse a possibilidade de, no futuro, efectuar a avaliação das forças em tirantes com base nessas formulações.

6.6 Considerações finais

Neste capítulo apresentaram-se diversos exemplos de aplicação dos métodos de identificação modal estocástica na avaliação das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil. Nessas aplicações abrangeram-se as estruturas de pontes, de edifícios e de barragens.

A maioria dos casos apresentados integraram-se em estudos solicitados ao LNEC, efectuados no âmbito de ensaios de recepção de estruturas recentes, antes da sua entrada em serviço, ou incluídos em trabalhos de inspecção de estruturas já com alguns anos de serviço, com vista a analisar soluções para a sua eventual reparação e/ou reforço.

Foram também apresentados dois exemplos relacionados com a avaliação da capacidade de pontes ferroviárias para o tráfego de comboios de alta velocidade, para a qual também é importante o conhecimento das características dinâmicas dessas estruturas.

Referiu-se ainda uma aplicação que embora simples em termos de identificação modal, tem revelado ser de grande utilidade, a avaliação das forças instaladas em tirantes de pontes atirantadas, com base nos valores identificados para as suas frequências naturais de vibração.

Através dos exemplos apresentados, ilustrou-se a utilidade e as potencialidades dos métodos de identificação modal estocástica, no domínio da caracterização dinâmica de estruturas de engenharia civil. O interesse desses métodos foi já demonstrado nas aplicações desenvolvidas, considerando-se que de futuro haverá certamente mais oportunidades para os explorar.

Capítulo 7

Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

7.1 Conclusões

O interesse da avaliação experimental das características dinâmicas de estruturas de engenharia civil prende-se não só com a validação de modelos utilizados na análise do seu comportamento dinâmico, mas estende-se também à caracterização global do estado das estruturas, uma vez que as propriedades dinâmicas estão directamente relacionadas com esse estado, constituindo uma boa forma de o caracterizar. No domínio da observação e monitorização estrutural, há assim um grande interesse na avaliação experimental das características dinâmicas e, em especial, em métodos que permitam efectuar-las ao longo do tempo de vida das estruturas, sem necessidade de introduzir restrições à sua utilização corrente. É fundamentalmente dentro do objectivo de compreender, desenvolver e utilizar métodos que são aplicáveis nesse domínio, que se desenvolveu este trabalho dedicado à identificação modal estocástica.

A identificação modal estocástica tem por finalidade a avaliação das características dinâmicas dos sistemas estruturais, com base na análise da sua resposta, medida experimentalmente, às acções a que normalmente eles estão sujeitos. A grande vantagem relativamente às técnicas de identificação modal clássica, em que são aplicadas forças de excitação controladas, utilizando para tal, equipamentos apropriados, é a de que pode ser efectuada sem necessidade desses equipamentos e sem exigir a interrupção das condições normais de funcionamento dos sistemas. Em especial no caso das estruturas de engenharia civil, esses aspectos são bastante importantes, pois permitem que a avaliação das características dinâmicas das estruturas seja efectuada com custos bastante mais reduzidos.

A utilização da identificação modal estocástica para a caracterização dinâmica de estruturas de engenharia civil envolve diversos aspectos, desde a utilização de transdutores adequados para a medição da resposta das estruturas, equipamentos de aquisição e armazenamento de dados, técnicas de ensaio, métodos de identificação para extracção dos parâmetros modais a partir das respostas medidas experimentalmente, e também a utilização dessas características modais para diversas finalidades, nomeadamente para a validação de modelos analíticos.

Os diversos aspectos referidos no parágrafo anterior foram analisados ao longo dos 6 capítulos anteriores deste trabalho, o qual teve como principais objectivos:

- Sistematizar os diferentes métodos de identificação modal estocástica, compreendendo os seus fundamentos e algoritmos;
- Implementar e aplicar métodos de identificação modal estocástica a estruturas reais de engenharia civil;
- Analisar e aplicar técnicas de comparação das características dinâmicas identificadas com as calculadas com modelos analíticos e iniciar uma análise dos métodos de modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente.

Neste trabalho apresentaram-se diversos métodos de identificação modal estocástica, tendo-se indicado os seus fundamentos e os procedimentos que são seguidos em cada um. É natural colocar a questão sobre se há algum dos métodos analisados que possa ser considerado como *melhor* do que os outros. No entanto, talvez não seja possível dar uma resposta peremptória a essa questão, nem de facto haja muito interesse nisso. Importa sim conhecer bem os fundamentos dos diversos métodos e que todos eles têm por um lado as suas vantagens e por outro as suas limitações ou as suas dificuldades de utilização.

Os métodos no domínio da frequência, baseados nas estimativas das funções de densidade espectral da resposta, avaliadas por intermédio do algoritmo da FFT, são bastante rápidos na sua execução e também fáceis de utilizar. No entanto, têm o problema das frequências naturais de vibração das estruturas serem avaliadas em valores discretos de frequência, ou seja, com uma precisão limitada. Acresce ainda que o efeito de *leakage* que se verifica nessas estimativas das funções de densidade espectral, pode também introduzir erros na avaliação dos parâmetros modais, especialmente no que se refere aos coeficientes de amortecimento. Por estes motivos, com esses métodos pode haver alguma dificuldade na avaliação das características de modos de vibração com frequências muito próximas. Note-se que estas desvantagens são minimizadas se as funções de densidade espectral forem estimadas com uma resolução em frequência muito fina, o que implica a obtenção de séries de resposta com durações muito longas. Saliente-se também que nos métodos de decomposição no domínio da frequência, especialmente no método EFDD, as referidas desvantagens, são também, de alguma forma, ultrapassadas.

Neste trabalho focaram-se três métodos no domínio da frequência (BFD, FDD e EFDD) em que se analisam as estimativas das funções de densidade espectral obtidas através do procedimento devido a Welch (1967). Explorou-se também a ideia de aplicar esses métodos às funções de densidade espectral estimadas a partir das funções RD, dando origem a três variantes (RD-BFD, RD-FDD e RD-EFDD) que mostraram ter vantagens em relação aos métodos originais. Essas vantagens são devidas ao efeito de redução do ruído resultante da aplicação do método RD e ao evitar do efeito de *leakage*

que pode ser conseguido se as funções RD forem avaliadas com uma duração tal que permita que se verifique o seu decaimento completo dentro dessa duração.

Os métodos no domínio do tempo permitem avaliar com grande precisão as características modais dos sistemas. No entanto, os cálculos que envolvem são mais pesados, tornando a sua execução mais lenta do que a dos métodos no domínio da frequência. A sua aplicação é também, em geral, mais difícil, pois, em muitas situações, apesar da utilização de diagramas de estabilização, a escolha da ordem correcta do modelo a ajustar, não é muito óbvia (pelo menos numa fase inicial da utilização desses métodos).

Os métodos no domínio do tempo apresentados neste trabalho foram subdivididos em métodos de ajuste às funções de correlação da resposta e métodos de ajuste às séries de resposta. Do primeiro tipo abordaram-se os métodos ITD, MRITD, LSCE, PTD e três variantes do método SSI-COV. Do segundo tipo, descreveram-se, fundamentalmente, as três variantes do método SSI-DATA.

Fazem-se em seguida alguns comentários relativamente às particularidades dos diferentes métodos de identificação modal estocástica.

No método BFD as frequências dos modos de vibração dum sistema são identificadas a partir da selecção dos picos de ressonância das funções de densidade espectral e as componentes modais são avaliadas através das relações de amplitude e fase, nessas frequências, entre as respostas medidas em diferentes pontos e num ponto de referência. As configurações assim estimadas não são configurações de modos naturais de vibração mas sim de modos operacionais de deformação, uma vez que no método não há de facto uma separação entre as contribuições de cada modo. Note-se no entanto que esta diferença não é importante em sistemas com modos com frequências bem separadas e amortecimentos baixos.

A *ferramenta* numérica utilizada no método BFD é essencialmente o algoritmo da FFT, o que tem como vantagem o facto do método ser de execução rápida e como desvantagens o facto da identificação modal ser efectuada com uma resolução finita em frequência e de haver o efeito de *leakage* nas funções de densidade espectral que são analisadas.

O método BFD não tem em si mesmo uma técnica para estimar os coeficientes de amortecimento, utilizando-se normalmente associado a ele, ou o método da meia potência ou um método de ajuste dum espectro analítico aos picos isolados dos auto-espectros das séries de resposta. A primeira destas técnicas pode resultar em estimativas pouco correctas para os coeficientes de amortecimento. A segunda técnica é um pouco melhor, mas também é difícil aplicá-la na situação de modos com frequências muito próximas.

O método FDD introduz algumas melhorias ao método BFD, nomeadamente, o facto de que através do algoritmo SVD, a matriz de funções de densidade espectral da resposta é decomposta nas contribuições de cada modo. A identificação das frequências e configurações de modos com frequências próximas é assim melhor efectuada com o método FDD do que com o método BFD. A limitação da resolução finita em frequência mantém-se, assim como as questões relacionadas com as técnicas utilizadas para estimar os coeficientes de amortecimento.

O método EFDD tem algumas vantagens relativamente ao método FDD, nomeadamente na técnica de estimar as frequências e as componentes modais (a limitação da resolução finita em frequência é de alguma forma ultrapassada) e introduz também uma técnica para estimar os coeficientes de amortecimento.

Os três métodos RD-BFD, RD-FDD e RD-EFDD são idênticos aos métodos BFD, FDD e EFDD, tendo apenas uma diferença na técnica que é utilizada para estimar as funções de densidade espectral. Nesses três métodos essas funções são estimadas a partir das funções RD avaliadas utilizando o método do decréscimo aleatório. Pelos motivos anteriormente indicados, as funções de densidade espectral assim avaliadas permitem que a identificação modal seja efectuada numa forma mais clara e conseqüentemente com melhores resultados.

Os métodos no domínio do tempo ou métodos paramétricos, consistem no ajuste de modelos à informação experimental. Esses modelos são traduzidos nas matrizes da representação de estado dum sistema estocástico no tempo discreto, as quais são de facto o resultado desses métodos de identificação. Os parâmetros modais identificados são portanto calculados a partir dessas matrizes, pelo que as características dinâmicas avaliadas com esses métodos correspondem às dos modelos ajustados. Com os métodos no domínio do tempo é ultrapassada a limitação da resolução finita em frequência que se verifica nos métodos BFD e FDD.

Um ponto comum a todos os métodos paramétricos é a escolha da ordem do modelo que melhor se ajusta à informação experimental e que, portanto, deve ser considerado para extrair os parâmetros modais que se pretendem identificar. Para esse fim é de grande utilidade utilizar diagramas de estabilização que mostram as características dos pólos avaliados para modelos de ordem crescente, comparando-as com as de um modelo de ordem imediatamente inferior.

Do primeiro grupo de métodos no domínio do tempo, os métodos ITD, MRITD, LSCE e PTD consistem no fundo num ajuste de mínimos quadrados às funções de correlação da resposta dum sistema. O método SSI-COV introduz uma operação adicional que é a decomposição em valores singulares, que tem como efeito o limitar o ajuste de mínimos quadrados a um subespaço onde há uma menor influência do ruído existente na resposta dum sistema. Tal traduz-se no facto de em geral se

conseguirem bons ajustes à informação experimental com modelos de ordem mais baixa do que a que é necessária com os outros métodos baseados no ajuste às funções de correlação.

Do segundo grupo de métodos no domínio do tempo, o método SSI-DATA é semelhante ao método SSI-COV. Como principal diferença há o facto de que a avaliação das funções de correlação da resposta é substituída por uma operação, implementada através do algoritmo de decomposição QR, que pode ser interpretada como uma projecção geométrica do espaço das séries de resposta do “futuro” no espaço das séries de resposta do “passado”.

Como desvantagem do método SSI-DATA relativamente ao método SSI-COV, há o facto de ser um método de execução mais lenta. Como vantagem, Peeters (2000) indica o facto de com as matrizes identificadas com o método SSI-DATA ser possível efectuar a conversão para as matrizes do modelo de inovações que permite efectuar a operação de separação da resposta observada em respostas modais.

Em geral e uma vez entendidas as particularidades dos diversos métodos de identificação modal estocástica, pode-se considerar como vantajosa a utilização de mais do que um método para analisar a mesma informação, pois, a comparação dos resultados obtidos com cada um, é uma boa forma de validação das conclusões dessa análise.

No âmbito da breve abordagem que foi feita neste trabalho relativamente aos métodos de correcção de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas experimentalmente, apresentaram-se e aplicaram-se os métodos de modificação directa das matrizes de massa e rigidez, tendo-se obtido resultados muito bons. Tal deve-se ao facto de, no caso considerado para exemplificar esses métodos, ter sido considerado um modelo modal que foi caracterizado de forma completa a partir da informação experimental. Os resultados obtidos com esses métodos de modificação de modelos analíticos, já não são tão bons como os conseguidos no exemplo considerado, se não for possível efectuar uma identificação modal completa.

Uma parte importante deste trabalho consistiu na realização de ensaios em estruturas de engenharia civil, e na aplicação de métodos de identificação modal estocástica à informação neles obtida. Durante o período do seu desenvolvimento, houve de facto a oportunidade de efectuar ensaios e aplicar alguns dos métodos de identificação modal estocástica em várias estruturas importantes existentes em Portugal, como por exemplo: a ponte da Arrábida no Porto, a ponte da Figueira da Foz, a ponte Miguel Torga na Régua, a ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa, a estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira e a ponte Salgueiro Maia em Santarém (entre outros casos de aplicação apresentados no capítulo 6).

Com as aplicações efectuadas, contribuiu-se de forma significativa, para que as técnicas de ensaio e análise exploradas neste trabalho se tornassem num procedimento praticamente corrente em diversos trabalhos efectuados no Departamento de Estruturas do LNEC.

Com a experiência ganha na realização dos vários ensaios efectuados, houve a oportunidade de verificar as vantagens e potencialidades da identificação modal estocástica e a sua utilidade como ferramenta de diagnóstico do comportamento e do estado das estruturas de engenharia civil. Constatou-se também, em especial nalguns casos, como por exemplo na barragem do Cabril, que os equipamentos existentes actualmente têm já capacidade para medir, com uma resolução muito boa, respostas estruturais com amplitudes extremamente pequenas. Como é de esperar que venham a verificar-se ainda mais desenvolvimentos no domínio dos transdutores e equipamentos de aquisição de dados, as potencialidades da identificação modal estocástica deverão ainda aumentar no futuro.

Em vários dos exemplos de aplicação que foram apresentados, para além do trabalho experimental e da análise de identificação modal, desenvolveram-se também modelos de elementos finitos das estruturas ensaiadas, quer na fase de preparação dos ensaios quer na fase de análise da informação experimental obtida. Nesses exemplos seguiu-se uma metodologia de modificação *manual* dos parâmetros dos modelos de elementos finitos, tendo-se obtido, em muitos casos, bons ajustes entre as características dinâmicas calculadas e as avaliadas com métodos de identificação modal estocástica. Importa também salientar que, ao efectuar a modificação dos modelos de elementos finitos dessa forma, há da parte de quem realiza o trabalho de ajuste do modelo, um proveito importante em termos de compreensão do comportamento dinâmico da estrutura em análise e da melhor forma de o modelar.

7.2 Desenvolvimentos futuros

O trabalho que foi desenvolvido no domínio da identificação modal estocástica foi já de grande utilidade prática em diversas aplicações que foi possível desenvolver durante a sua realização. Considera-se no entanto que este trabalho deverá ser continuado com o desenvolvimento de vários aspectos que estão directamente relacionados com os temas nele abordados.

Em primeiro lugar, refere-se a modificação de modelos analíticos com base nas características dinâmicas identificadas com métodos de identificação modal estocástica. Note-se que a apresentação que foi efectuada neste trabalho, relativamente a esse tema, foi ainda limitada, conforme se salientou no capítulo 5. Considera-se assim, como tendo muito interesse uma exploração mais aprofundada desse tema.

É também importante o desenvolvimento de técnicas de avaliação e detecção de danos a partir das características dinâmicas avaliadas com métodos de identificação modal estocástica. Essas

técnicas poderão basear-se em métodos de modificação de modelos analíticos, sendo a avaliação e detecção dos danos, efectuada a partir precisamente da alteração dos parâmetros desses modelos. Este tema tem assim, uma relação muito próxima com o indicado no parágrafo anterior.

Os métodos de identificação modal estocástica apresentados neste trabalho foram utilizados numa maneira interactiva, em que houve sempre intervenção por parte de quem efectuou a análise. No entanto, tendo em conta que um dos grandes interesses da identificação modal estocástica é a monitorização de estruturas ao longo do tempo, importa também desenvolver esses métodos de modo a que identificação modal possa ser efectuada numa maneira automática com um mínimo de intervenção humana. Note-se que já têm sido efectuados alguns esforços nesse sentido (Peeters, 2000; Bolton *et al.*, 2002), no entanto considera-se que este é um domínio em que há ainda muito a explorar.

Como aplicação prática das técnicas automáticas de identificação modal estocástica, referidas no parágrafo anterior, considera-se como tendo muito interesse no futuro, a instalação de sistemas de monitorização dinâmica em estruturas de engenharia civil, nomeadamente em algumas das obras actualmente em observação pelo LNEC.

Note-se que no domínio da monitorização dinâmica em estruturas de engenharia civil, houve já uma experiência inovadora desenvolvida no LNEC, que foi o sistema de monitorização instalado nos anos sessenta na ponte suspensa sobre o rio Tejo (Marecos *et al.*, 1969; LNEC - Marecos e Castanheta, 1970). Actualmente, está previsto que se venha a instalar nessa ponte um novo sistema de monitorização a longo prazo que deverá incluir instrumentação que permita acompanhar as características dinâmicas da estrutura ao longo do tempo.

Na estrutura de ampliação do aeroporto da Madeira também se prevê, que se venha a instalar um sistema de instrumentação, composto por acelerómetros e extensómetros, com vista a efectuar a monitorização dos efeitos dinâmicos do tráfego de aeronaves, no entanto esse sistema não foi ainda instalado.

Em relação à integração da identificação modal estocástica nos sistemas de monitorização de estruturas, há um facto importante que tem de ser tido em conta. Em diversos estudos em que foi feita a monitorização das frequências dos modos naturais de vibração de estruturas, ao longo de um período de tempo longo, tem-se constatado que há uma boa correlação entre as variações dessas frequências e as variações de temperatura (Farrar *et al.*, 1997; Peeters e De Roeck, 2000; Rohrman *et al.*, 2000; Alampalli e Cioara, 2002; Feltrin, 2002). Este é um aspecto que deverá ser esclarecido com mais estudos a efectuar no futuro, no entanto, as conclusões dos trabalhos referidos, permitem desde já verificar que ele não pode ser ignorado. Assim, nos sistemas de monitorização estrutural com base no

acompanhamento da eventual variação das características dinâmicas, deverá haver também uma monitorização das condições ambientais, nomeadamente da temperatura.

Uma parte importante dos desenvolvimentos futuros, que permitirão obter um melhor aproveitamento da identificação modal estocástica, está relacionada com os equipamentos, sistemas de aquisição, sistemas de transmissão de informação por fibra óptica ou mesmo sem fios, e sistemas de acesso remoto à informação através da *Internet*. Neste domínio deverá continuar a haver uma importante actividade no LNEC, envolvendo uma colaboração estreita entre o Departamento de Estruturas, o Centro de Instrumentação Científica e também o Departamento de Barragens de Betão.

Outras aplicações importantes associadas à identificação modal estocástica que poderão ser desenvolvidas no futuro são a caracterização das próprias acções ambiente (o vento ou o tráfego de veículos) e a análise dos efeitos de fadiga nas estruturas sob o efeito dessas acções.

Referências Bibliográficas

A

- [1] Abdel-Ghaffar, A. M. (1978) - *Vibration Studies and Tests of a Suspension Bridge*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 6, p. 473-496.
- [2] Abdel-Ghaffar, A. M.; Scanlan, R. H. (1985) - *Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge: I. Suspended Structure*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, N. 4, p. 463-482.
- [3] Abdel-Ghaffar, A. M.; Scanlan, R. H. (1985) - *Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge: II. Pier-Tower Structure*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, N. 4, p. 483-499.
- [4] Abe, M.; Fujino, Y.; Kaito, K. (2001) – *Damage Detection of Civil Structures by Laser Doppler Vibrometry*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- [5] Agardh, L. (1991) - *Modal Analyses of Two Concrete Bridges in Sweden*, Structural Engineering International, Vol. 4, p. 35-39, IABSE.
- [6] Akaike, H. (1974) – *Stochastic Theory of Minimal Realization*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 19, p. 667-674.
- [7] Almeida, C.; Arêde, A.; Costa, A.; Campos Costa, A.; Rodrigues, J. (2001) – *Caracterização Dinâmica e Análise Sísmica da Igreja do Mosteiro da Serra do Pilar*, 5º Encontro Nacional sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Ponta Delgada – Horta, Açores, Portugal.
- [8] Allampalli, S.; Cioara, T. G. (2002) – *On Use of Vibration Signals for Bridge Monitoring*, International Conference on Structural Dynamics Modelling, Funchal, Madeira, Portugal.
- [9] Allemang, R. J.; Brown, D. L. (1982) – *A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis*, IMAC I, Orlando, USA.
- [10] Allemang, R. J.; Brown, D. L. (1993) – *Experimental Modal Analysis*, em *Handbook on Experimental Mechanics*, editado por A. S. Kobayashi, SEM – Society for Experimental Mechanics, USA.
- [11] Allemang, R. J. (1999) – *Vibrations: Analytical and Experimental Modal Analysis - Course Notes*, 6th edition, CN-20-263-662, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, USA, (http://www.sdrl.uc.edu/course_info.html).
- [12] Allemang, R. J. (1999) – *Vibrations: Experimental Modal Analysis - Course Notes*, 8th edition, CN-20-263-663/664, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, USA, (http://www.sdrl.uc.edu/course_info.html).
- [13] Andersen, P.; Brincker, R.; Kirkegaard, P. H. (1995) – *On the Uncertainty of Identification of Civil Engineering Structures Using ARMA Models*, IMAC XIII, Nashville, USA.
- [14] Andersen, P.; Brincker, R.; Kirkegaard, P. H. (1996) – *Theory of Covariance Equivalent ARMA Models of Civil Engineering Structures*, IMAC XIV, Dearborn, USA.
- [15] Andersen, P.; Kirkegaard, P. H.; Brincker, R. (1997) – *Filtering out Environmental Effects in Damage Detection of Civil Engineering Structures*, IMAC XV, Kissimmee, USA.
- [16] Andersen, P. (1997) – *Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models*, PhD Thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark.
- [17] Andersen, P.; Kirkegaard, P. H. (1998) – *Statistical Damage Detection of Civil Engineering Structures Using ARMA Models*, IMAC XVI, Santa Barbara, USA.
- [18] Andersen, P.; Brincker, R. (1999) – *Estimation of Modal Parameters and their Uncertainties*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.

- [19] Andersen, P.; Brincker, R.; Peeters, B.; De Roeck, G.; Hermans, L.; Kramer, C. (1999) - *Comparison of System Identification Methods Using Ambient Bridge Test Data*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [20] Aoki, M. (1987) – *State Space Modelling of Time Series*, Springer Verlag.
- [21] Appleton, J.; Cachadinha, M.; Costa, A.; Candeias, P. (1998) – *Inspecção e Reabilitação da Ponte da Arrábida*, JPEE 98 – Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, LNEC, Lisboa, Portugal.
- [22] Arêde, A.; Almeida, C.; Costa, A.; Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (2002) – *Dynamic Identification and Seismic Analysis of the Serra do Pilar Monastery Church*, IMAC – XX, Los Angeles.
- [23] Arun, K. S.; Kung, S. Y. (1990) – *Balanced Approximation of Stochastic Systems*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 11, p. 42-68.
- [24] Ashkenazi, V.; Roberts, G. (1997) – *Experimental Monitoring of the Humber Bridge Using GPS*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Civil Engineering, Vol. 120, p. 177-182.
- [25] Askegaard, V.; Mossing, P. (1988) – *Long Term Observation of RC-Bridge Using Changes in Natural Frequencies*, Nordic Concrete Research, N. 7, p. 20-27.
- [26] Asmussen, J. C.; Ibrahim, S. R.; Brincker, R. (1996) – *Random Decrement and Regression Analysis of Traffic Responses of Bridges*, IMAC XIV, Dearborn, USA.
- [27] Asmussen, J. C.; Ibrahim, S. R.; Brincker, R. (1996) – *Random Decrement and Regression Analysis of Traffic Responses of Bridges*, IMAC XIV, Dearborn, USA.
- [28] Asmussen, J. C.; Brincker, R. (1996) – *Estimation of Frequency Response Functions by Random Decrement*, IMAC XIV, Dearborn, USA.
- [29] Asmussen, J. C. (1997) – *Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique – Application to Civil Engineering Structures*, PhD Thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark.
- [30] Asmussen, J. C.; Ibrahim, S. R.; Brincker, R. (1997) – *Application of Vector Triggering Random Decrement*, IMAC XV, Kissimmee, USA.

B

- [31] Balmès, E. (1999) – *Sensors, Degrees of Freedom and Generalized Modeshape Expansion Methods*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [32] Balmès, E.; Leclère, J.-M. (2002) – *Structural Dynamics Toolbox, For Use With MATLAB*, User's Guide, Version 5.0, (<http://www.sdtools.com/Publications.html>).
- [33] Barata, V. M. D. (2000) – *Viaduto da Rua Ramalho Ortigão – Relatório de Inspecção*, Lisconcebe Consultadoria de Projectos de Engenharia S.A.
- [34] Barnes, J.; Rizos, C.; Wang, J.; Meng, X.; Cosser, E.; Dodson, A. H.; Roberts, G. W. (2003) – *The Monitoring of Bridge Movements Using GPS and Pseudolites*, 11th FIG Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece.
- [35] Baruch, M. (1978) – *Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests*, AIAA Journal, Vol. 16, N. 11, p. 1208-1210.
- [36] Bastos, L. (2003) – *Avaliação do Desempenho de um Sistema DGPS na Monitorização de Obras*, Encontro Nacional de Geodesia Aplicada, LNEC, Lisboa.
- [37] Béliveau, J.-G.; Chater, S. (1984) - *System Identification of Structures from Ambient Wind Measurements*, 8th WCEE, San Francisco, USA, Vol. IV, p. 307-314.
- [38] Béliveau, J.-G. (1987) - *System Identification of Civil Engineering Structures*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 14, p. 7-18.

-
- [39] Bendat, J. S.; Piersol, A. G. (1993) - *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, 2nd edition, John Wiley & Sons, USA.
- [40] Bendat, J. S.; Piersol, A. G. (2000) – *Random Data – Analysis and Measurement Procedures*, 3rd edition, John Wiley & Sons, USA.
- [41] Benveniste, A.; Fuchs, J.-J. (1985) – *Single Sample Modal Identification of a Nonstationary Stochastic Process*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-30 (1), p. 66-74.
- [42] Benveniste, A.; Basseville, M.; Gousart, M.; Mevel, L. (2000) – *Polyreference Version of Subspace Algorithms for Output Only Structural Identification*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [43] Berman, A.; Nagy, E. (1983) – *Improvement of a Large Analytical Model Using Test Data*, AIAA Journal, Vol. 21, N. 8, p. 1168-1173.
- [44] Bernal, D.; Gunes, B. (2002) – *Damage Localization in Output-Only Systems: A Flexibility Based Approach*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [45] Bernal, D. (2002) – *Load Vectors for Damage Localization*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 128, N. 1, p. 7-14.
- [46] Black, C.; Tsai, P.-C.; Ventura, C. E. (1997) – *Ambient Vibration Measurements of the University Drive / Crowchild Trail Bridge in Calgary, Alberta*, Project EQ 97-005, EQ LAB, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- [47] Bolton, R.; Stubbs, N.; Sikorsky, C. (2002) – *Automation of Modal Extraction Property Extraction for a Permanently Instrumented Highway Bridge*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [48] Bonato, P.; Ceravolo, R.; De Stefano, A.; Molinari, F. (2002) – *Structural Health Monitoring Under Ambient Vibrations: Accuracy of Identification Methods*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [49] Bonnecase, D.; Prevosto, M.; Benveniste, A. (1990) – *Application of a Multidimensional ARMA Model to Modal Analysis under Natural Excitation*, IMAC VIII, Kissimmee, USA.
- [50] Boutin, C.; Hans, S. (1998) - *Using Buildings to be Demolished for Vulnerability Assessment*, 11th ECEE, Paris, France.
- [51] Brincker, R.; Jensen, J. L.; Krenk, S. (1990) – *Spectral Estimation by the Random Decrement Technique*, 9th International Conference on Experimental Mechanics, Copenhagen, Denmark.
- [52] Brincker, R.; Krenk, S.; Jensen, J. L. (1991) – *Estimation of Correlation Functions by the Random Decrement Technique*, IMAC IX, Florence, Italy.
- [53] Brincker, R.; Kirkegaard, P. H.; Rytter, A. (1991) – *Identification of System Parameters by the Random Decrement Technique*, International Seminar on Modal Analysis, Florence, Italy.
- [54] Brincker, R.; Krenk, S.; Kirkegaard, P. H.; Rytter, A. (1992) – *Identification of the Dynamical Properties from Correlation Function Estimates*, Bygningssatiske Meddelelser, Danish Society for Structural Science and Engineering, Vol. 63, N. 1, p. 1-38.
- [55] Brincker, R.; De Stefano, A.; Piombo, B. (1996) – *Ambient Data to Analyse the Dynamic Behaviour of Bridges: A First Comparison Between Different Techniques*, IMAC XIV, Dearborn, USA.
- [56] Brincker, R.; Asmussen, J. C. (1997) – *Random Decrement Based FRF Estimation*, IMAC XV, Kissimmee, USA.
- [57] Brincker, R.; Andersen, P. (1999) – *ARMA Models in Modal Space*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [58] Brincker, R.; Andersen, P. (2000) – *Ambient Response Analysis of the Heritage Court Tower Building Structure*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [59] Brincker, R.; Zhang, L.; Andersen, P. (2000) – *Modal Identification from Ambient Responses Using Frequency Domain Decomposition*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.

- [60] Brincker, R.; Ventura, C.; Andersen, P. (2001) – *Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- [61] Brincker, R.; Ventura, C.; Andersen, P. (2003) – *Why Output-Only Modal Testing is a Desirable Tool for a Wide Range of Practical Applications*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [62] Brincker, R.; Andersen, P. (2003) – *A Way of Getting Scaled Mode Shapes in Output-Only Modal Testing*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [63] Brown, D. L.; Allemang, R. J.; Zimmerman, R.; Mergeay, M. (1979) – *Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis*, SAE Technical Paper Series, N. 790221.
- [64] Brown, D. L.; Ewins, D. J.; Allemang, R. J. (1999) – *Modal Analysis: Theory and Applications*, IMAC XVII Pre-Conference Course, Kissimmee, USA.
- [65] Brownjohn, J. M. W.; Chandru, R.; Dumanoglu, A. A.; Taylor, C. A. (1986) - *Ambient Vibration Testing on the Humber Suspension Bridge*, 8th ECEE, Lisboa, Portugal, Vol. 4, p. 7.2/89-96.
- [66] Brownjohn, J. M. W.; Dumanoglu, A. A.; Severn, R. T.; Blakeborough, A. (1989) - *Ambient Vibration Survey of the Bosphorus Suspension Bridge*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 18, p. 263-283.
- [67] Brownjohn, J. M. W.; Severn, R. T.; Dumanoglu, A. A. (1992) - *Full-Scale Dynamic Test of the Second Bosphorus Suspension Bridge*, 10th WCEE, Madrid, Espanha, Vol. 5, p. 2695-2700.

C

- [68] Caesar, B. (1982) – *Update and Identification of Dynamic Mathematical Models*, IMAC I, Orlando, USA.
- [69] Caetano, E. (1992) – *Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais*, Tese de Mestrado, FEUP, Portugal.
- [70] Caetano, E.; Cunha, A. (1995) – *Identificação de Parâmetros Modais em Estruturas de Engenharia Civil. Algoritmos de Identificação no Domínio da Frequência*, RPEE, n.º 39, p. 19-28.
- [71] Caetano, E.; Cunha, A. (1996) – *Identificação de Parâmetros Modais em Estruturas de Engenharia Civil. Desenvolvimento de Software e Aplicações*, RPEE, n.º 40, p. 17-26.
- [72] Caetano, E. (2000) – *Dynamics of Cable-Stayed Bridges: Experimental Assessment of Cable-Structure Interaction*, Tese de Doutoramento, FEUP, Portugal.
- [73] Caetano, E.; Cunha, A. (2003) – *Ambient Vibration Test and Finite Element Correlation of the New Hintze Ribeiro Bridge*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [74] Caicedo, J. M.; Marulanda, J.; Thomson, P.; Dyke, S. J. (2001) – *Monitoring of Bridges to Detect Changes in Structural Health*, 2001 American Control Conference, Arlington, USA.
- [75] Calçada, R. (1995) – *Efeitos Dinâmicos em Pontes Resultantes do Tráfego Ferroviário a Alta Velocidade*, Tese de Mestrado, FEUP, Portugal.
- [76] Calçada, R.; Cunha, A.; Delgado, R. (2002) – *Numerical and Experimental Assessment of Dynamic Effects of Road Traffic in a Cable-Stayed Bridge*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [77] Calçada, R.; Cunha, A.; Delgado, R. (2002) – *Dynamic Analysis of Metallic Arch Railway Bridge*, ASCE Journal of Bridge Engineering, Vol. 7, N. 4, p. 214-222.
- [78] Calçada, R. (2003) - *Avaliação Experimental e Numérica de Efeitos Dinâmicos de Cargas de Tráfego em Pontes Rodoviárias*, Tese de Doutoramento, FEUP, Portugal.
- [79] Campos Costa, A.; Rodrigues, J. (2001) – *Structural Health Assessment of Bridges by Monitoring their Dynamic Characteristics*, Seminário Segurança e Reabilitação das Pontes em Portugal, Porto, Portugal.
- [80] Câncio Martins, J. L. (2000) – *Ponte Salgueiro Maia – A Segunda Maior Construída em Portugal*, Arquitectura e Vida, N.º 8, Ano I.

-
- [81] Cantieni, R. (2001) – *Assessing a Dam's Structural Properties Using Forced Vibration Testing*, Safety, Risk and Reliability – Trends in Engineering, IABSE International Conference, Malta.
- [82] Carder, D. S. (1936) – *Observed Vibrations of Steel Water Towers*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 26, N. 4, p. 69-88.
- [83] Carder, D. S. (1936) – *Observed Vibrations of Buildings*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 26, N. 4, p. 245-277.
- [84] Carder, D. S. (1937) – *Observed Vibrations of Bridges*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 27, N. 4, p. 267-303.
- [85] Carvalhal, F. J. (1989) – *Engenharia de Sistemas de Controlo. Contribuição para o Desenvolvimento das suas Aplicações na Investigação em Domínios da Engenharia Civil*, Memória n.º 742, LNEC, Portugal.
- [86] Carvalhal, F. J.; Costa, C. O.; Azevedo, F. S. (1989) – *Elementos de Sistemas e de Análise e Processamento de Sinais – Curso*, Centro de Projecto e Construção de Equipamento, LNEC, Portugal.
- [87] Castiglioni, C.; Garozzo, M.; Pasqualato, G.; De Pava, S. V.; Zambrano, A. (1999) – *Efficiency Control of Strengthening Work by Dynamic System Identification. Case Study: Barmes Bridge*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [88] Catbas, F. N.; Lenett, M. S.; Aktan, A. E.; Brown, D. L.; Helmicki, A. J.; Hunt, V. (1999) – *Modal Analysis as a Bridge Monitoring Tool*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [89] Caughey, T. K.; O'Kelly, M. E. J. (1965) – *Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems*, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, p. 583-588.
- [90] Celebi, M.; (2000) – *GPS in Dynamic Monitoring of Long-Period Structures*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, N. 20, p. 477-483.
- [91] Celebi, M.; Sanli, A. (2002) – *GPS in Pioneering Dynamic Monitoring of Long-Period Structures*, Earthquake Spectra, Vol. 18, N. 1, p. 47-61.
- [92] CEN/TC 250/SC 1/N 292 (2001) – *Eurocode 1 – Actions on Structures – Part 2: General Actions - Traffic Loads on Bridges*, Draft European Standard, Draft prEN 1991-2.
- [93] Ceravolo, R.; De Stefano, A. (1996) – *Techniques for the Mechanical Characterisation of Civil Structures*, Materials and Structures, Vol. 29, p. 562-570.
- [94] Chang C. C.; Chang, T. Y. P.; Zhang Q. W. (2001) - *Ambient Vibration of Long-Span Cable-Stayed Bridge*, ASCE Journal of Bridge Engineering, Vol. 6, N. 1, p. 46-53.
- [95] Chhipwadia, K. S.; Zimmerman, D. C.; James, G. H. (1999) – *Evolving Autonomous Modal Parameter Estimation*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [96] Chopra, A. K. (1995) – *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, USA.
- [97] Clough, R. W.; Penzien, J. (1993) – *Dynamics of Structures*, 2nd edition, McGraw-Hill, Singapore.
- [98] Coelho, E.; Campos Costa, A.; Carvalho, E. C.; Ponzo, F. C.; Dolce, M. (2000) – *Comportamento Sísmico Experimental de Estruturas de Betão Armado Reforçadas com Dispositivos Dissipadores de Energia*, REPAR 2000 - Encontro Nacional sobre Conservação e Reabilitação de Estruturas, LNEC, Portugal.
- [99] Cole, H. A. (1968) – *On-the-line Analysis of Random Vibrations*, AIAA Paper No.68-288.
- [100] Cole, H. A. (1973) – *On-Line Failure Detection and Damping Measurements of Aerospace Structures by Random Decrement Signature*, NASA CR-2205.
- [101] Cooley J.W.; Tukey J.W. (1965) - *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Mathematics of Computation, Vol. 19, p. 297-301.

- [102] Corrêa, M. R.; Campos Costa, A. (1992) – *Ensaaios Dinâmicos da Ponte sobre o Rio Arade*, Pontes Atirantadas do Guadiana e do Arade, editado por J. A. Fernandes, L. O. Santos, LNEC, Portugal.
- [103] Cosser, E.; Roberts, G. W.; Meng, X.; Dodson, A. H. (2003) – *The Comparison of Single Frequency and Dual Frequency GPS for Bridge Deflection and Vibration Monitoring*, 11th FIG Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece.
- [104] Crawford, R.; Ward, H. S. (1964) – *Determination of the Natural Period of Buildings*, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 54, N. 6, p. 1743-1756.
- [105] Crawford, C.; Moniz, L. C. (1997) - *Instalação do Caminho de Ferro e Alargamento do Tabuleiro Rodoviário na Ponte Suspensa sobre o Rio Tejo*, RPEE, n.º 41, p. 49-54.
- [106] Crawford, C.; Barbas, J. A. (1997) - *Railroad Addition to Tagus River Bridge*, International Conference NEWTECH 97, LNEC, Lisbon, Portugal.
- [107] CSI (2000) – *SAP2000 – Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures*, Version 7.4, Computers & Structures Inc., Berkeley, USA, (<http://www.csiberkeley.com>).
- [108] Cunha, A. (1990) – *Dinâmica Estrutural Estocástica – Aplicações à Engenharia Sísmica*, Tese de Doutoramento, FEUP, Portugal.
- [109] Cunha, A.; Caetano, E.; Calçada, R.; Delgado, R. (1998) – *Ensaaios Dinâmicos da Ponte Vasco da Gama*, JPEE 98 – Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, LNEC, Lisboa, Portugal.
- [110] Cunha, A.; Caetano, E.; Calçada, R.; Delgado, R. (1999) – *Modal Identification and Correlation with Finite Element Parameters of Vasco da Gama Bridge*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [111] Cunha, A.; Caetano, E. (1999) – *Dynamic Measurements on Stay Cables of Cable-Stayed Bridges Using an Interferometry Laser System*, Experimental Techniques, Vol. 23, N. 3, p. 38-43.
- [112] Cunha, A.; Calçada, R. (1999) – *Ensaio de Vibração Ambiental da Ponte Luiz I*, Sismica 99, 4º Encontro Nacional sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Faro, Portugal.
- [113] Cunha, A.; Caetano, E.; Moutinho, C. (2000) – *Ambient Vibration Data Analysis of Heritage Court Tower. Contribution of University of Porto to IMAC Benchmark*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [114] Cunha, A.; Caetano, E.; Delgado, R. (2001) – *Dynamic Tests on Large Cable-Stayed Bridge*, ASCE Journal of Bridge Engineering, Vol. 6, N. 1, p. 54-62.

D

- [115] Dally, J. W.; Riley, W. F.; McConnell, K. G. (1993) – *Instrumentation for Engineering Measurements*, 2nd edition, John Wiley & Sons, USA.
- [116] Dally, J. W.; Riley, W. F.; Sirkis, J. S. (1993) – *Strain Gages*, em *Handbook on Experimental Mechanics*, editado por A. S. Kobayashi, SEM – Society for Experimental Mechanics, USA.
- [117] Daniell, W. E.; Taylor, C. A. (1998) - *Improved Dynamic Testing Techniques for Validating Numerical Models of Concrete Dams for Seismic Analysis*, 11th ECEE, Paris, France.
- [118] Davenport, A. G. (1994) – *The Consistent Safety of Long Span Bridges Against Wind with Special Reference to “Le Pont de Normandie”*, International Conference on Cable-Stayed and Suspension Bridges, Deauville, France, IABSE.
- [119] Deger, Y.; Cantieni, R.; Piertrsko, S.; Ruecker, W.; Rohrmann, R. G. (1995) - *Modal Analysis of a Highway Bridge: Experiment, Finite Element Analysis and Link*, IMAC XIII, Nashville, USA.
- [120] Delaunay, D.; Grillaud, G.; Biétry, J.; Sacré, C. (1999) – *Wind Response of Long Span Bridges: In situ Measurements and Modal Analysis*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [121] Delgado, R.; Faria, R.; Delgado, J. (1995) – *IC10 – Ponte Sobre o Rio Tejo em Santarém e Acessos Imediatos – Estudo do Comportamento Sísmico*, FEUP, Porto, Portugal.

- [122] Desforges, M. J.; Cooper, J. E.; Wright, J. R. (1995) – *Spectral and Modal Parameter Estimation from Output-Only Measurements*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 9, N. 2, p. 169-186.
- [123] De Roeck, G.; Claesen, W.; Van den Broeck, P. (1995) – *DDS-Methodology Applied to Parameter Identification of Civil Engineering Structures*, Vibration and Noise'95, Venice, Italy.
- [124] De Roeck, G.; Peeters, B.; Ren, W.-X. (2000) – *Benchmark Study on System Identification through Ambient Vibration Measurements*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [125] De Stefano, A.; Ceravolo, R.; Zanon, P. (2002) – *Seismic Assessment of Bell Towers Through Modal Testing*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [126] Dyck, C.; Ventura, C. E. (1998) – *Ambient Vibration Measurements of Heritage Court Tower*, Project EQ 98-007, EQ LAB, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- [127] Douglas, B. M.; Richardson, J. A. (1984) - *Maximum Amplitude Dynamic Tests of a Highway Bridge*, 8th WCEE, San Francisco, USA, Vol. VI, p. 889-896.
- [128] Drei, A.; Oliveira, C. S. (1999) – *Preliminary Study of a Stone Masonry Aqueduct Under Seismic Loading Using Linear Modelling: Application to the Aqueduto da Prata in Évora*, Sismica 99, 4^o Encontro Nacional sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Faro, Portugal.
- [129] Duarte, R. T. (1980) – *Stochastic Earthquake Analysis of Structures with Non-Proportional Damping*, 7th World Conference on Earthquake Engineering.
- [130] Duarte, R. T. (1983) – *Princípios e Métodos da Dinâmica Aplicada à Engenharia de Estruturas*, Seminário 265 – Dinâmica Aplicada (versão preliminar), LNEC, Portugal.

E

- [131] Ebert, M.; Zabel, V.; Bucher, C. (1999) – *Changes of Dynamic Structural Parameters with Progressive Structural Damage*, 13th ASCE Engineering Mechanics Conference, Baltimore, USA.
- [132] EDI, Experimental Dynamic Investigations Ltd. (1995) – *U2, V2 & P2 Manual*, Vancouver, Canada (<http://modena.intergate.ca/business/edi>).
- [133] Ewins, D. J. (2000) – *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, 2nd edition, Research Studies Press Ltd, UK.

F

- [134] Farrar, C. R.; James, G. H. (1997) – *System Identification from Ambient Vibration Measurements on a Bridge*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 205, N. 1, p. 1-18.
- [135] Farrar, C. R.; Doebling, S. W.; Cornwell, P. J.; Straser, E. G. (1997) – *Variability of Modal Parameters Measured on the Alamosa Canyon Bridge*, IMAC XV, Kissimmee, USA.
- [136] Farrar, C. R.; Duffey, T. A.; Cornwell, P. J.; Doebling, S. W. (1999) – *Excitation Methods for Bridge Structures*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [137] Farrar, C. F.; Darling, T. W.; Migliori, A.; Baker, W. E. (1999) – *Microwave Interferometers for Non-Contact Vibration Measurements on Large Structures*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 13, N. 2, p. 241-253.
- [138] Felber, A. (1993) – *Development of a Hybrid Bridge Evaluation System*, PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- [139] Felber, A.; Cantieni, R. (1995) – *Ambient Vibration Testing of Mauvoisin Dam. Preliminary Report. Phase 1: Water level 1849m*, EMPA Report No. 158'992/1, Dübendorf, Switzerland.
- [140] Felber, A.; Cantieni, R. (1995) – *Ambient Vibration Testing of Mauvoisin Dam. Preliminary Report. Phase 2: Water level 1924m*, EMPA Report No. 158'992/2, Dübendorf, Switzerland.

- [141] Felber, A.; Cantieni, R. (1996) – *Introduction of a New Ambient Vibration Testing System – Description of the System and Seven Bridge Tests*, EMPA Report No. 156521, Dübendorf, Switzerland.
- [142] Felber, A.; Cantieni, R. (1996) - *Advances in Ambient Vibration Testing: Ganter Bridge, Switzerland*, Structural Engineering International, Vol. 3, p. 187-190, IABSE.
- [143] Félix, C.; Frazão, O.; Ferreira, L. A.; Araújo, F. M.; Faria, R.; Santos, J. L.; Figueiras, J. A. (2000) – *Aplicações de Sensores de Bragg em Fibra Óptica na Área das Estruturas de Engenharia Civil*, Encontro Nacional Betão Estrutural 2000, FEUP, Porto.
- [144] Félix, C. (2002) – *Monitorização do Comportamento de Estruturas de Betão*, Dissertação apresentada a concurso para Professor Coordenador, ISEP, Porto.
- [145] Feltrin, G. (2002) – *Temperature and Damage Effects on Modal Parameters of a Reinforced Concrete Bridge*, Structural Dynamics - Eurodyn 2002, A. A. Balkema Publishers, Vol. 1, p. 373-378.
- [146] Fernandes, M. (1997) - *Upgrading of Tagus Suspension Bridge – Lisbon, Portugal*, International Conference NEWTECH 97, LNEC, Lisbon, Portugal.
- [147] Ferreira, P. (2001) – *Identificação Modal com Vibração Ambiente. Contributo para a Avaliação da Vulnerabilidade Sísmica do Corpo 4 do Hospital de Santa Maria*, Tese de Mestrado, IST, Portugal.
- [148] Fertis, D. G. (1973) - *Dynamics and Vibration of Structures*, Wiley-Interscience, New York.
- [149] Fialho, J. L. (1969) – *Análise Experimental de Tensões*, Curso 103, LNEC.
- [150] Fib (2003) – *Monitoring and Safety Evaluation of Existing Concrete Structures*, State of the Art Report prepared by Task Group 5.1, Fib (CEB-FIP) - Bulletin 22.
- [151] Fujino, Y.; Abe, M. (2002) – *Vibration Based Health Monitoring of Bridges Using Ambient Motion*, Structural Dynamics - Eurodyn 2002, A. A. Balkema Publishers, Vol. 1, p. 69-80.
- [152] Fukuzono, K. (1986) - Investigation of Multiple-Reference Ibrahim Time Domain Modal Parameter Estimation Technique, M. S. Thesis, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati.
- [153] Frias, F.; Moura, R.; Appleton, J. (2002) – *Reparação da Ponte da Arrábida sobre o Rio Douro – Porto*, Congresso Nacional da Engenharia de Estruturas, Lisboa, Portugal.
- [154] Friswell, M. I.; Mottershead, J. E. (1995) – *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Solid Mechanics and its Applications, Kluwer Academic Publishers.
- [155] Fryba, L. (1996) - *Dynamics of Railway Bridges*, Thomas Telford, London, 1st edition.
- [156] Fryba, L. (1999) - *Vibrations of Solids and Structures under Moving Loads*, Thomas Telford, London, 3rd edition.

G

- [157] Gates, J. H.; Smith, M. J. (1984) - *Results of Ambient Vibration Testing of Bridges*, 8th WCEE, San Francisco, USA, Vol. VI, p. 873-880.
- [158] Genatios, C.; Garcés, F.; Lafuente, M.; Bellan, P.; Lorrain, M. (1998) - *Direct Matrix Identification in Structural Dynamics*, 11th ECEE, Paris, France.
- [159] Genatios, C.; Lafuente, M.; Garcés, F.; Morales, S.; Bellan, P.; Lorrain, M. (1998) - *On the Evaluation of Structural Dynamic Properties and Model Adjustment: Practical and Numerical Considerations*, 11th ECEE, Paris, France.
- [160] Genovese, F.; Vestroni, F. (1998) - *Identification of Dynamic Characteristics of a Masonry Building*, 11th ECEE, Paris, France.
- [161] Gentile, C.; Martinez y Cabrera, F.; Saisi, A. (1998) - *Dynamic Testing and Seismic Response of a Cable-Stayed Bridge*, 11th ECEE, Paris, France.

- [162] GeoSys (1995) - *GSR-12 / GSR-16 Operation Manual. Close View User's Manual*, GeoSys AG, Switzerland.
- [163] Gersch, W.; Nielsen, N. N.; Akaike, H. (1973) – *Maximum Likelihood Estimation of Structural Parameters from Random Vibration Data*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, N. 3, p. 295-308.
- [164] Gersch, W.; Liu, R. S.-Z. (1976) – *Time Series Methods for Synthesis of Random Vibration Systems*, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, N. 1, p. 159-165.
- [165] Ghanem, R.; Shinozuka, M. (1995) – *Structural-System Identification. I: Theory*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121, N. 2, p. 255-264.
- [166] Giorcelli, E.; Fasana, A.; Garibaldi, L.; Riva, A. (1994) – *Modal Analysis and System Identification Using ARMAV Models*, IMAC XII, Honolulu, USA.
- [167] Gousart, M.; Basseville, M.; Benveniste, A.; Mevel, L. (2000) – *O2MAD: A SCILAB Toolbox for Output Only Modal Analysis and Diagnosis*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [168] Greenberg, M. D. (1978) – *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall Inc., USA.
- [169] Guerreiro, L.; Azevedo, J. (1998) – *Reabilitação e Reforço da Torre do Relógio em Santarém*, JPEE 98 – Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, LNEC, Lisboa, Portugal.
- [170] Guillaume, P.; Hermans, L.; Van der Auweraer (1999) – *Maximum Likelihood Identification of Modal Parameters from Operational Data*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [171] Guyan, R. J. (1965) – *Reduction of Stiffness and Mass Matrices*, AIAA Journal, Vol. 3, N. 2, p. 380.

H

- [172] Harik, I. E.; Allen, D. L.; Street, R. L.; Guo, M.; Graves, R. C.; Harison, J.; Gawry, M. J. (1997) - *Free and Ambient Vibration of Brent-Spence Bridge*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 123, N. 9, p. 1262-1268.
- [173] Harik, I. E.; Allen, D. L.; Street, R. L.; Guo, M.; Graves, R. C.; Harison, J.; Gawry, M. J. (1997) - *Seismic Evaluation of Brent-Spence Bridge*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 123, N. 9, p. 1269-1275.
- [174] Hart, G. C.; Yao, J. T. P. (1977) – *System Identification in Structural Dynamics*, ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 103, N. EM6, p. 1089-1104.
- [175] Hearn, G.; Testa, R. B. (1991) – *Modal Analysis for Damage Detection in Structures*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 117, N. 10, October, p. 3042-3063.
- [176] Hermans, L.; Van der Auweraer, H. (1998) – *Modal Testing and Analysis of Structures Under Operational Conditions: Industrial Applications*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 13, N. 2, p. 193-216.
- [177] Hermans, L.; Brughmans, M.; Van der Auweraer, H.; Mevel, L. (1999) – *Damage Detection of a Concrete Three-Span Bridge: A Case Study*, Integrating Dynamics, Condition Monitoring and Control for the 21st Century – DYMAC 99, A. A. Balkema Publishers, p. 567-573.
- [178] Heylen, W.; Lammens, S.; Sas, P. (1997) – *Modal Analysis Theory and Testing*, Department of Mechanical Engineering, K. U. Leuven, Belgium.
- [179] Higashihara, H.; Moriya, T.; Tajima, J. (1987) - *Ambient Vibration Test of an Anchorage of South Bisan-Seto Suspension Bridge*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15, p. 679-695.
- [180] Ho, B. L.; Kalman, R. E. (1966) – *Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Data*, Regelungstechnik, 14, p. 545-548.
- [181] Horyna, T.; Ventura, C. E. J. (2000) – *Summary of HCT Building Ambient Vibration Data Analyses*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.

- [182] Houbolt, J. C. (1975) – *On Identifying Frequencies and Damping in Subcritical Flutter Testing*, Proceedings of the NASA Symposium on Flutter Testing Techniques, Edwards, California, USA, NASA SP-415, p. 1-41.
- [183] Huan, S.-L.; McInnis, B. C.; Denman, E. D. (1983) – *Identification of Structural Systems using Naturally Induced Vibration Data in the Presence of Measurement Noise*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, N. 41, p. 123-128.
- [184] Hung, C.-F.; Ko, W.-J.; Peng, Y.-T. (2003) – *Identification of Dynamic Characteristics of Structures Using Vector Backward Auto-Regressive Model*, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 15, N. 3, p. 299-314.
- [185] Huth, O.; Feltrin, G.; Ulfkjaer, J. P.; Kilic, N. (2003) – *Model Update and Damage Identification on a Prestressed Concrete Bridge Using Modal Parameters and Projective Input Residuals*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.

I

- [186] Ibrahim, S. R.; Mikulcik, E. C. (1977) – *A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free Response*, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, N. 4, p. 183-198.
- [187] Ibrahim, S. R. (1977) - *Random Decrement Technique for Modal Identification of Structures*, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, N. 11, p. 696-700.
- [188] Ibrahim, S. R. (1977) – *The Use of Random Decrement Technique for Identification of Structural Modes of Vibration*, AIAA paper, Vol. 77, p. 1-9.
- [189] Ibrahim, S. R. (1979) – *Application of Random Time Domain Analysis to Dynamic Flight Measurements*, The Shock and Vibration Bulletin, N. 49, Part 2 of 3, p. 165-170.
- [190] Ibrahim, S. R.; Brincker, R.; Asmussen, J. C. (1996) – *Modal Parameter Identification from Responses of General Unknown Random Inputs*, IMAC XIV, Dearborn, USA.
- [191] Ibrahim, S. R.; Asmussen, J. C.; Brincker, R. (1997) – *Vector Triggering Random Decrement for Higher Identification Accuracy*, IMAC XV, Kissimmee, USA.
- [192] Ibrahim, S. R. (2001) – *Efficient Random Decrement Computation for Identification of Ambient Responses*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- [193] IEEE (1997) – *Standard for a Smart Transducer Interface for Sensors and Actuators – Transducer to Microprocessor Communication Protocols and Transducer Electronic Data Sheet (TEDS) Formats*, IEEE Standard 1451.2-1997.
- [194] Imregun, M.; Visser, W. (1990) – *A Review of Model Updating Techniques*, Shock and Vibration, Vol. 23, N. 1.

J

- [195] James, G. H.; Carne T. G.; Lauffer J. P.; Nard, A. R. (1992) – *Modal Testing Using Natural Excitation*, IMAC X, San Diego, USA.
- [196] James, G. H.; Carne T. G.; Lauffer J. P. (1995) - *The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction from Operating Structures*. Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 10, N. 4, p. 260-277.
- [197] James, G. H.; Zimmerman, D. C.; Chhipwadia, K. S. (1999) – *Application of Autonomous Modal Identification to Traditional and Ambient Data Sets*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [198] Jennings, P. C.; Matthiesen, R. B.; Hoerner, J. B. (1972) - *Forced Vibration of a Tall Steel-Frame Building*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, p. 107-132.

- [199] Juang, J.-N.; Pappa, R. S. (1985) - *An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, N. 4, p. 620-627.
- [200] Juang, J.-N.; Pappa, R. S. (1986) - *Effects of Noise on Modal Parameters Identified by the Eigensystem Realization Algorithm*, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, N. 3, p. 294-303.
- [201] Juang, J.-N. (1987) - *Mathematical Correlation of Modal Parameter Identification Methods via System Realization Theory*, International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 2, N. 1.
- [202] Juang J.-N. (1994) - *Applied System Identification*. Prentice Hall, USA.

K

- [203] Kaito, K.; Abe, M.; Fujino, Y. (2001) - *An Experimental Modal Analysis for RC Bridge Decks Based on Non-Contact Vibration Measurement*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- [204] Kalman, R. E.; Bucy, R. S. (1961) - *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*, Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Series D, Vol. 83, p. 95-108.
- [205] Kamaris, D.; Lenzen, A.; Waller, H. (1997) - *Realization of Multi-Correlated Random Excitations of Structures*, Aspects in Modern Computational Structural Analysis, editado por Meskouris e Wittek, A. A. Balkema Publishers.
- [206] Kamaris, D.; Lenzen, A.; Waller, H. (2002) - *Monitoring of Building Structures by New Methods of Vibration Analysis*, Structural Dynamics - Eurodyn 2002, A. A. Balkema Publishers, Vol. 1, p. 281-286.
- [207] Kammer, D. (1992) - *Effect of Model Error on Sensor Placement for On-Orbit Modal Identification of Large Space Structures*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, N. 2, p. 334-341.
- [208] Karolys, A.; Pender, G. (1989) - *Present and Future of Acceleration and Pressure Measurement Systems*, 40th Annual Earthmoving Industry Conference (<http://www.endevco.com/main/literature>).
- [209] Kato, M.; Shimada, S. (1986) - *Vibration of PC Bridge during Failure Process*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 12, No. 7, July, p. 1692-1703.
- [210] Kidder, R. (1973) - *Reduction of Structural Frequency Equations*, AIAA Journal, Vol. 11, N. 6, p. 892.
- [211] Kijewski-Correa, T.; Kareem, A. (2003) - *The Height of Precision*, GPS World, September 2003, (<http://www.gpsworld.com>).
- [212] Kinemetrics (2000) - *EpiSensor Force Balance Accelerometer - Model FBA ES-U. User Guide*, Kinemetrics Inc., USA (<http://www.kinemetrics.com>).
- [213] Kirkegaard, P. H.; Sorensen, J. D.; Brincker, R. (1991) - *Optimal Design of Measurement Programs for the Parameter Identification of Dynamic Systems*, IMAC IX, Florence, Italy.
- [214] Kirkegaard, P. H.; Andersen, P. (1997) - *State Space Identification of Civil Engineering Structures from Output Measurements*, IMAC XV, Kissimmee, USA.
- [215] Konig, G.; Giegerich, G. (1989) - *Identification of Structural Properties Using Dynamic Tests*, IABSE Symposium on "Durability of Structures", Lisboa, Portugal, IABSE Report 57/2.
- [216] Kozin, F.; Natke, H. G. (1986) - *System Identification Techniques*, Structural Safety, Vol. 3, p. 269-316.
- [217] Kramer, C.; De Smet, C. A. M.; Peeters, B. (1999) - *Comparison of Ambient and Forced Vibration Testing of Civil Engineering Structures*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [218] Kulla, J. (2000) - *System Identification of Heritage Court Tower Using Stochastic Subspace Method*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [219] Kung, S. Y. (1978) - *A New Identification and Model Reduction Algorithm via Singular Value Decomposition*, 12th Conference on Circuits, Systems and Computers, Asilomar, USA.

L

- [220] Lamarche, C.-L.; Mosseau, S.; Paultre, P.; Proulx, J. (2004) – *A Comparison of Ambient and Forced-Vibration Testing of a Full Scale Concrete Structure*, IMAC XXII, Dearborn, USA.
- [221] Laub, A. (1979) – *A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-24, p. 913-921.
- [222] Leica (1999) – *GPS Basics - Introduction to GPS (Global Positioning System)*, Leica Geosystems AG, Switzerland, (<http://www.leica-geosystems.com>).
- [223] Lekidis, V. A.; Karakostas, C. Z.; Talaslidis, D. G. (1998) - *Dynamic Characteristics of the Cable-Stayed Bridge in Evripos Channel, Greece*, 11th ECEE, Paris, France.
- [224] Lenett, M. S.; Helmicki, A. J.; Hunt, V. J. (2000) – *Multi-Reference Impact Testing of FRP Bridge Deck Material*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [225] Lenett, M. S.; Brown, D. L.; Hunt, V. J.; Helmicki, A. J. (2000) – *Performing Bridge Condition Assessment with Sliced Multi-Reference Impact Data*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [226] Lenzen, A.; Waller, H. (1996) – *Damage Detection by System Identification – An Application of the Generalized Singular Value Decomposition*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 66, N. 8, p. 555-568.
- [227] Lenzen, A. (1997) – *Damage Detection of Dynamical Systems by SVD and Influence Coefficients*, 12th ASME Biennial Conference on Reliability, Stress Analysis and Failure Prevention and the 51st Meeting of the Society for Machinery Failure Prevention Technology, Virginia Beach, USA.
- [228] Lenzen, A.; Waller, H. (1997) – *Identification Using the Algorithm of Singular Value Decomposition – An Application to the Realisation of Dynamic Systems and to Fault Detection and Localization*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 11, N. 3, p. 441-458.
- [229] Leuridan, J. (1984) – *Some Direct Parameter Model Identification Methods Applicable for Multiple Input Modal Analysis*, PhD Thesis, University of Cincinnati.
- [230] Leuridan, J.; Brown, D. L.; Allemang, R. J. (1985) – *Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis*, ASME Paper Number 85-DET-90.
- [231] Levenberg, K. (1944) – *A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares*, Quarterly Applied Mathematics, Vol. 2, p. 261-278.
- [232] Lienhart, W.; Brunner, F. K. (2003) – *Monitoring of Bridge Deformations Using Embedded Fiber Optical Sensors*, 11th FIG Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece.
- [233] Lieven, N.; Ewins, D. J. (1988) – *Spatial Correlation of Mode Shapes – The Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC)*, IMAC VI, Kissimmee, USA.
- [234] Lipkens, J.; Vandeurzen, U. (1987) – *The Use of Smoothing Techniques for Structural Modification Applications*, 12th International Seminar on Modal Analysis, paper C1-3, Leuven, Belgium.
- [235] Littler, J. D. (1995) – *An Assessment of Some of the Different Methods for Estimating Damping from Full-Scale Testing*, Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, N. 57, p. 179-189.
- [236] Ljung, L. (1999) – *System Identification – Theory for the User*, 2nd edition, Prentice Hall, USA.
- [237] Ljung, L. (2001) – *System Identification Toolbox – For Use with MatLab*, User's Guide, Version 5, MathWorks Inc., (<http://www.mathworks.com>).
- [238] Lynch, J. P.; Sundararajan, A.; Law, K. H.; Kiremidjian, A. S.; Kenny, T.; Carryer, E. (2003) – *Embedment of Structural Monitoring Algorithms in a Wireless Sensing Unit*, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 15, N. 3, p. 285-297.

M

- [239] Madiseti, V. K.; Williams, D. B. (1998) – *The Digital Signal Processing Handbook*, CRC Press, USA.
- [240] Maia, N.; Silva, J. M.; He, J.; Lieven, N.; Lin, R.; Skingle, G.; To, W. M. Urgueira, A. (1998) – *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, editado por N. Maia e J. M. Silva, Research Studies Press, England.
- [241] Maia, N. (2002) – *Introdução à Dinâmica Analítica*, IST Press, Portugal.
- [242] Marecos, J.; Castanheta, M.; Trigo, J. T. (1969) – *Field Observation of the Tagus River Suspension Bridge*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 95, N. ST4, p. 555-583.
- [243] Marecos, J. (1973) - *Long Time Observation of the Arrábida Bridge. Fifteen Years of Activity*, Matériaux et Constructions, Vol. 6, N° 31.
- [244] Marioti, A.; Duarte, P. (1999) – *A Utilização de Aparelhos de Apoio de Elevado Amortecimento para Protecção das Estruturas dos Efeitos Sísmicos*, Sísmica 99, 4º Encontro Nacional sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Faro, Portugal.
- [245] Marquardt, D. W. (1963) – *An Algorithm for Least Squares Estimation on Non-Linear Parameters*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 11, p. 431-441.
- [246] Mason, A. H.; Carder, D. S. (1967) – *Vibration Frequencies of the Chesapeake Bay Bridge*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 93, N. ST2, p. 237-245.
- [247] MathSoft (1997) – *Mathcad 7 Professional*, MathSoft Inc., (<http://www.mathsoft.com>).
- [248] MathWorks (2000) – *MATLAB The Language of Technical Computing*, Version 6, MathWorks Inc., (<http://www.mathworks.com>).
- [249] McLamore, V. R.; Hart, G. C.; Stubbs, I. R. (1971) – *Ambient Vibration of Two Suspension Bridges*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 97, N. ST10, p. 2567-2582.
- [250] Mendes, P. (2004) – *Observação e Análise do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão sob Excitação Ambiente*, Tese de Mestrado, IST, Portugal (em desenvolvimento).
- [251] Meng, X.; Roberts, G. W.; Cosser, E.; Dodson, A. H. (2003) – *Real-Time Deflection and Vibration Monitoring Using an Integrated GPS/Accelerometer/Pseudolite System*, 11th FIG Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece.
- [252] Mohanty, P.; Rixen, D. J. (2003) – *Accounting for Harmonic Excitations in Operational Modal Analysis*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [253] Mottershead, J. E.; Friswell, M. I. (1993) - *Model Updating in Structural Dynamics: A Survey*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 167, N. 2, p. 347-375.
- [254] Murià-Vila, D.; Gómez, R.; King, C. (1991) - *Dynamic Structural Properties of Cable-Stayed Tampico Bridge*, ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 117, N. 11, p. 3396-3416.
- [255] Myrvoll, F.; DiBiagio, E.; Hansvold, C. (1994) - *Instrumentation for Monitoring the Skarnsundet Cable-Stayed Bridge*, Strait Crossings 94, A. A. Balkema Publishers.

N

- [256] Naito, Y.; Ishibashi, T. (1996) - *Identification of Structural Systems from Microtremors and Accuracy Factors*, 11th WCEE, Acapulco, México, N. 770.
- [257] Nakamura, S.; Sakamoto, Y.; Fujino, Y.; Yanagihara, M. (1999) – *Monitoring of Displacements on Suspension Bridges Using GPS*, IABSE Symposium, Rio de Janeiro, p. 459-466.
- [258] Nakamura, S.; Fujino, Y. (2002) – *Lateral Vibration on a Pedestrian Cable-Stayed Bridge*, Structural Engineering International 4/2002, p. 295-300.

- [259] National Instruments (1998) – *LabView Reference Manual's*, Version 6i, National Instruments Corporation, (<http://www.natinst.com>).

O

- [260] O'Callahan, J., Avitable, P., Riemer, R. (1989) – *System Equivalent Reduction Expansion Process*, IMAC VII, Las Vegas, USA.
- [261] O'Callahan, J. (1989) – *A Procedure for an Improved Reduced System Model*, IMAC VII, Las Vegas, USA.
- [262] Oliveira, C. S. (1997) – *Frequências Próprias de Estruturas com base em Medições Expeditas in situ*, 3º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, IST, Lisboa.
- [263] Oliveira, C. S.; Lucas, A. (1997) – *Estudos Experimentais e Analíticos para o Comportamento Sísmico de Reservatórios Elevados de Água*, 3º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, IST, Lisboa.
- [264] Oliveira, S.; Rodrigues, J.; Mendes, P.; Campos Costa, A. (2003) – *Monitorização e Modelação do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão*, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora.
- [265] Orfanidis, S. J. (1996) – *Optimum Signal Processing. An Introduction*, 2nd edition, Prentice-Hall, USA.

P

- [266] Pandit, S. M. (1991) – *Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space*, John Wiley & Sons, New York, USA.
- [267] Papadimitriou, C.; Karamanos, S. A.; Christodoulou, K.; Pavlidou, M.; Lekidis, V. A.; Karaskostas, C. Z. (2002) – *Model Updating of Bridges Using Vibration Measurements*, 12th ECEE, London, UK.
- [268] Parloo, E.; Vanlanduit, S.; Guillaume, P.; Verboven, P. (2002) – *Increased Reliability of Reference-Based Damage Identification Techniques by Using Output-Only Data*, International Conference on Structural Dynamics Modelling, Funchal, Madeira, Portugal.
- [269] Parloo, E.; Verboven, P.; Guillaume, P.; Van Overmeire, M. (2002) – *Sensitivity-Based Operational Mode Shape Normalization*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 16, N. 5, p. 757-767.
- [270] Paultre, P.; Chaallal, O.; Proulx, J. (1992) - *Bridge Dynamics and Dynamic Amplification Factors - A Review of Analytical and Experimental Findings*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 19, p. 260-278.
- [271] Paultre, P.; Proulx, J.; Talbot, M. (1995) - *Dynamic Testing Procedures for Highway Bridges Using Traffic Loads*, Journal of Structural Engineering, Vol. 121, N. 2, p. 362-376, ASCE.
- [272] Paultre, P.; Proulx, J. (1997) - *Dynamic Testing of Large Scale Structures*, Structural Engineering International, Vol. 1, p. 29-34, IABSE.
- [273] PCB Piezotronics (1999) – *Piezoelectric ICP Strain Sensor - General Operating Guide*.
- [274] Peeters, B.; De Roeck, G.; Andersen, P. (1999) – *Stochastic System Identification: Uncertainty of the Estimated Modal Parameters*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [275] Peeters, B.; Van den Branden, B.; Laquière, A.; De Roeck, G. (1999) – *Output-only Modal Analysis: Development of a GUI for MATLAB*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [276] Peeters, B. (2000) - *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*, PhD Thesis, Department of Civil Engineering, K. U. Leuven, Belgium.
- [277] Peeters, B.; De Roeck, G. (2000) – *One Year Monitoring of the Z24-Bridge: Environmental Influences versus Damage Events*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.

- [278] Peeters, B.; De Roeck, G.; Caetano, E.; Cunha, A. (2002) – *Dynamic Study of the Vasco da Gama Bridge*, ISMA 2002 – International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium.
- [279] Peeters, B.; Couvreur, G.; Razinkov, O.; Kundig, C.; Van der Auweraer, H.; De Roeck, G. (2003) – *Continuous Monitoring of the Oresund Bridge: System and Data Analysis*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [280] Pi, Y. L.; Mickleborough, N. C. (1989) – *Modal Identification of Vibrating Structures Using ARMA Models*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, N. 10, p. 2232-2250.
- [281] Piombo, B. A. D.; Giorcelli, E.; Garibaldi, L.; Fasana, A. (1993) – *Structures Identification Using ARMAV Models*, IMAC XI, Kissimmee, USA.
- [282] Piombo, B. A. D.; Garibaldi, L.; Giorcelli, E.; Marchesiello, S. (2000) – *CVA-ARMAV Capabilities Comparison over the Heritage Court Tower Data*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [283] Portugal, A. (1990) - *Caracterização do Comportamento Dinâmico de Barragens de Betão através de Ensaio In Situ*, Tese de Mestrado, IST, Portugal.
- [284] Portugal, A.; Caetano, E. (1990) – *Experimental Evaluation of the Dynamic Characteristics of Portuguese Dams*, 10th WCEE, Madrid, Espanha, Vol. 6, p. 3579-3584.
- [285] Pretlove, A. J.; Rainer, J. H. (1991) – *Human Response to Vibrations, Vibration Problems in Structures – Practical Guidelines*, CEB - Bulletin d'Information N. 209, p. 231-235.
- [286] Prevosto, M. (1982) – *Algorithmes d'Identification des Caractéristiques Vibratoires de Structures Mécaniques Complexes*, PhD Thesis, Université de Rennes I, France.
- [287] Prevosto, M.; Olagnon, M.; Benveniste, A.; Basseville, M.; Le Vey, G. (1991) – *State-Space Formulation: A Solution to Modal Parameter Estimation*, Journal of Sound and Vibration, Vol. 148, N. 2, p. 329-342.
- [288] Pridham, B. A.; Wilson, J. C. (2002) – *Subspace Identification of Vincent Thomas Suspension Bridge Ambient Vibration Data*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [289] Pridham, B. A.; Wilson, J. C. (2003) – *An Application Example Illustrating the Practical Issues of Subspace Identification*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [290] Prion, H. G. L.; Rezai K., M. (1996) - *Damage Detection by Modal Testing*, 11th WCEE, Acapulco, Mexico, N. 459.
- [291] Proença, J. (1989) - *Identificação Dinâmica de Sistemas Estruturais - Técnicas Experimentais e Analíticas*, Tese de Mestrado, IST, Portugal.

R

- [292] Rainer, J. H.; Van Selst, A. (1977) – *Dynamic Properties of a Suspension Bridge*, 6th WCEE, Meerut, India, Vol. III, p. 2835-2842.
- [293] Randall, R. B. (1987) – *Frequency Analysis*, Bruel & Kjaer.
- [294] Ravara, A. (1969) – *Dinâmica de Estruturas*, Curso 111, LNEC, Portugal.
- [295] Rayleigh, J. W. (1894) - *The Theory of Sound*, reedição de 1945, Dover Publications Inc., New York, USA.
- [296] Ribeiro, M. I. (2002) – *Análise de Sistemas Lineares*, IST Press, Portugal.
- [297] Richardson, M. H. (1997) – *Is it a Mode Shape, or an Operating Deflection Shape?*, Sound & Vibration Magazine 30th Anniversary Issue.
- [298] Ristic, D.; Zdravkovic, S.; Milicevic, M.; Drenic, D.; Zlatkov, D. (1998) - *Experimental Dynamic Investigation of Industrial Halls in the Full Scale*, 11th ECEE, Paris, France.
- [299] Rito, A.; Appleton, J. (2000) – *Inspecção e Reabilitação da Ponte da Figueira da Foz e dos Viadutos de Acesso*, REPAR 2000 - Encontro Nacional sobre Conservação e Reabilitação de Estruturas, LNEC, Portugal.

- [300] Robert, J.-L.; Bruhat, D.; Gervais, J.-P. (1991) – *Mesure de la tension des cables par méthode vibratoire*, Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussées, n. 173, Mai-Juin.
- [301] Rodrigues, J.; Campos Costa, A.; Sousa, M. L. (1997) – *Caracterização Dinâmica Experimental da Ponte da Arrábida na Cidade do Porto*, 3º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Lisboa, Portugal.
- [302] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1997) – *Caracterização Dinâmica Experimental da Ponte da Figueira da Foz*, 3º Encontro sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Lisboa, Portugal.
- [303] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1998) – *Caracterização Dinâmica de Estruturas de Pontes com Base em Ensaios de Vibrações Ambiente*, RPEE N. 44, LNEC, Portugal.
- [304] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1998) – *Experimental Modal Analysis of Bridge Structures. Case Studies*, 11th ECEE, Paris, France.
- [305] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1999) – *Caracterização Dinâmica Experimental da Ponte Miguel Torga*, Sísmica 99, 4º Encontro Nacional sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Faro, Portugal.
- [306] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1999) – *Modal Analysis from Ambient Vibration Survey of Bridges: LNEC Experience*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- [307] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1999) – *Caracterização Dinâmica Experimental da Ponte Miguel Torga*, 4º Encontro Nacional sobre Sismologia e Engenharia Sísmica, Faro, Portugal.
- [308] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (2000) – *Dynamic Characterization Tests of the Tagus River Suspension Bridge*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [309] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (2000) – *Heritage Court Tower: Ambient Vibration Data Analysis and Model Correlation Studies Developed at LNEC*, (apresentação oral), IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [310] Rodrigues, J. (2001) – *Dynamic Tests of the Santarém Cable-Stayed Bridge*, IMAC – XIX, Kissimmee, USA.
- [311] Rodrigues, J. (2001) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Passagem Superior PS17 da Auto-Estrada A-14*, 4º Encontro Nacional de Análise Experimental de Tensões e Mecânica Experimental, Bragança, Portugal.
- [312] Rodrigues, J. (2001) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Passagem Superior PS17 da Auto-Estrada A-14*, Mecânica Experimental, Revista da APAET, N. 6, p. 19-27.
- [313] Rodrigues, J. (2002) – *Dynamic Performance of a Steel Truss Bridge Under Railway Traffic*, IMAC – XX, Los Angeles, USA.
- [314] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (2002) – *Dynamic Tests of the Structure for Extension of the Madeira Island Airport*, IMAC – XX, Los Angeles, USA.
- [315] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (2002) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Estrutura de Ampliação do Aeroporto da Ilha da Madeira*, Congresso Nacional da Engenharia de Estruturas, Lisboa, Portugal.
- [316] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (2002) – *Caracterização Dinâmica da Ponte 25 de Abril com Base em Ensaios de Medição de Vibrações Ambiente*, Congresso Nacional da Engenharia de Estruturas, Lisboa, Portugal.
- [317] Rodrigues, J. (2002) – *Dynamic Characterization Tests of a Viaduct in Lisbon*, Eurodyn 2002, 5th European Conference on Structural Dynamics, Munich, Germany.
- [318] Rodrigues, J. (2002) – *Dynamic Behaviour of Canelas Bridge Under Railway Traffic*, Eurodyn 2002, 5th European Conference on Structural Dynamics, Munich, Germany.
- [319] Rodrigues, J.; (2002) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Ponte Salgueiro Maia*, Encontro Nacional Betão Estrutural 2002, Lisboa, Portugal.

- [320] Rohrmann, R. G.; Baessler, M.; Said, S.; Schmid, W.; Ruecker, W. F. (2000) – *Structural Causes of Temperature Affected Data of Civil Structures Obtained by Long Term Monitoring*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [321] Rosa, C. M. (1974) – *Aparelhagem para Observação de Obras – Técnicas de Montagem e Utilização*, LNEC.
- [322] RSA (1984) – *Regulamento de Segurança e Acções para Estruturas de Edifícios e Pontes*, Decreto-Lei N.º 235/83, de 31 de Maio, INCM, Lisboa.
- [323] RSEP (1961) – *Regulamento de Solicitações em Edifícios e Pontes*, Decreto-Lei N.º 44041, de 18 de Novembro.
- [324] Rytter, A. (1993) – *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*, PhD Thesis, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark.

S

- [325] Safak, E. (1989) – *Adaptive Modelling, Identification and Control of Dynamic Structural Systems. I: Theory*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, N. 11, p. 2386-2405.
- [326] Safak, E. (1989) – *Adaptive Modelling, Identification and Control of Dynamic Structural Systems. II: Applications*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, N. 11, p. 2406-2426.
- [327] Saito, Y.; Hoshiya, M. (1996) - *Identification of M, C and K of a Multiple Degree of Freedom System*, 11th WCEE, Acapulco, México, N. 60.
- [328] Salawu, O. S. (1997) – *Detection of Structural Damage Through Changes in Frequency: A Review*, Engineering Structures, Vol. 19, N. 9, p. 718-723.
- [329] Sánchez, J. J. S.; Escobar, J. A.; Gómez M., R. (1998) - *Structural Damage Detection in 3D Building Models*, 11th ECEE, Paris, France.
- [330] Schultze, J. F.; Hunter, N. (2002) – *Evaluation of Signal Processing Techniques for the Analysis of Large Civil Structures*, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [331] Schwarz, B. J.; Richardson, M. H. (1999) – *Introduction to Operating Deflection Shapes*, CSI Reliability Week, Orlando, USA.
- [332] Schwarz, B. J.; Richardson, M. H. (2003) – *Scaling Mode Shapes Obtained from Operating Data*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [333] Sestieri, A.; D'Ambrogio, W. (2003) – *Frequency Response Function Versus Output-Only Modal Testing Identification*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- [334] Shih, C. Y.; Tsuei, Y. G.; Allemang, R. J.; Brown, D. L. (1988) – *Complex Mode Indication Function and its Application to Spatial Domain Parameter Identification*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 2, N. 4, p. 367-377.
- [335] Shinozuka, M.; Ghanem, R. (1995) – *Structural-System Identification. II: Experimental Verification*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol. 121, N. 2, p. 265-273.
- [336] Skrinar, M.; Strukelj, A. (1996) – *Eigenfrequency Monitoring during Bridge Erection*, Structural Engineering International, Vol. 3, p. 191-194, IABSE.
- [337] Soderstrom, T.; Stoica, P. (1989) – *System Identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [338] Spina, D.; Lamonaca, B. G. (1998) - *Strengthening Assessment of Buildings Using Ambient Vibration Tests*, 11th ECEE, Paris, France.
- [339] Spitznogle, F. R.; Quazi, A. H. (1970) – *Representation and Analysis of Time-Limited Signals Using a Complex Exponential Algorithm*, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 47, N. 5 (Part 1), p. 1150-1155.

- [340] Stiemer, S. F.; Taylor, P.; Vincent, D. H. C. (1988) - *Full Scale Dynamic Testing of the Annacis Bridge*, IABSE Periodica, Vol. 1, p. 1-16.
- [341] SVS (2002) – *ARTeMIS Extractor - Version 3.1*, Structural Vibration Solutions ApS, Aalborg, Denmark (<http://www.svibs.com>).

T

- [342] Tan, R. Y.; Liu, H. (1996) - *System Identification of a Long-Span Bridge*, 11th WCEE, Acapulco, Mexico, N. 239.
- [343] Tasev, S. G. (1998) - *A Method for Determination of the Dynamic Characteristics of Concrete Dams Using Combined Field Tests and Numerical Investigations*, 11th ECEE, Paris, France.
- [344] Tashkov, L. J.; Krstevska, L. (1998) - *Ambient Vibration Measurements of a RC Silo for Grain Storage in Skopje*, 11th ECEE, Paris, France.
- [345] Torkamani, M. A. M.; Ahmadi, K. Ahmad (1988) - *Stiffness Identification of Two- and Three-Dimensional Frames*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 16, p. 1157-1176.
- [346] Torkamani, M. A. M.; Ahmadi, K. Ahmad (1988) - *Stiffness Identification of a Tall Building During Construction Period Using Ambient Tests*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 16, p. 1177-1188.
- [347] Torres, J. A. (2003) – *Observação Contínua GPS na Monitorização de Estruturas*, Encontro Nacional de Geodesia Aplicada, LNEC, Lisboa.
- [348] Trifunac, M. D. (1972) - *Comparisons Between Ambient and Forced Vibration Experiments*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, p. 133-150.
- [349] Tsakiri, M.; Lekidis, V.; Stewart, M.; Karabelas, J. (2003) – *Testing Procedures for the Monitoring of Seismic Induced Vibrations on a Cable-Stayed Highway Bridge*, 11th FIG Symposium on Deformation Measurements, Santorini, Greece.

U

- [350] UIC (1976) – *Code UIC 776-2 R – Ponts pour Grandes et Tres Grandes Vitesses*, 1e édition.
- [351] UIC (1979) – *Code UIC 776-3 R – Déformations des Ponts*, 3e édition.
- [352] UIC (1994) – *Code UIC 776-1 R – Charges à Prendre en Considération Dans le Calcul des Ponts-Rails*, 4e édition.

V

- [353] Van der Auweraer (2001) – *Structural Dynamics Modelling Using Modal Analysis: Applications, Trends and Challenges*, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Budapest, Hungary.
- [354] Van der Auweraer, H; Peeters, B. (2002) – *Sensors and Systems for Structural Health Monitoring*, Proceedings of Cooperative US-Europe Research in Sensors and Smart Structures Technology, Como, Italy.
- [355] Vandiver, J. K.; Dunwoody, A. B.; Campbell, R. B., Cook, M. F. (1982) – *A Mathematical Basis for the Random Decrement Vibration Signature Analysis Technique*, Journal of Mechanical Design, Vol. 104, p. 307-313.
- [356] Van Gysel, E.; De Roeck, G. (2002) – *Estimation of Cable Tension from Vibrations: Influence of Bending Stiffness and Boundary Conditions on Eigenfrequencies and Eigenmodes*, IMAC – Project Report.
- [357] Van Overschee, P.; De Moor, B. (1991) - *Subspace Algorithm for the Stochastic Identification Problem*, 30th IEEE Conference on Decision and Control, Brighton, UK.

- [358] Van Overschee, P.; De Moor, B. (1993) - *Subspace Algorithm for the Stochastic Identification Problem*, Automatica, N. 29, Vol. 3, p. 649-660.
- [359] Van Overschee, P.; De Moor, B. (1996) - *Subspace Identification for Linear Systems: Theory - Implementation - Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [360] Ventura, C. E.; Felber, A. J.; Stierner, S. F. (1995) – *Experimental Investigations of Dynamics of Queensborough Bridge*, ASCE Journal of Performance of Constructed Facilities, Vol. 9, N. 2, p. 146-155.
- [361] Ventura, C. E.; Finn, W. D. L.; Wagner, P. R.; Felber, A. J. (1996) - *Ambient Vibration Studies of Three Short-Span Reinforced Concrete Bridges*, 11th WCEE, Acapulco, Mexico, N. 921.
- [362] Ventura, C. E.; Felber, A. J.; Stierner, S. F. (1996) - *Determination of the Dynamic Characteristics of the Colquitz River Bridge by Full-Scale Testing*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 23, p. 536-548.
- [363] Ventura, C. E.; Schuster, N. D. (1996) – *Structural Dynamic Properties of a Reinforced Concrete High-Rise Building During Construction*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 23, p. 950-972.
- [364] Ventura, C. E.; Horyna, T. (2000) – *Measured and Calculated Modal Characteristics of the Heritage Court Tower in Vancouver, BC*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- [365] Ventura, C.; Brincker, R. (2000) - *Modal Identification of Output Only Systems – Course Notes*, Short Course, Universidad Politecnica de Madrid.
- [366] Ventura, C. E.; Brincker, R.; Dascotte, E.; Andersen, P. (2001) – *FEM Updating of the Heritage Court Building Structure*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- [367] Ventura, C. E.; Kharrazi, M. H. K.; Turek, M.; Horyna, T. (2002) – *Dynamic Analysis of a Pedestrian Walkway*, University of British Columbia, Canada, IMAC XX, Los Angeles, USA.
- [368] Ventura, C.; Lord, J.-F.; Simpson, R. D. (2002) – *Effective Use of Vibration Measurements for Modal Updating of a 48 Storey Building in Vancouver, Canada*, International Conference on Structural Dynamics Modelling, Funchal, Madeira, Portugal.
- [369] Vincent, G. S. (1958) - *Golden Gate Bridge Vibration Study*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 4, ST6.
- [370] Vold, H.; Kundrat, J.; Rocklin, G. T.; Russel, R. (1982) – *A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini-Computers*, SAE Technical Paper Series, N. 820194.
- [371] Vold, H.; Rocklin, G. T. (1982) – *The Numerical Implementation of a Multi-Input Modal Estimation Method for Mini-Computers*, IMAC I, Orlando, USA.

W

- [372] Walter, P. L. (1999) – *Dynamic Force, Pressure and Acceleration Measurement. Part 1 - The Applicable Conceptual & Dynamic Transducer Models*, Measurements & Control Journal, (<http://www.endevco.com/main/literature>).
- [373] Walter, P. L. (1999) – *Dynamic Force, Pressure and Acceleration Measurement. Part 2 - The Application of Silicon and Piezoelectric Transduction Technologies*, Measurements & Control Journal, (<http://www.endevco.com/main/literature>).
- [374] Welch, P. D. (1967) – *The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra*, IEEE Transactions on Audio and Electro-Acoustics, Vol. AU-15, N. 2.
- [375] Wenzel, H.; Geier, R. (2001) - *Dynamic Tests of Real Bridges till Failure*, Symposium on Health Monitoring and Retrofitting of Large Civil Engineering Structures, San Diego, USA.
- [376] Wilson, J. C.; Gravelle, W. (1991) - *Modelling of a Cable-Stayed Bridge for Dynamic Analysis*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, p. 707-721.

- [377] Wilson, J. C.; Liu, T. (1991) - *Ambient Vibration Measurements on a Cable-Stayed Bridge*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, p. 723-747.
- [378] Wong, K.-Y.; Man, K.-L.; Chan, W.-Y. (2001) - *Monitoring Hong Kong's Bridges – Real-Time Kinematic Spans the Gap*, GPS World, July 2001, (<http://www.gpsworld.com>).
- [379] Wubben, G.; Bagge, A.; Boettcher, G.; Schmitz, M. (2001) - *Permanent Monitoring with GPS with 1 Millimeter Accuracy*, International Technical Meeting ION GPS-01, Salt Lake City, Utah.

X

- [380] Xu, Y.; Ko, J.; Zhang, W. (1997) - *Vibration Studies of Tsing Ma Suspension Bridge*, ASCE Journal of Bridge Engineering, Vol. 2, N. 4, p. 149-156.

Y

- [381] Yamaguchi, H.; Manabe, Y.; Sasaki, N.; Morishita, K. (1999) - *Field Observation and Vibration Test of the Tataru Bridge*, Cable-Stayed Bridges – Past, Present and Future, IABSE Conference, Malmö, Sweden.
- [382] Yang, J. C. S.; Caldwell, D. W. (1975) - *The Measurement of Damping and the Detection of Damages in Structures by the Random Decrement Technique*, 46th Shock and Vibration Symposium and Bulletin, San Diego, USA.
- [383] Yang, J. C. S.; Caldwell, D. W. (1978) - *A Method for Detecting Structural Deterioration in Piping Systems*, ASME Probabilistic Analysis and Design of Nuclear Power Plant Structures Manual, PVB-PB-030, p. 97-117.
- [384] Yang, J. C. S.; Dagalak, N.; Hirth, M. (1980) - *Application of the Random Decrement Technique in the Detection of an Induced Crack on an Offshore Platform Model*, Computer Methods for Offshore Structures - Winter Annual Meeting of ASME, p. 55-67.
- [385] Yang, J. C. S.; Chen, J.; Dagalak, N. (1984) - *Damage Detection in Offshore Structures by the Random Decrement Technique*, ASME Journal of Energy Resources Technology, Vol. 106, p. 38-42.
- [386] Yang, J. C. S.; Qi, G. Z.; Kan, C. D. (1990) - *Mathematical Base of Random Decrement Technique*, IMAC VIII, Kissimmee, USA.
- [387] Yang, Q.; Bregant, L.; Heylen, W.; Sas, P. (1994) - *Modal Parameter Identification from Operating Response Data*, ISMA 19: Tools for Noise and Vibration Analysis, KU Leuven, Belgium.
- [388] Yang, Q. J.; Zhang, P. Q.; Li, C. Q.; Wu, X. P. (1994) - *A System Theory Approach to Multi-Input Multi-Output Modal Parameters Identification Methods*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 8, N. 2, p. 159-174.

Z

- [389] Zeiger, H. P.; McEwen, A. J. (1974) - *Approximate Linear Realization of Given Dimension via Ho's Algorithm*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-19 (2).
- [390] Zhang, L.; Brincker, R.; Andersen, P. (2002) - *A Unified Approach for Two-Stage Time Domain Modal Identification*, International Conference on Structural Dynamics Modelling, Funchal, Madeira, Portugal.
- [391] Zhang, L. (2003) - *On the Two-Stage Time Domain Modal Identification*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- [392] Zhao, J.; DeWolf, J. T. (2002) - *Dynamic Monitoring of Steel Girder Highway Bridge*, ASCE Journal of Bridge Engineering, Vol. 7, N. 6, p. 350-356.
- [393] Zolotcov, A. S. (1998) - *Assessment of Earthquake Resistance of Buildings by their Dynamic Characteristics*, 11th ECEE, Paris, France.

RELATÓRIOS / NOTAS TÉCNICAS - LNEC

- [LNEC.1] Marecos, J. (1954) – *Observação e Ensaio da Ponte sobre o Rio Sousa*, Proc. 145-II, Secção de Estruturas.
- [LNEC.2] Marecos, J. (1957) – *Observação e Ensaio da Ponte de Santa Clara*, Proc. 295-II, Secção de Estruturas.
- [LNEC.3] Pereira, J. (1960) – *Estudo da Estabilidade Aerodinâmica duma Ponte Suspensa*, Proc. 726-II, Secção de Estruturas.
- [LNEC.4] Marecos, J.; Oliveira, J. (1962) – *Observação do Viaduto de Sacavém*, Proc. 32-1-611, Divisão de Estruturas.
- [LNEC.5] Pereira, J. (1962) – *Medições Dinâmicas da Barragem da Bouça*, Proc. 43/1/234, Divisão de Estruturas.
- [LNEC.6] Pereira, J. (1962) – *Medições Dinâmicas da Barragem do Cabril*, Proc. 43/1/377, Divisão de Estruturas.
- [LNEC.7] Pereira, J. (1964) – *Estudo do Comportamento Dinâmico dos Pilares P3 e P4 da Ponte sobre o Tejo*, Proc. 37/1/1996, Divisão de Estruturas.
- [LNEC.8] Marecos, J.; Pereira, J.; Castanheta, M.; Trigo, J. (1966) – *Observação da Ponte sobre o Tejo. Ensaio de Carga*, Proc. 37/0/3051, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.9] Marecos, J. (1966) – *Observação da Ponte sobre o Tejo. Projecto da Instalação de Equipamento para Estudos Dinâmicos da Superestrutura da Ponte Suspensa*, Proc. 37/1/1995, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.10] Marecos, J.; Pereira, J.; Castanheta, M. (1967) – *Ensaio de Carga da Ponte sobre o Tejo. Ponte Suspensa*, Proc. 37/1/3051, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.11] Marecos, J.; Pereira, J.; Trigo, J. (1967) – *Ensaio de Carga da Ponte sobre o Tejo. Viaduto N 5-I*, Proc. 37/1/3051, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.12] Marecos, J.; Pereira, J.; Trigo, J. (1967) – *Ensaio de Carga da Ponte sobre o Tejo. Viaduto Norte*, Proc. 37/1/3051, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.13] Marecos, J.; Castanheta, M. (1968) - *Ensaio de Carga da Ponte de Tomar na E. N. 110*, Proc. 37/1/3268, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.14] Ravara, A.; Pereira, J.; (1969) – *Estudo de Vibrações no Edifício da Central da Barragem da Bouça*, Proc. 39/1/3668, Divisão de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.15] Marecos, J.; Castanheta, M. (1970) – *Observação da Ponte sobre o Tejo. Tensões e Deslocamentos na Estrutura Principal (Observações a longo prazo)*, Proc. 37/1/2203, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.16] Priestley, M. J. N. (1969) – *Structural Behaviour of Buildings from Dynamic Measurements under Ambient Excitation*, Report on Activities at LNEC – Section V, Divisão de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.17] Ravara, A.; Pereira, J.; (1970) – *Observação do Comportamento Dinâmico da Estrutura do Edifício dos Tribunais Cíveis*, Proc. 39/1/3595, Divisão de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.18] Ravara, A.; Pereira, J.; (1970) – *Análise do Acelerograma do Sismo de 28/2/69 registado no macro-sismógrafo da Ponte sobre o Tejo em Lisboa*, Proc. 37/5/3750, Divisão de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.19] Pereira, J.; Carvalho, E. C. (1973) – *Estudo do Comportamento Dinâmico das Chaminés de 100 m da Central Térmica do Carregado*, Proc. 36/1/5057, Divisão de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.20] Marecos, J.; Castanheta, M. (1973) - *Ensaio do Viaduto Ferroviário de Entrecampos*, Proc. 34/1/4920, Divisão de Observação de Obras.

- [LNEC.21] Marecos, J.; Castanheta, M. (1974) - *Ensaio dos Viadutos Rodoviários sobre a Rua Filipe da Mata*, Proc. 34/1/4775, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.22] Saraiva, J. G.; Alves, F. H. (1978) – *Estudo de Vibrações no Pavimento de uma Tecelagem*, Proc. 36/1/6428, Divisão de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.23] Pereira, J.; Oliveira Pedro, J.; Florentino, C. A. (1978) – *Observação do Comportamento de Barragens de Betão para Solicitações Dinâmicas*, Proc. 43/11/6155 – Divisão de Observação.
- [LNEC.24] Marecos, J.; Castanheta, M.; Catarino, J. (1979) – *Ensaaios das Obras de Arte dos Novos Lanços da Auto-Estrada do Sul*, Proc. 34/1/6463, Divisão de Observação de Obras.
- [LNEC.25] Saraiva, J. G. (1980) – *Características Dinâmicas de uma Torre de Betão*, Proc. 36/1/7056, Núcleo de Dinâmica Aplicada.
- [LNEC.26] Marecos, J.; Castanheta, M. (1980) – *Ensaaios de Carga da Ponte de Serviço sobre o Guadiana em Alqueva*, Proc. 34/1/6651, NOE.
- [LNEC.27] Marecos, J.; Castanheta, M.; Catarino, J. (1980) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Palmela-Setúbal da Auto-Estrada do Sul*, Proc. 34/1/6784, NOE.
- [LNEC.28] Marecos, J.; Castanheta, M.; Catarino, J. (1981) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Vila da Feira-Carvalhos Auto-Estrada do Norte*, Proc. 34/1/6786, NOE.
- [LNEC.29] Marecos, J.; Castanheta, M. (1982) – *Ensaio da Ponte sobre a Ribeira da Marateca*, Proc. 34/1/6274, NOE.
- [LNEC.30] Marecos, J.; Castanheta, M.; Catarino, J. (1982) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Carregado-Aveiras de Cima Auto-Estrada do Norte*, Proc. 34/1/6785, NOE.
- [LNEC.31] Castanheta, M.; Catarino, J. (1984) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Condeixa-Coimbra Auto-Estrada do Norte*, Relatório 116/84 - NOE.
- [LNEC.32] Castanheta, M.; Catarino, J. (1984) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Coimbra-Mealhada Auto-Estrada do Norte*, Relatório 154/84 - NOE.
- [LNEC.33] Castanheta, M.; Catarino, J.; Silveira, P. (1984) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Estarreja-Vila da Feira Auto-Estrada do Norte*, Relatório 167/84 - NOE.
- [LNEC.34] Fernandes, J.; Catarino, J. (1984) – *Ensaio de Carga da PI 10 do Lanço Carregado-Aveiras de Cima da Auto-Estrada do Norte*, Relatório 170/84 - NOE
- [LNEC.35] Castanheta, M.; Catarino, J.; Silveira, P. (1984) – *Ensaio de Carga da Ponte de Antuã*, Relatório 181/84 - NOE.
- [LNEC.36] Castanheta, M.; Catarino, J.; Silveira, P. (1984) – *Ensaio de Carga da Ponte de Fagilde sobre o Rio Dão*, Relatório 182/84 - NOE.
- [LNEC.37] Oliveira Pedro, J.; Câmara, R. (1985) – *Estudo Dinâmico da Barragem do Cabril*, Relatório 269/85 – NEE.
- [LNEC.38] Silveira, P.; Catarino, J. (1987) – *Ensaio de Carga da Ponte do Tua*, Relatório 233/87 - NOE.
- [LNEC.39] Pinto, A. V.; Campos Costa, A. (1988) – *Análise de Vibrações na Estrutura de Apoio de uma Máquina*, Relatório 245/88 – NDA.
- [LNEC.40] Cary, M.; Silveira, P. (1988) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Águeda-Albergaria Auto-Estrada do Norte*, Relatório 126/88 - NOE.
- [LNEC.41] Silveira, P.; Cary, M. (1988) – *Ensaaios das Obras de Arte do Lanço Mealhada-Águeda Auto-Estrada do Norte*, Relatório 137/88 - NOE.
- [LNEC.42] Pinto, A. V.; Câmara, R.; Portugal, A.; Campos Costa, A. (1989) – *Ensaio da Barragem da Aguieira para solicitações Dinâmicas*, Relatório 6/89 – NO/NDA.

- [LNEC.43] Portugal, A. (1989) – *Observação da Barragem de Crestuma para Acções Dinâmicas*, Nota Técnica, Proc. 43/1/6667.
- [LNEC.44] Lemos Salta, A.; Mata, C.; Campos Costa, A. (1989) – *Ruído e Vibrações do Centro Operacional e Informático do Banco Comercial Português. Parecer sobre a Incomodidade para Moradores do Edifício PALMA*, Relatório 90/89 – NAI/NDA.
- [LNEC.45] Silveira, P.; Cary, M. (1989) – *Ensaio das Obras de Arte do Lanço Porto-Maia da Auto-Estrada Porto-Braga*, Relatório 125/89 - NOE.
- [LNEC.46] Silveira, P.; Cardoso, A. (1990) – *Ensaio das Obras de Arte do Lanço Maia-Cruz Auto-Estrada Porto-Braga*, Relatório 9/90 - NOE.
- [LNEC.47] Portugal, A.; Câmara, R. (1990) – *Estudo do Comportamento Dinâmico da Barragem de Crestuma*, Relatório 27/91 – NO.
- [LNEC.48] Oliveira, C. S.; Portugal, A.; Lopes, M. S.; Martins, A. (1991) – *Comportamento Sísmico do Aqueduto das Águas Livres*, Relatório 202/91 – NDA.
- [LNEC.49] Castanheta, M.; Silveira, P. (1991) – *Ensaio de Carga da Nova Ponte Ferroviária sobre o Rio Douro*, Relatório 233/91 - NOE.
- [LNEC.50] Campos Costa, A. (1992) – *Identificação das Características Dinâmicas da Estrutura de uma Escultura*, Relatório 109/92 – NDA.
- [LNEC.51] Castanheta, M. (1992) – *Ensaio de Carga da Nova Ponte Rodoviária de Alcácer do Sal*, Relatório 157/92 - NOE.
- [LNEC.52] Portugal, A.; Corrêa, M. R. (1993) – *Observação da Barragem de Miranda. Estudo Experimental do Comportamento Dinâmico*, Relatório 9/93 – NO.
- [LNEC.53] Câmara, R.; Oliveira, S.; Portugal, A. (1993) – *Estudo do Comportamento Dinâmico da Barragem do Alto Lindoso*, Relatório 55/93 – NDE/NO.
- [LNEC.54] Oliveira, C. S.; Ribeiro, J. P.; Lopes, M. S.; Martins, A. (1993) – *Caracterização Dinâmica da Igreja do Colégio dos Jesuítas por ensaios IN SITU*, Relatório 67/93 – NDA.
- [LNEC.55] Oliveira, C. S.; Ribeiro, J. P.; Lopes, M. S.; Martins, A. (1993) – *Caracterização Dinâmica da Ponte de Alvenaria da Ribeira Grande por ensaios IN SITU*, Relatório 68/93 – NDA.
- [LNEC.56] Santos, L. O. (1994) – *Ensaio de Carga da Ponte sobre o Rio Angueira*, Relatório 147/94 – NOE.
- [LNEC.57] Santos, L. O.; Rodrigues, J.; Fernandes, J. A. (1994) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte PI 18A e PS 22 do Sublanço Palmela-Marateca da Auto-Estrada do Sul*, Relatório 149/94 – NOE.
- [LNEC.58] Rodrigues, J.; Santos, L. O.; Fernandes, J. A. (1994) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte PI 1 e PI 1A do Sublanço Palmela-Marateca da Auto-Estrada do Sul*, Relatório 150/94 – NOE.
- [LNEC.59] Pina, C.; Gomes, J.; Oliveira, S.; Sêco Pinto, P. (1995) – *Ensaio de Vibração Forçada de um Conjunto de duas Estacas construídas no local da Segunda Travessia do Tejo*, Relatório 69/95 – NDE/NEE/NF.
- [LNEC.60] Santos, L. O.; Fernandes, J. A. (1995) – *Ensaio de Carga da Passagem Superior 14 A do Nó de Alverca da Auto-Estrada do Norte*, Relatório 86/95 – NOE.
- [LNEC.61] Silveira, P. (1995) – *Ensaio de Carga da Nova Ponte Internacional de Monção sobre o Rio Minho*, Relatório 87/95 - NOE.
- [LNEC.62] Silveira, P. (1995) – *Ensaio de Carga da PS à Linha do Norte Integrada na Ligação entre a Rotunda do Cardal e a Av. 25 de Abril na Mealhada*, Relatório 88/95 - NOE.
- [LNEC.63] Silveira, P. (1995) – *Ensaio de Carga da PS à Linha do Norte, na Av. Marechal Gomes da Costa em Lisboa*, Relatório 109/95 - NOE.

- [LNEC.64] Silveira, P.; Falcão, J. (1995) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte PS 3, Viaduto da Ribeira da laje e PI 22 A do Sublanço Vendas-Novas/Montemor-o-Novo da Auto-Estrada A6*, Relatório 177/95 - NOE.
- [LNEC.65] Silveira, P.; Falcão, J. (1995) – *Ensaio de Carga dos Viadutos do Vale da Canha e do Vale Figueira do sublanço Marateca/Vendas Novas da Auto-Estrada A6*, Relatório 179/95 - NOE.
- [LNEC.66] Santos, L. O.; Fernandes, J. A. (1995) – *Ensaio de Carga do Viaduto Principal de Sete-Rios do Eixo Viário Norte-Sul em Lisboa*, Relatório 206/95 – NOE.
- [LNEC.67] Santos, L. O.; Fernandes, J. A. (1995) – *Ensaio de Carga da Componente Ferroviária da Ponte sobre o Rio Tejo junto à Central Termoelétrica do Pego*, Relatório 220/95 – NOE.
- [LNEC.68] Silveira, P.; Falcão, J. (1995) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte da Auto-Estrada A9: Viaduto de Fanhões, PS5 (Loures/Bucelas), PS1 (Bucelas/Alverca)*, Relatório 251/95 - NOE.
- [LNEC.69] Silveira, P. (1995) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte do Sublanço Penafiel/Amarante da Auto-Estrada A4: PS9, PS15, PS17 e Viaduto do Tâmega 2*, Relatório 252/95 - NOE.
- [LNEC.70] Santos, L. O.; Fernandes, J. A. (1995) – *Ensaio de Carga da Componente Rodoviária da Ponte sobre o Rio Tejo junto à Central Termoelétrica do Pego*, Relatório 263/95 – NOE.
- [LNEC.71] Silveira, P.; Santos, L. O.; Falcão, J. (1995) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte do Sublanço Malveira/Torres Vedras da Auto-Estrada A8: PS8, PI21 e Viaduto de Serreira*, Relatório 324/95 – NOE.
- [LNEC.72] Silveira, P. (1996) – *Ensaio de Carga da Passagem Superior à Linha do Norte, na Rua Pinto Ribeiro em Lisboa*, Relatório 48/96 - NOE.
- [LNEC.73] Silveira, P. (1996) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte do Sublanço EN 310 / Guimarães da Auto-Estrada A7, PS2, Viaduto sobre a EN 310, Viaduto sobre a vertente do Rio Selho e Viaduto sobre a EN 206*, Relatório 158/96 - NOE.
- [LNEC.74] Rodrigues, J.; Santos, L. O.; Fernandes, J. A. (1996) – *Ensaio de Carga da Ponte Internacional sobre o Rio Guadiana em Castro Marim*, Relatório 171/96 – NOE.
- [LNEC.75] Silveira, P. (1996) – *Ensaio de Carga do Viaduto sobre a Rua Pinto Ribeiro e da Passagem Superior à Linha do Norte em Moscavide*, Relatório 256/96 - NOE.
- [LNEC.76] Pina, C.; Gomes, J. (1996) – *Barragem do Alto Ceira. 1º Ensaio de Vibração Forçada – 1996*, Relatório 21/97 – NDE/NEE.
- [LNEC.77] Silveira, P.; Fernandes, J. A. (1997) – *Ensaio de Carga do Viaduto Nascente/Ponte e da Passagem Superior à Linha do Oeste na Alameda Nascente/Ponte em Campolide*, Relatório 1/97 – NOE.
- [LNEC.78] Rodrigues, J.; Neves, S.; Fernandes, J. A. (1997) – *Ensaio de Carga do Viaduto Principal do Nó de Campolide do Eixo Viário Norte-Sul em Lisboa*, Relatório 34/97 – NOE.
- [LNEC.79] Campos Costa, A.; Sousa, M. L.; Martins, A. (1997) – *Ensaio Dinâmico IN SITU da Portaria de S. Vicente de Fora*, Relatório 90/97 – NDA.
- [LNEC.80] Rodrigues, J.; Campos Costa, A.; Sousa, M. L. (1997) – *Caracterização Dinâmica Experimental da Ponte da Arrábida*, Relatório 106/97 – C3ES.
- [LNEC.81] Silveira, P.; Falcão, J. (1997) – *Ensaio de Carga das Obras de Arte do Sublanço Braga/EN 210 da Auto-Estrada A3, PS2, Viaduto sobre a EN 205, PS10, PS15 e PI24A*, Relatório 154/97 - NOE.
- [LNEC.82] Campos Costa, A.; Rodrigues, J.; Martins, A. (1997) – *Caracterização Dinâmica Experimental da Ponte da Figueira da Foz*, Relatório 217/97 – C3ES.
- [LNEC.83] Campos Costa, A.; Rodrigues, J.; Martins, A. (1997) – *Caracterização Dinâmica Experimental dos Viadutos de Acesso à Ponte da Figueira da Foz*, Relatório 222/97 – C3ES.

- [LNEC.84] Silveira, P. (1998) – *Ensaios de Carga das Obras de Arte: PS1A, PICF, Viaduto sobre a Vala da Salgueirinha, PS10 e PII4 da Auto-Estrada A12 Setúbal/Montijo*, Relatório 150/98 - NOE.
- [LNEC.85] Pina, C.; Gomes, J. (1998) – *Barragem do Cabril. Ensaio de Vibração Forçada – 1996*, Relatório 335/98 – NDE/NEE.
- [LNEC.86] Santos, L. O.; Min, X.; Fernandes, J. A. (1999) – *Ensaios de Carga da Ponte Miguel Torga sobre o Rio Douro na Régua*, Relatório 76/99 – NOE.
- [LNEC.87] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1999) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Ponte Miguel Torga sobre o rio Douro na Régua*, Relatório 82/99 – NOE/NAE/C3ES.
- [LNEC.88] Neves, S.; Fernandes, J. A. (1999) – *Ensaios de Carga do Tabuleiro Poente da Ponte sobre o Rio Sado e do Tabuleiro Nascente do Viaduto de acesso em Alcácer do Sal na A2*, Relatório 203/99 – NOE.
- [LNEC.89] Rodrigues, J.; Campos Costa, A. (1999) – *Caracterização Dinâmica da Ponte 25 de Abril com base na Medição de Vibrações Ambiente*, Relatório 220/99 – NOE/NAE/C3ES.
- [LNEC.90] Fernandes, J. A.; Neves, S.; Santos, T. (2000) – *Ensaios de Carga do Tabuleiro Nascente do Viaduto sobre a Ribeira de Grândola da A2 Auto-estrada do Sul*, Relatório 32/2000 – NOE.
- [LNEC.91] Rodrigues, J. (2000) – *Avaliação das Frequências dos Oito Primeiros Tirantes do Viaduto do Comboio no Funchal*, Relatório 66/2000 – NAE.
- [LNEC.92] Rodrigues, J. (2000) – *Avaliação Experimental das Frequências dos Tirantes da Ponte Rodoviária sobre o Rio Tejo em Santarém*, Relatório 107/2000 – NOE/NAE.
- [LNEC.93] Rodrigues, J. (2000) – *Avaliação das Frequências dos Tirantes do Viaduto do Comboio no Funchal – Ensaios Realizados em 29 de Abril e 8 de Maio de 2000*, Relatório 150/2000 – NAE.
- [LNEC.94] Fernandes, J. A.; Neves, S.; Santos, T. (2000) – *Ensaio de Carga do Viaduto das Vinhas*, Relatório 253/2000 – NOE.
- [LNEC.95] Rodrigues, J. (2000) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Ponte Salgueiro Maia sobre o Rio Tejo em Santarém*, Relatório 271/2000 – NOE/NAE.
- [LNEC.96] Rodrigues, J. (2001) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica da Passagem Superior PS17 do Sublanço Sta. Eulália/Coimbra(Norte) da Auto-Estrada A14*, Relatório 1/2001 – NOE/NAE.
- [LNEC.97] Baptista, A. M.; Rodrigues, J.; Campos Costa, A.; Castanheta, M. (2001) – *Ponte Hintze Ribeiro em Entre-os-Rios. Comportamento Estrutural do Tabuleiro da Ponte*, Nota Técnica 2/2001 – NOE.
- [LNEC.98] Rodrigues, J. (2001) – *Estudo do Comportamento Dinâmico da Ponte de Canelas sob a Acção do Tráfego Ferroviário*, Relatório 102/2001 – NDA/NAE.
- [LNEC.99] Rodrigues, J. (2001) – *Estudo do Comportamento Dinâmico da Ponte de Sacavém sob a Acção do Tráfego Ferroviário*, Relatório 152/2001 – NDA/NAE.
- [LNEC.100] Rodrigues, J. (2001) – *Estudo do Comportamento Dinâmico da Ponte de Cacia sob a Acção do Tráfego Ferroviário*, Relatório 210/2001 – NDA/NAE.
- [LNEC.101] Rodrigues, J. (2001) – *Estudo do Comportamento Dinâmico da Ponte de Esgueira sob a Acção do Tráfego Ferroviário*, Relatório 234/2001 – NDA/NAE.
- [LNEC.102] Rodrigues, J. (2001) – *Caracterização Dinâmica Experimental do Viaduto da Rua Ramalho Ortigão em Lisboa. Ensaios Efectuados em Junho de 2001*, Relatório 296/2001 – NOE/NAE.
- [LNEC.103] Rodrigues, J. (2001) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica do Viaduto V1 do Sublanço Sta. Eulália/Coimbra(Norte) da Auto-Estrada A14*, Relatório 340/2001 – NOE/NAE.
- [LNEC.104] Rodrigues, J. (2002) – *Ensaios de Caracterização Dinâmica do Viaduto V2 do Sublanço Sta. Eulália/Coimbra(Norte) da Auto-Estrada A14*, Relatório 49/2002 – NOE/NAE.

- [LNEC.105] Rodrigues, J. (2002) – *Ensaaios de Caracterização Dinâmica da Estrutura da 1ª Fase da Ampliação do Aeroporto da Madeira*, Relatório 244/2002 – NOE/NAE.
- [LNEC.106] Rodrigues, J. (2002) – *Ensaaios de Caracterização Dinâmica da Estrutura da 2ª Fase da Ampliação do Aeroporto da Madeira*, Relatório 245/2002 – NOE/NAE.
- [LNEC.107] Rodrigues, J. (2003) – *Avaliação das Frequências dos Tirantes da Ponte Salgueiro Maia. Ensaaios Efectuados em Outubro de 2002*, Relatório 80/2003 – NOE/NESDE.
- [LNEC.108] Xu, M.; Santos, L. O. (2003) – *Ensaio de Carga da Passagem Superior PS3 e do Viaduto sobre a Ribeira da Perna Seca do Sublanço Castro Verde / Almodôvar da Auto-Estrada do Sul A2*, Relatório 110/2003 – NOE.
- [LNEC.109] Xu, M.; Santos, L. O. (2003) – *Ensaaios de Caracterização Dinâmica da Passagem Superior PS2 no Sublanço Almodôvar / S. Bartolomeu de Messines da Auto-Estrada A2*, Relatório 192/2003 – NOE.
- [LNEC.110] Santos, L. O.; Xu, M. (2003) – *Ensaaios Estáticos e Dinâmicos do Viaduto sobre o Barranco do Sambro no Sublanço Almodôvar / S. Bartolomeu de Messines da Auto-Estrada A2*, Relatório 193/2003 – NOE.
- [LNEC.111] Santos, L. O.; Rodrigues, J.; Xu, M.; Fernandes, J. A. (2003) – *Ensaio Estático e Dinâmico da Ponte sobre o Rio Arade no Sublanço Almodôvar / S. Bartolomeu de Messines da Auto-Estrada A2*, Relatório 204/2003 – NOE.

ANEXO

Características dinâmicas de estruturas de pontes, avaliadas *in situ* pelo LNEC

Nos quadros seguintes apresenta-se uma listagem das estruturas de pontes, nas quais foram realizados pelo LNEC, estudos de avaliação experimental das suas características dinâmicas. É indicado o ano de realização do estudo, os seus autores, a ponte a que o estudo se refere, o seu vão L (no caso de pontes ou viadutos com tabuleiros contínuos de vários tramos é indicado o valor do maior vão), e o valor identificado para a frequência do 1º modo de vibração vertical f_{IV} .

Quadro A.1 – Pontes rodoviárias.

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{IV} (Hz)
1954	Marecos, J.	Ponte sobre o rio Sousa	115	2,6
1957	Marecos, J.	Ponte de Santa Clara	40	2,5
1962	Marecos, J. Oliveira, J.	Viaduto de Sacavém	57	2,6
1967	Marecos, J. Pereira, J. Trigo, J.	Ponte sobre o Tejo - Viaduto N 5-1	47	2,8
1967	Marecos, J. Pereira, J. Trigo, J.	Ponte sobre o Tejo - Viaduto Norte	76	2,3
1968	Marecos, J. Castanheta, M.	Ponte de Tomar na EN 110	47,5	2,7
1974	Marecos, J. Castanheta, M.	Viaduto rodoviário sobre a Rua Filipe da Mata	34	2,0
1979	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS2 dos novos lanços da auto-estrada do Sul	31	3,0
1979	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS9 dos novos lanços da auto-estrada do Sul	33	2,7
1979	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS14 dos novos lanços da auto-estrada do Sul	30,8	3,4
1979	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS16 dos novos lanços da auto-estrada do Sul	31	3,3
1980	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS17 do lanço Palmela - Setúbal da auto-estrada do Sul	31,5	3,2
1980	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS24 do lanço Palmela - Setúbal da auto-estrada do Sul	33,8	3,3
1980	Marecos, J. Castanheta, M.	Ponte de serviço sobre o Guadiana em Alqueva	31	3,8
1981	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS5 do lanço Vila da Feira - Carvalhos da auto-estrada do Norte	31,8	3,5

Quadro A.2 – Pontes rodoviárias (continuação).

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{iv} (Hz)
1981	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS6 do lanço Vila da Feira - Carvalhos da auto-estrada do Norte	41,64	2,4
1981	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS8 do lanço Vila da Feira - Carvalhos da auto-estrada do Norte	32	3,2
1981	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS21A do lanço Vila da Feira - Carvalhos da auto-estrada do Norte	32,6	4,1
1981	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS28 do lanço Vila da Feira - Carvalhos da auto-estrada do Norte	30,8	4,0
1981	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PS31 do lanço Vila da Feira - Carvalhos da auto-estrada do Norte	35,6	3,4
1982	Marecos, J. Castanheta, M.	Ponte sobre a Ribeira da Marateca	36	3,4
1982	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PI18 do lanço Carregado - Aveiras de Cima da auto-estrada do Norte	21	6,1
1982	Marecos, J. Castanheta, M. Catarino, J.	PH20 do lanço Carregado - Aveiras de Cima da auto-estrada do Norte	30	3,7
1984	Castanheta, M. Catarino, J.	PI8' do lanço Condeixa - Coimbra da auto-estrada do Norte	37	2,8
1984	Castanheta, M. Catarino, J.	PS4 do lanço Condeixa - Coimbra da auto-estrada do Norte	31,2	3,4
1984	Fernandes, J. A. Catarino, J.	PI10 do lanço Carregado - Aveiras de Cima da auto-estrada do Norte	21	5,0
1984	Castanheta, M. Catarino, J.	PS6 do lanço Coimbra-Mealhada da auto-estrada do Norte	32	4,6
1984	Castanheta, M. Catarino, J.	PS11 do lanço Coimbra-Mealhada da auto-estrada do Norte	31	4,3
1984	Castanheta, M. Catarino, J. Silveira, P.	PS1 do lanço Estarreja-Vila da Feira da auto-estrada do Norte	34	4,0
1984	Castanheta, M. Catarino, J.	PS6 do lanço Coimbra-Mealhada da auto-estrada do Norte	31	4,3
1984	Castanheta, M. Catarino, J. Silveira, P.	Ponte de Antuã	42	3,2
1984	Castanheta, M. Catarino, J. Silveira, P.	Ponte de Fagilde sobre o rio Dão	62,6	1,8

Quadro A.3 – Pontes rodoviárias (continuação).

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{iv} (Hz)
1987	Silveira, P. Catarino, J.	Ponte do Tua	57,4	2,2
1988	Silveira, P. Cary, M.	PS17 do lanço Mealhada-Águeda da auto-estrada do Norte	31,9	3,6
1988	Cary, M. Silveira, P.	PS10 do lanço Águeda-Albergaria da auto-estrada do Norte	31,6	4,2
1989	Silveira, P. Cary, M.	PS9 do lanço Porto-Maia da auto-estrada Porto-Braga	42	2,7
1990	Silveira, P. Cary, M.	PS23 do lanço Maia-Cruz da auto-estrada Porto-Braga	31,4	3,9
1990	Silveira, P. Cary, M.	PS41 do lanço Maia-Cruz da auto-estrada Porto-Braga	34	3,3
1992	Corrêa, R. Campos Costa, A.	Ponte atirantada sobre o rio Arade	256	0,360
1992	Corrêa, R. Campos Costa, A.	Ponte atirantada sobre o rio Guadiana	324	0,397
1992	Castanheta, M.	Nova ponte rodoviária de Alcácer do Sal	85	1,24
1994	Rodrigues, J. Santos, L. O. Fernandes, J. A.	PI1A da auto-estrada A-2 (Palmela - Marateca)	31,9	3,3
1994	Santos, L. O. Rodrigues, J. Fernandes, J. A.	PI18A da auto-estrada A-2 (Palmela - Marateca)	29,85	2,9
1994	Santos, L. O.	Ponte de Angueira	115	1,3
1995	Santos, L. O. Fernandes, J. A.	PS14A do nó de Alverca da auto-estrada do Norte	42,8	2,9
1995	Silveira, P.	Nova ponte internacional de Monção sobre o rio Minho	100	1,1
1995	Silveira, P.	PS à linha do Norte integrada na ligação entre a rotunda do Cardal e a Av. 25 de Abril na Mealhada	12	12
1995	Silveira, P. Falcão, J. T.	PS3 do sublanço Vendas Novas/Montemor-o-Novo da auto-estrada A6	34	3,8
1995	Silveira, P. Falcão, J. T.	Viaduto do Vale Figueira do sublanço Marateca - Vendas Novas da auto-estrada A6	38.5	2.8
1995	Silveira, P. Falcão, J. T.	Viaduto do vale da Canha do sublanço Marateca - Vendas Novas da auto-estrada A6	30	5
1995	Santos, L. O. Fernandes, J. A.	Viaduto principal de Sete - Rios do eixo viário Norte - Sul em Lisboa	40	3,5
1995	Santos, L. O. Fernandes, J. A.	Ponte rodoviária sobre o rio Tejo junto à central termoelectrica do Pego	65	2,345
1995	Silveira, P. Falcão, J. T.	PS5 do lanço Loures – Bucelas da auto-estrada A9	43	3,0
1995	Silveira, P.	PS17 do sublanço Penafiel - Amarante da auto-estrada A4	29,7	3,75

Quadro A.4 – Pontes rodoviárias (continuação).

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{IV} (Hz)
1995	Silveira, P. Santos, L. O. Falcão, J. T.	PI21 do sublanço Malveira - Torres Vedras da auto-estrada A8	21	6,25
1996	Silveira, P.	PS á linha do Norte na rua Pinto Ribeiro em Lisboa	35,97	4,1
1996	Silveira, P.	Viaduto sobre a EN206 do sublanço EN 310 - Guimarães da auto-estrada A7	52	1,87
1996	Silveira, P.	Viaduto sobre a rua Pinto Ribeiro em Lisboa	25,5	4,0
1997	Rodrigues, J. Neves, S. Fernandes, J. A.	Viaduto principal do nó de Campolide do eixo viário Norte - Sul	34	3,5
1997	Rodrigues, J. Campos Costa, A. Sousa, M. L.	Ponte da Arrábida	270	0,88
1997	Campos Costa, A. Rodrigues, J. Martins, A.	Ponte da Figueira da Foz	225	0,51
1997	Campos Costa, A. Rodrigues, J. Martins, A.	Viaduto de acesso à ponte da Figueira da Foz (margem esquerda)	45	2,11
1997	Campos Costa, A. Rodrigues, J. Martins, A.	Viaduto de acesso à ponte da Figueira da Foz (margem direita)	45	2,06
1997	Silveira, P. Fernandes, J. A.	Viaduto Nascente/Poente na Alameda Nascente/Poente em Campolide	35	3,3
1997	Silveira, P. Falcão, J. T.	PS15 do sublanço Braga - EN210 da auto-estrada A3	43,2	2,8
1998	Silveira, P.	PS1A da auto-estrada A12 Setúbal/Montijo	32	4,2
1999	Rodrigues, J. Campos Costa, A.	Ponte Miguel Torga sobre o rio Douro na Régua	180	0,78
1999	Rodrigues, J. Campos Costa, A.	Ponte suspensa sobre o rio Tejo em Lisboa	1013	0,116
1999	Neves, S. Fernandes, J. A.	Ponte sobre o rio Sado em Alcácer do Sal	135	1,2
2000	Rodrigues, J.	Ponte Salgueiro Maia sobre o rio Tejo em Santarém	246	0,43
2000	Fernandes, J. A. Neves, S. Santos, T. O.	Tabuleiro Nascente do viaduto sobre a ribeira de Grândola da auto-estrada A2	42,5	3,0
2000	Fernandes, J. A. Neves, S. Santos, T. O.	Viaduto das Vinhas	25	2,71
2001	Rodrigues, J.	PS17 da auto-estrada A-14	36	3,93
2001	Rodrigues, J.	Viaduto V1 da auto-estrada A-14	30,5	3,70
2001	Rodrigues, J.	Viaduto da Rua Ramalho Ortigão em Lisboa	70,7	2,04
2002	Rodrigues, J.	Viaduto V2 da auto-estrada A-14	34	3,13

Quadro A.5 – Pontes rodoviárias (continuação).

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{IV} (Hz)
2003	Santos, L. O. Rodrigues, J. Xu Min	Ponte sobre o rio Arade na auto-estrada A2	110	1,367
2003	Rodrigues, J.	Viaduto sobre o ribeiro da Califórnia na auto-estrada A13	24	3,420
2003	Xu Min Santos, L. O.	Passagem superior PS3 da auto-estrada A2	34	3,304
2003	Xu Min Santos, L. O.	Passagem superior PS2 da auto-estrada A2	53,44	2,780
2003	Xu Min Santos, L. O.	Viaduto do Sambro na auto-estrada A2	35	1,978
2003	Rodrigues, J. Santos, L. O. Xu Min	Viaduto sobre a ribeira do Loureiro na auto-estrada A10	100	1,114
2003	Rodrigues, J. Santos, L. O. Xu Min	Viaduto do Calhandriz na auto-estrada A10	47,5	2,887
2004	Rodrigues, J. Santos, L. O. Xu Min	Tabuleiro esquerdo da ponte sobre o rio Corgo no IP3	142,25	0,816
2004	Rodrigues, J. Santos, L. O. Xu Min	Tabuleiro direito da ponte sobre o rio Corgo no IP3	147,76	0,778

Quadro A.6 – Pontes ferroviárias.

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{IV} (Hz)
1973	Marecos, J. Castanheta, M.	Viaduto ferroviário de Entrecampos	25	5,5
1991	Castanheta, M. Silveira, P.	Nova ponte ferroviária sobre o rio Douro	250	0,9
1995	Santos, L. O. Fernandes, J. A.	Ponte ferroviária sobre o rio Tejo junto á central termoeléctrica do Pego	65	4,0
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo E1-P1 da via A)	12	8,6
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo E1-P1 da via D)	12	8,7
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P1-P2 da via A)	12	9,0
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P1-P2 da via D)	12	8,9
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P2-P3 da via A)	12	8,8
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P2-P3 da via D)	12	9,0
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P3-P4 da via A)	12	9,1
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P3-P4 da via D)	12	9,2
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P4-P5 da via A)	12	8,8
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P4-P5 da via D)	12	9,2
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P5-E2 da via A)	12	8,8

Quadro A.7 – Pontes ferroviárias (continuação).

Ano	Autores	Obra	L (m)	f_{IV} (Hz)
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Canelas (tramo P5-E2 da via D)	12	8,8
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Cacia (via A)	24,5	5,62
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Cacia (via D)	24,5	5,62
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo E1-P1 da via A)	29,05	6,3
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo E1-P1 da via D)	29,05	6,4
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo P1-P2 da via A)	30,85	6,6
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo P1-P2 da via D)	30,85	6,3
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo P2-P3 da via A)	30,85	6,4
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo P2-P3 da via D)	30,85	6,7
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo P3-P4 da via A)	30,85	6,7
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Esgueira (tramo P3-P4 via D)	30,85	7,1
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Sacavém (estrutura da via AR)	31,4	6,95
2001	Rodrigues, J.	Ponte ferroviária de Sacavém (estrutura da via DR)	31,4	7,04